# Taylorpolynome

zurück

Approximation durch Polynome höheren Grades

## Erklärung

Bis jetzt haben wir Funktionen nur durch Polynome 1. und 2.Grades approximiert, nämlich durch die Tangentengerade und die Schmiegeparabel.

In diesem Kapitel wollen wir die Taylorformel kennenlernen, mit der man auch Approximationpolynome höheren Grades leicht berechnen kann, wobei Tangentengerade und Schmiegeparabel Sonderfälle der Taylorformel sind:

> Um Approximations-Polynome höheren Grades zu berechnen, benutzt man das **Taylor-Verfahren**. Wir werden es zuerst an einer speziellen Funktion herleiten, und dann zur **Taylorformel** verallgemeinern.

Dabei gehen wir zunächst einmal davon aus, dass die Approximation besser wird, wenn das Polynom mehr Glieder hat, also höheren Grades ist. Dazu drei Anmerkungen:

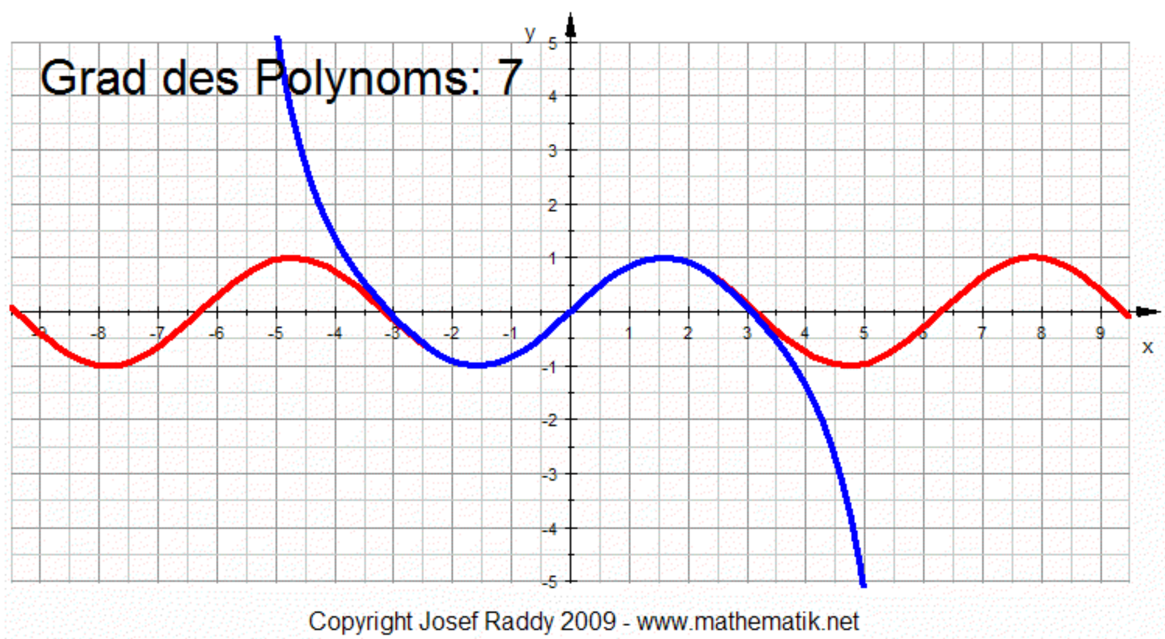
> Wir gehen am Ende des Kapitels auf Ausnahmen ein und werden zeigen, dass dies nur für den Konvergenzbereich der Reihe gilt.
>
> Und später werden wir dann sogar Funktionen kennenlernen, die sich garnicht durch Taylorpolynome approximieren lassen, aber solche Funktionen kommen sehr selten vor.
>
> Den Fehler, der bei der Approximation gemacht wird, werden wir jedoch erst im nächsten Kapitel berechnen bzw. abschätzen lernen.

## Animation: Approximation von sin(x) durch Polynome 1-25.Grades

In rot ist die Sinusfunktion gezeichnet. Die Sinusfunktion (rot) wird nacheinander durch Polynome verschiedenen Grades (blau) approximiert. Die Animation zeigt nacheinander Approximations-Polynome vom 1. bis zum 25.Grad an.

Wie schon oben erklärt gilt dabei:

> Je höher der Grad des Polynoms ist (d.h. je mehr Glieder das Polynom hat), desto genauer ist die Approximation. Dies ist jedoch nicht bei allen Funktionen der Fall, oder genauer gesagt: Nicht in jedem Intervall. Mehr dazu am Ende dieses Kapitels (Stichwort: Konvergenzbereich).



| | |
|---|---|
| | **Taylorpolynome** zurück |
| Die Idee des Taylorverfahrens | |

## Die Idee des Taylorverfahrens

Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, dass die Approximation durch
eine Schmiegeparabel (also durch ein Polynom 2.Grades) besser ist,
als eine Approximation durch eine Tangentengerade (Polynom 1.Grades).

Das liegt daran, weil bei der Schmiegeparabel *zusätzlich* gefordert wird,
dass an der Entwicklungsstelle $x_e$ auch die 2.Ableitung der Funktion
mit der 2.Ableitung des Polynoms übereinstimmt.

Das Taylorverfahren verallgemeinert diese Idee:

Man approximiert die Funktion durch ein Polynom *höheren* Grades
und fordert, dass auch die *höheren Ableitungen* von Funktion und
Polynom an der Entwicklungstelle $x_e$ miteinander übereinstimmen.

Zum Beispiel kann man die Sinusfunktion durch ein Polynom 5.Grades
approximieren und fordern, dass die ersten 5. Ableitungen der Sinusfunktion und des (Approximations)Polynoms übereinstimmen.

Die Praxis zeigt: Dadurch wird die Approximation der Funktion durch
das Polynom noch besser, als die Approximation durch eine Schmiegeparabel.

## Beispiel

Aufgabe:
Wir wollen die Sinusfunktion an der Stelle x=0 durch ein Polynom 5.Grades
approximieren und fordern daher, dass die ersten 5 Ableitungen der
Sinusfunktion und des Polynoms an der Entwicklungsstelle x=0 übereinstimmen.

Lösungsidee:

Wir bilden nacheinander die ersten 5 Ableitungen der Sinusfunktion,
und setzen sie an der Stelle x=0 mit den zugehörigen fünf Ableitungen
des Polynoms gleich.

Lösungsweg:
Wir setzen Funktion und Polynom an der Stelle x=0 gleich:

$$\sin(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$$

**gleichsetzen an der Stelle x=0**

$$\sin(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 + a_4 \cdot 0^4 + a_5 \cdot 0^5$$

Weil (auf der rechten Seite der Gleichung) abgesehen vom ersten Term
alle Terme wegfallen, erhalten wir den ersten der gesuchten Koeffizienten:

$$\boxed{a_0 = \sin 0}$$

Jetzt bilden wir die 1. Ableitung von Funktion und Polynom, und
setzen sie an der Stelle x=0 gleich:

$$\cos(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4$$

$$\cos(0) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot 0 + 3a_3 \cdot 0^2 + 4a_4 \cdot 0^3 + 5a_5 \cdot 0^4$$

Weil wieder (auf der rechten Seite der Gleichung) abgesehen vom ersten Term
alle Terme wegfallen, erhalten wir den nächsten gesuchten Koeffizienten:

$$\boxed{a_1 = \cos(0)}$$

Anmerkung:
Der letzte Schritt (ableiten und x=0 setzen) wiederholt sich jetzt insgesamt fünfmal.

Jetzt bilden wir die 2. Ableitung von Funktion und Polynom, und
setzen sie an der Stelle x=0 gleich:

$$-\sin(x) = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + 4 \cdot 5a_5 x^3$$

$$-\sin(0) = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3a_3 \cdot 0 + 3 \cdot 4a_4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 5a_5 \cdot 0^3$$

Weil wieder (auf der rechten Seite der Gleichung) abgesehen vom ersten Term
alle Terme wegfallen, erhalten wir den nächsten gesuchten Koeffizienten:

$$a_2 = \frac{-\sin(0)}{2}$$

Jetzt bilden wir die 3. Ableitung von Funktion und Polynom, und
setzen sie an der Stelle x=0 gleich:

$$-\cos(x) = 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4 x + 3\cdot 4\cdot 5a_5 x^2$$
$$-\cos(0) = 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4\cdot 0 + 3\cdot 4\cdot 5a_5\cdot 0^2$$

Weil wieder (auf der rechten Seite der Gleichung) abgesehen vom ersten Term
alle Terme wegfallen, erhalten wir den nächsten gesuchten Koeffizienten:

$$a_3 = \frac{-\cos(0)}{2\cdot 3}$$

Jetzt bilden wir die 4. Ableitung von Funktion und Polynom, und
setzen sie an der Stelle x=0 gleich:

$$\sin(x) = 2\cdot 3\cdot 4a_4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5 x$$
$$\sin(0) = 2\cdot 3\cdot 4a_4 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5\cdot 0$$

Weil wieder (auf der rechten Seite der Gleichung) abgesehen vom ersten Term
alle Terme wegfallen, erhalten wir den nächsten gesuchten Koeffizienten:

$$a_4 = \frac{\sin(0)}{2\cdot 3\cdot 4}$$

Jetzt bilden wir die 5. Ableitung von Funktion und Polynom, und
setzen sie an der Stelle x=0 gleich:

$$\cos(x) = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5$$
$$\cos(0) = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a_5$$

Weil wieder (auf der rechten Seite der Gleichung) abgesehen vom ersten Term
alle Terme wegfallen, erhalten wir den nächsten gesuchten Koeffizienten:

$$a_5 = \frac{\cos(0)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

Zusammenfassung und vereinfachen der berechneten Koeffizienten:
Die berechneten Koeffizienten schreiben wir nochmal auf und

vereinfachen sie:

$$a_0 = \sin 0 = 0$$
$$a_1 = \cos(0) = 1$$
$$a_2 = \frac{-\sin(0)}{2} = \frac{-0}{2} = 0$$
$$a_3 = \frac{-\cos(0)}{2\cdot 3} = \frac{-1}{1\cdot 2\cdot 3} = -\frac{1}{3!}$$
$$a_4 = \frac{\sin(0)}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 0$$
$$a_5 = \frac{\cos(0)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{5!}$$

Berechnete Koeffizienten in den gegebenen Ansatz einsetzen:

$$\sin(x) = 0 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 - \frac{1}{3!}\cdot x^3 + 0\cdot x^4 + \frac{1}{5!}x^5$$

Da einige Summanden gleich Null sind ergibt sich die Lösung:

$$\boxed{\sin(x) = 1x - \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{5!}\cdot x^5}$$

## Taylorpolynome

zurück

Taylorformel an der Stelle x=0

# Worum geht es

Auf den vorigen Seiten haben wir ein Taylorpolynom für einen Spezialfall hergeleitet, nämlich für die Sinusfunktion. Nun wollen wir das Lösungsverfahren verallgemeinern.

Wir wollen die Taylorformel (zunächst für die Entwicklungsstelle x=0) kennenlernen, mit der man das Taylorpolynom einer beliebigen Funktion sofort erhält, ohne es jedesmal (wie im Beispiel mit der Sinusfunktion) das Polynom herleiten zu müssen.

Die Herleitung (nächste Seite) verläuft dabei identisch zum Spezialfall der Sinusfunktion, d.h. in der Herleitung sind keine neuen Erkenntnisse versteckt.

# Taylorformel für x=0

Das Taylorpolynom n-Grades einer Funktion f(x) ist in der Nähe von der Entwicklungsstelle x=0 ungefähr gleich der Funktion:

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

oder mit dem Summenzeichen geschrieben:

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}$$

# Beispiel: Taylorpolynom für cos(x)

Gesucht:
Bestimme mit der Taylorformel ein Polynom 2.Grades (d.h. höchste Potenz von x muß 2 sein),
dass die Kosinusfunktion in der Umgebung von x=0 möglichst gut approximiert.

Lösungsweg:
Die Taylorformel im Falle eines Polynoms 2.Grades lautet.

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2}$$

Darin sind die Ableitungen an der Stelle x=0 unbekannt.
Wir bilden also zuerst die Ableitungen f '(x) und f ''(x):

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) \\ f'(x) &= -\sin(x) \\ f''(x) &= -\cos(x) \end{aligned}}$$

Und berechnen dann die Funktionswerte der Ableitungen für x=0:

$$f(0) = \cos(0) = 1$$
$$f'(0) = -\sin(0) = 0$$
$$f''(0) = -\cos(0) = -1$$

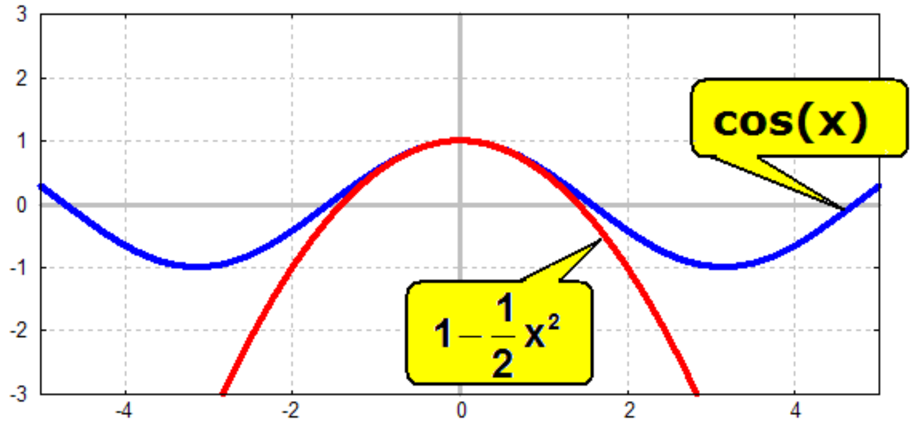
Die Werte setzen wir in die Taylorformel ein:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} 1 + 0x + \frac{-1}{2!}x^2$$

Ergebnis: Vereinfachen ergibt die Lösung, also das Taylorpolynom 2.Grades:

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} 1 - \frac{1}{2}x^2}$$

Interpretation des Ergebnisses:
Die Approximation der Kosinusfunktion (blau) durch das Taylorpolynom 2.Grades (rot) ist in der Umgebung von x=0 recht gut, und wird ab 1 bzw. –1 (Bogenmaß!) schlechter:



# Taylorpolynome

## Worum geht es:

Beweis der Taylorformel für die Entwicklungsstelle x=0

## Gesucht

Wir wollen eine Funktion f(x) in der Nähe von x=0 durch ein Polynom approximieren, d.h. in der Umgebung der Stelle x=0 soll die Funktion ungefähr gleich einem Polynom $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ sein:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n$$

Um das gewünschte Polynom zu erhalten, müssen wir die Koeffizienten $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ , ... , $a_n$ bestimmen. Dazu überlegen wir uns folgendes:

## Schritt 0: $a_0$ bestimmen

Damit Funktion und Polynom *in der Umgebung* von x=0 ungefähr gleich sind, müssen sie an der Stelle x=0 genau gleich sein (denn wenn sie schon für x=0 abweichen würden, würden sie in der Umgebung von x=0 total abweichen). Daher setzen wir Funktion und Polynom an der Stelle x=0 gleich:

$$f(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 + a_4 \cdot 0^4 + \ldots + a_n \cdot 0^n$$

Außer dem ersten Glied der Reihe - nämlich $a_0$ -werden dadurch alle Glieder zu Null.
Somit können wir den Wert von $a_0$ ablesen:

$$\Rightarrow \; a_0 = f(0)$$

Nun ermitteln wir den nächsten Koeffizienten, und benutzen die ähnliche Idee:

## Schritt 1: $a_1$ bestimmen

*Wenn die Funktion und ihr Taylorpolynom für x=0 genau gleich sein sollen, dann müssen auch die Ableitungen von Funktion und Polynom an der Stelle x=0 gleich sein.* Wir bilden daher auf beiden Seiten die Ableitung und setzen dann die Ableitungen (an der Stelle x=0) gleich:

$$f'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} a_1 + 2 \cdot a_2x + 3 \cdot a_3x^2 + 4 \cdot a_4x^3 + \ldots + n \cdot a_nx^{n-1}$$

$$f'(0) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot 0 + 3 \cdot a_3 \cdot 0^2 + 4a_4 \cdot 0^3 + \ldots + n \cdot a_n \cdot 0^{n-1}$$

Außer dem ersten Glied der Reihe - nämlich $a_1$ - werden dadurch alle Glieder zu Null.
Somit können wir den Wert von $a_1$ ablesen:

$$\Rightarrow a_1 = f'(0)$$

Nun ermitteln wir den nächsten Koeffizienten:

## Schritt 2: $a_2$ bestimmen

Die Idee bei Schritt 2 ist fast die gleiche, wie bei Schritt 1: Wenn die Funktion und das Polynom an der Stelle x=0 gleich sein sollen, dann müssen auch ihre höheren Ableitungen übereinstimmen. Wir leiten also beide Seiten nochmal ab und setzen die Ableitungen (an der Stelle x=0) gleich:

$$f''(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3x + 3 \cdot 4 \cdot a_4x^2 + \ldots + n(n-1) \cdot a_nx^{n-2}$$

$$f''(0) = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot 0 + 3 \cdot 4a_4 \cdot 0^2 + \ldots + n(n-1) \cdot a_n \cdot 0^{n-2}$$

Außer dem ersten Glied der Reihe - nämlich $2 \cdot a_2$ - werden wieder alle Glieder zu Null.

Somit können wir den Wert von $a_2$ ablesen:

$$\Rightarrow \boxed{f''(0) = 2 \cdot a_2} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{a_2 = \frac{f''(0)}{2}}$$

## Schritt 3: a3 bestimmen

Wie gesagt, wiederholt sich Schritt 1 immer wieder: Ableitungen bilden und an der Stelle x=0 gleichsetzen:

$$f'''(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4 x + \ldots + n(n-1)(n-2) \cdot a_n x^{n-3}$$

$$f'''(0) = 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 a_4 \cdot 0 + \ldots + n(n-1)(n-2) \cdot a_n \cdot 0^{n-3}$$

Außer dem ersten Glied der Reihe - nämlich $2\cdot 3\cdot a_3$ - werden wieder alle Glieder zu Null.
Somit können wir den Wert von $a_3$ ablesen:

$$\Rightarrow \boxed{f'''(0) = 2 \cdot 3 \cdot a_3} \qquad \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3}}$$

## Schritt 4: a4 bestimmen

Wie gesagt, wiederholt sich Schritt 1 immer wieder: Ableitungen bilden und an der Stelle x=0 gleichsetzen:

$$f^{(4)}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4 + \ldots + n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot a_n x^{n-4}$$

$$f^{(4)}(0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4 + \ldots + n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot a_n \cdot 0^{n-4}$$

Außer dem ersten Glied der Reihe - nämlich $2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4$ - werden wieder alle Glieder zu Null.
Somit können wir den Wert von $a_4$ ablesen:

$$\Rightarrow \boxed{f^{(4)}(0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4} \qquad \Rightarrow \boxed{a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{2 \cdot 3 \cdot 4}}$$

## Schritt n: an bestimmen

Nun kommen wir zum n-ten Schritt. Nach dem n-ten Ableiten setzen wir (so wie immer) für x die Zahl 0 ein:

$$f^{(n)}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n$$

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n$$

Wir können den letzten gesuchten Koeffizienten nun ablesen, wenn wir die letzte Gleichung nach $a_n$ umstellen:

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}}$$

## Letzter Schritt: Koeffizienten in die Formel einsetzen

Jetzt die in den vorigen Schritten berechneten Koeffizienten $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ und $a_4$ in die gegebene Gleichung einsetzen:

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{2\cdot 3}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}x^n}$$

Jetzt dividieren wir alle Terme durch 1. Dies ist erlaubt, denn die 1 ist das neutrale Element der Division (d.h. es passiert nichts, wenn wir eine Zahl oder einen Bruch durch 1 dividieren):

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} \frac{f(0)}{1} + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}x^n}$$

Dadurch können wir die sogenannte Fakultät-Schreibweise anwenden.
Eine kurze Wiederholung, wie die Fakultät definiert ist:

Man schreibt *1·2·3·4* als 4! (sprich: 4 Fakultät), oder allgemein: *1·2·3·...·n = n!*
Außerdem legen wir fest: 0!=1 und 1!=1.

Die Formel vereinfacht sich zu:

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

Nun sieht man auch schon das Bildungsgesetz: Die Ordnung der Ableitung entspricht dem Exponenten von x
und dem Argument der Fakultät. Damit dies auch für das erste Glied der Reihe gilt, definieren wir, dass f(x) die "nullte Ableitung" von sich selbst ist: $f(x) = f^{(0)}(x)$.

Um noch mehr Schreibarbeit zu sparen, benutzen wir das Summenzeichen:

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}$$

Man kann die Formel überprüfen: Setzt man für k nacheinander die Zahlen 0 bis n ein, so erhält man wieder die "Formel ohne Summenzeichen".

Noch eine Anmerkung: In der vorletzten Formel läßt man 0! und 1! meist weg, denn beide sind ja gleich 1:

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x\approx 0}}{\approx} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

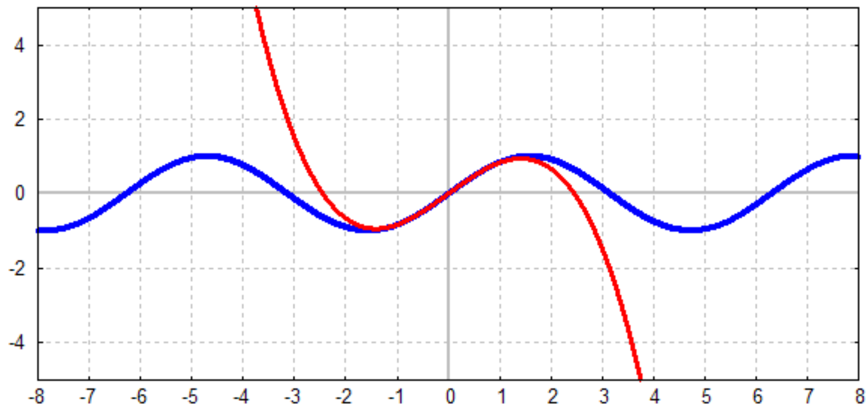
Ein Polynom dieser Form nennt man Taylorpolynom. Die Formel nennt man Taylorformel.

Die beiden letzten Formel sind die Formeln, die wir beweisen wollten.

| | |
|---|---|
| | **Taylorpolynome** zurück |
| Taylorreihe für beliebige Entwicklungsstelle | |

# ■ Worum geht es

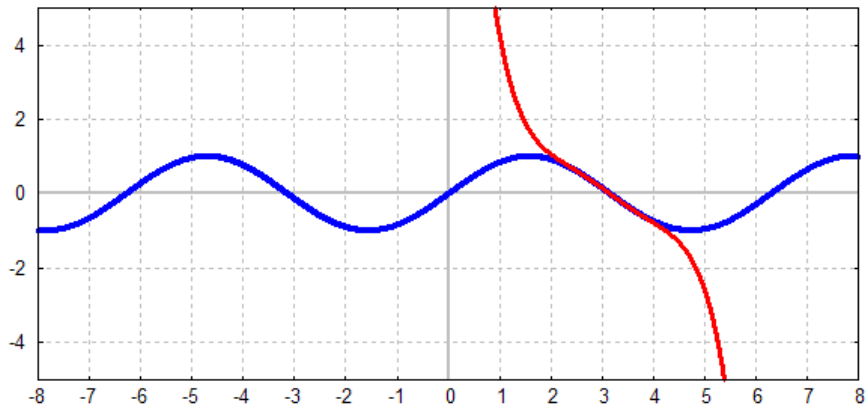
Bis jetzt haben eine Funktion (blau) durch ein Taylorpolynom (rot)
in der Nähe von x=0 approximiert, indem wir forderten, dass die Funktion
bzw. ihre Ableitungen an der Stelle x=0 mit dem Taylorpolynom
übereinstimmten.
Die Approximation war an der Stelle x=0 genau und in der Umgebung von x=0
noch recht gut (natürlich auch abhängig vom Grad des Taylorpolynoms).
Je mehr man sich von der Stelle x=0 entfernte, desto ungenauer wurde die
Approximation:




Nun kann es aber gewünscht sein, dass die Approximation der Funktion
stattdessen
an einer anderen, beliebigen Stelle besonders gut sein soll, z.B. an der Stelle $x_e$
(also z.B. bei x=3).

Dann muß man die Funktion an dieser Stelle $x_e$ "entwickeln", d.h. man fordert
nicht,
dass die Funktion f(x) bzw. ihre Ableitungen an der Stelle x=0 mit dem
Taylorpolynom
bzw. seinen Ableitungen übereinstimmen, sondern an der Stelle $x=x_e$.

Dadurch wird die Funktion an der Stelle $x_e$ genau approximiert (im Bild ist
$x_e=3$),
und auch in der Umgebung der Stelle $x=x_e$ wird sie noch relativ gut
approximiert:




Das Taylorpolynom für eine beliebige Entwicklungsstelle $x_e$

ergibt sich dabei aus folgender Formel:

## ■Taylorformel für beliebige Entwicklungsstelle

Eine Funktion f(x) ist in der Nähe des Entwicklungspunktes $x_e$ (also wenn $x \approx x_e$) ungefähr gleich ihrem Taylorpolynom, dass sich durch folgende Formel bestimmt:

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x \approx x_e}}{\approx} f(x_e) + f'(x_e)(x-x_e) + \frac{f''(x_e)}{2!}(x-x_e)^2 + \frac{f'''(x_e)}{3!}(x-x_e)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_e)}{n!}(x-x_e)^n}$$

Oder in der Schreibweise mit dem Summenzeichen:

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x \approx x_e}}{\approx} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_e)}{k!}(x-x_e)^k}$$

| | |
|---|---|
| | **Taylorpolynome** |

Beispiel 1:

Approximation der Sinusfunktion an der Stelle x=π durch ein Polynom 3.Grades ... unter Zuhilfennahme der Taylorformel

## Gesucht

Wir wollen nun die soeben gelernte "Taylorformel für beliebige Entwicklungsstellen" anwenden, und die Sinusfunktion in der Umgebung von x=π approximieren,
wobei der Winkel π natürlich eine Angabe im trigonometrischen Bogenmaß ist.
Die Funktion soll durch ein Polynom 3. Grades approximiert werden,
wobei das Polynom mit Hilfe der Taylorformel ermittelt werden soll.

## Lösungsweg

Wie gesagt wollen wir die Taylorformel benutzen, um das Polynom zu ermitteln. Sie lautete:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x \approx x_e}}{\approx} f(x_e)+f'(x_e)(x-x_e)+\frac{f''(x_e)}{2!}(x-x_e)^2+\frac{f'''(x_e)}{3!}(x-x_e)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_e)}{n!}(x-x_e)^n$$

In unserem Fall suchen wir ein Polynom 3.Grades, d.h. wir brauchen nur die ersten 4 Glieder:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x \approx x_e}}{\approx} f(x_e)+f'(x_e)(x-x_e)+\frac{f''(x_e)}{2!}(x-x_e)^2+\frac{f'''(x_e)}{3!}(x-x_e)^3$$

Laut Aufgabenstellung ist die Entwicklungsstelle $x_e$ gleich π. Wir ersetzen daher in der Formel alle $x_e$ durch π:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x \approx x_e}}{\approx} f(\pi)+f'(\pi)(x-\pi)+\frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2+\frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3$$

Die Terme f(π) , f '(π), f ''(π) und f '''(π) müssen noch berechnet werden.
Dazu sind zwei Schritte nötig. Zuerst bilden wir die Ableitungen f '(x), f ''(x) und f '''(x):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \\ f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) \\ f'''(x) &= -\cos(x) \end{aligned}$$

Jetzt berechnen wir den Funktionswert bzw. den Wert der Ableitungen an der Stelle π:

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \sin(\pi) = 0 \\ f'(\pi) &= \cos(\pi) = -1 \\ f''(\pi) &= -\sin(\pi) = 0 \\ f'''(\pi) &= -\cos(\pi) = 1 \end{aligned}$$

Jetzt können wir diese Werte in die Formel einsetzen:

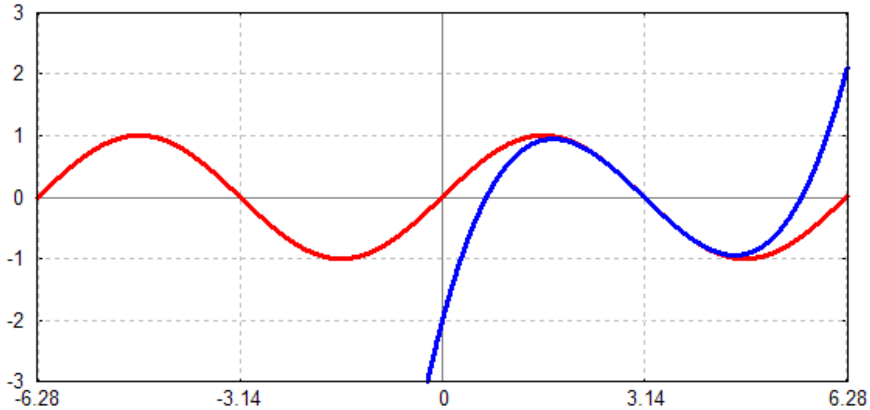
$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x \approx x_e}}{\approx} 0+(-1)(x-\pi)+\frac{0}{2!}(x-\pi)^2+\frac{1}{3!}(x-\pi)^3$$

Wir verfeinfachen den Term und erhalten das gewünschte Polynom:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x \approx x_e}}{\approx} -x+\pi+\frac{1}{6}(x-\pi)^3$$

Die Sinusfunktion (rot) und das Polynom (blau) können wir zeichnen lassen. Man sieht:

Die Sinusfunktion wir in der Nähe von x=π (also x ungefähr gleich 3.14) sehr gut approximiert:



**Taylorpolynome**

## ■Die Formel, die wir beweisen wollen

Hier nochmal zur Erinnerung die Formeln, die wir beweisen wollen:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x \approx x_e}}{\approx} f(x_e) + f'(x_e)(x-x_e) + \frac{f''(x_e)}{2!}(x-x_e)^2 + \frac{f'''(x_e)}{3!}(x-x_e)^3 + \frac{f^{(4)}(x_e)}{4!}(x-x_e)^4 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_e)}{n!}(x-x_e)^n$$

Oder in der Schreibweise mit dem Summenzeichen:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x \approx x_e}}{\approx} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_e)}{k!}(x-x_e)^k$$

## ■Herleitung Schritt 1

Wir wollen eine Funktion durch ein Polynom approximieren,
sodass Funktion und Polynom an der Stelle $x_e$ gut übereinstimmen.

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn } x \approx x_e}}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n$$

Weil Funktion und Polynom an der Stelle $x_e$ genau übereinstimmen sollen,
ersetzen daher x durch $x_e$ und setzen dann Funktion und Polynom gleich.
Dann versuchen wir, die Koeffizienten $a_0$ , $a_1$ , $a_2$ , ... zu ermitteln:

$$f(x_e) = a_0 + a_1 x_e + a_2 x_e^2 + a_3 x_e^3 + a_4 x_e^4 + \ldots + a_n x_e^n$$

Nun haben wir ein Problem: Wir haben eine Gleichung mit <u>fünf</u> Unbekannten,
nämlich $a_0$ , $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ und $a_4$. Die Ermittlung des Koeffizienten $a_0$ ist also gescheitert!

Bei der Entwicklungsstelle x=0 trat dieses Problem nicht auf, weil beim Einsetzen
von x=0 die letzten Terme alle zu Null werden. Aber vielleicht gibt es ja einen Trick,
damit die letzten Terme zu Null werden, wenn wir $x_e$ einsetzen? Ja, es gibt so einen Trick!

## ■Herleitung Schritt 2

Der Trick ist, die Funktion f(x) durch eine neues Polynom zu approximieren,
bei der x durch $x-x_e$ ersetzt wurde. Das es sich tatsächlich um ein Polynom handelt,
merkt man übrigens schnell, wenn man die Klammern ausmultipliziert:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn } x \approx x_e}}{\approx} a_0 + a_1(x-x_e) + a_2(x-x_e)^2 + a_3(x-x_e)^3 + a_4(x-x_e)^4 + \ldots + a_n(x-x_e)^n$$

Wie bereits erwähnt, sollen Funktion und Polynom an der Stelle $x_e$ gleich sein,
damit zumindest an der Stelle $x_e$ die Approximation absolut genau ist,
und daher müssen wir Funktion und Polynom an der Stelle $x=x_e$ gleichsetzen:

$$f(x_e) = a_0 + a_1(x_e-x_e) + a_2(x_e-x_e)^2 + a_3(x_e-x_e)^3 + a_4(x_e-x_e)^4 + \ldots + a_n(x_e-x_e)^n$$

Weil alle Klammern zu Null werden, hat der Trick funktioniert: Wir haben den Koeffizienten $a_0$
gefunden: $a_0 = f(x_e)$.

Wir leiten Funktion und Polynom ab, und setzen die Ableitungen an der Stelle $x_e$ gleich, denn wie schon öfter erwähnt,
sollen auch die "<u>Ableitung</u> der Funktion" mit der "<u>Ableitung</u> des Polynoms" an der Stelle $x=x_e$ gleich sein,

damit die Approximation an der Stelle $x_e$ möglichst gut ist:

$$f'(x) \underset{\text{wenn } x \approx x_e}{\approx} a_1 + 2\cdot a_2(x-x_e) + 3\cdot a_3(x-x_e)^2 + 4\cdot a_4(x-x_e)^3 + \ldots + n\cdot a_n(x-x_e)^{n-1}$$

$$f'(x_e) = a_1 + 2\cdot a_2(x_e-x_e) + 3\cdot a_3(x_e-x_e)^2 + 4\cdot a_4(x_e-x_e)^3 + \ldots + n\cdot a_n(x_e-x_e)^{n-1}$$

Weil wieder alle Klammern zu Null werden, können wir $a_1$ ablesen: $a_1=f'(x_e)$.

Dieser Schritt wiederholt sich jetzt immer wieder, denn auch die höheren Ableitungen der Funktion und des Polynoms sollen an der Stelle $x_e$ gleich sein. Wir leiten daher die Funktion und das Polynom nochmal ab und setzen sie an der Entwicklungsstelle $x=x_e$ gleich:

$$f''(x) \underset{\text{wenn } x \approx x_e}{\approx} 2\cdot a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3(x-x_e) + 3\cdot 4\cdot a_4(x-x_e)^2 + \ldots + n(n-1)\cdot a_n(x-x_e)^{n-2}$$

$$f''(x_e) = 2\cdot a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3(x_e-x_e) + 3\cdot 4\cdot a_4(x_e-x_e)^2 + \ldots + n(n-1)\cdot a_n(x_e-x_e)^{n-2}$$

Weil wieder alle Klammern (die $x_e-x_e$ enthalten) zu Null werden, erhalten wir: $\boxed{a_2 = \frac{f''(x_e)}{2}}$

Und nochmal beide Seiten ableiten und an der Stelle $x=x_e$ gleichsetzen:

$$f'''(x) \underset{\text{wenn } x \approx x_e}{\approx} 2\cdot 3\cdot a_3 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4(x-x_e) + \ldots + n(n-1)(n-2)\cdot a_n(x-x_e)^{n-3}$$

$$f'''(x_e) = 2\cdot 3\cdot a_3 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4(x_e-x_e) + \ldots + n(n-1)(n-2)\cdot a_n(x_e-x_e)^{n-3}$$

Weil wieder alle Klammern (die $x_e-x_e$ enthalten) zu Null werden, erhalten wir: $\boxed{a_3 = \frac{f'''(x_e)}{2\cdot 3}}$

Und nochmal beide Seiten ableiten und an der Stelle $x=x_e$ gleichsetzen:

$$f^{(4)}(x) \approx 2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4 + \ldots + a_n(x-x_e)^n$$

$$f^{(4)}(x_e) = 2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4 + \ldots + a_n(x_e-x_e)^n$$

Weil wieder alle Klammern (die $x_e-x_e$ enthalten) zu Null werden, erhalten wir: $\boxed{a_4 = \frac{f^{(4)}(x_e)}{2\cdot 3\cdot 4}}$

Schließlich bilden wir die n-te Ableitung, und weil wieder die Ableitungen (von Funktion und Polynom)
an der Stelle $x_e$ gleich sein sollen, setzen wir die Ableitungen an der Stelle $x_e$ gleich:

$$f^{(n)}(x) \underset{\text{wenn } x \approx x_e}{\approx} n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_n(x-x_e)^{n-n}$$

$$f^{(n)}(x_e) = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot a_n(x_e-x_e)^{n-n}$$

Weil die Klammer (die $x_e-x_e$ enthält) zu Null wird, erhalten wir: $\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(x_e)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n}}$

## ■Herleitung Schritt 3

Der ursprüngliche Ansatz für die Taylorreihe (siehe Schritt 2) lautete:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn } x \approx x_e}}{\approx} a_0 + a_1(x-x_e) + a_2(x-x_e)^2 + a_3(x-x_e)^3 + a_4(x-x_e)^4 + \ldots + a_n(x-x_e)^n$$

Die ermittelten Koeffizienten $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ setzen wir in diese Formel ein:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn } x \approx x_e}}{\approx} f(x_e) + f'(x_e)(x-x_e) + \frac{f''(x_e)}{2}(x-x_e)^2 + \frac{f'''(x_e)}{2\cdot 3}(x-x_e)^3 + \frac{f^{(4)}(x_e)}{2\cdot 3\cdot 4}(x-x_e)^4 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_e)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots\cdot n}(x-x_e)^n$$

Als Vorbereitung des nächsten Schritts (Fakultäts-Schreibweise einführen) dividieren wir alle Terme durch 1.
Dies ist erlaubt, denn eine Division durch 1 ändert einen Term bekanntlich nicht. Wir erhalten:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn } x \approx x_e}}{\approx} \frac{f(x_e)}{1} + \frac{f'(x_e)}{1}(x-x_e) + \frac{f''(x_e)}{1\cdot 2}(x-x_e)^2 + \frac{f'''(x_e)}{1\cdot 2\cdot 3}(x-x_e)^3 + \frac{f^{(4)}(x_e)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(x-x_e)^4 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_e)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots\cdot n}(x-x_e)^n$$

Um die Darstellung zu vereinfachen, benutzen wir wieder die sogenannte Fakultät-Schreibweise:
Produkte wie **1·2·3·4** werden geschrieben als **4!** (sprich: 4 Fakultät). Oder allgemein gesagt:
**1·2·3·4·...·n = n!**
Beachte, dass außerdem bei der Definition der Fakultät festgelegt wurde, dass 0!=1, 1!=1. Wir erhalten:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn } x \approx x_e}}{\approx} \frac{f(x_e)}{0!} + \frac{f'(x_e)}{1!}(x-x_e) + \frac{f''(x_e)}{2!}(x-x_e)^2 + \frac{f'''(x_e)}{3!}(x-x_e)^3 + \frac{f^{(4)}(x_e)}{4!}(x-x_e)^4 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_e)}{n!}(x-x_e)^n$$

Wenn wir jetzt noch festlegen, dass man unter der *nullten Ableitung einer Funktion f* die Funktion selbst versteht,
dass also gilt: $f(x)=f^{(0)}(x)$, dann kann man sich das Bildungsgesetzt für die Glieder der Taylorreihe leicht merken:

**Die Ordnung der Ableitung ist identisch mit dem Argument der Fakultät und dem Exponenten der Klammer ($x-x_e$).**

Wir können daher auch die verkürzte Schreibweise mit dem Summenzeichen wählen:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x \approx x_e}}{\approx} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_e)}{k!}(x-x_e)^k$$

Es hat sich aber eingebürgert, dass im Nenner des ersten und zweiten Gliedes 0!=1 bzw. 1!=1 weggelassen wird.
Wir erhalten die gesuchte Formel:

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wenn} \\ x \approx x_e}}{\approx} f(x_e) + f'(x_e)(x-x_e) + \frac{f''(x_e)}{2!}(x-x_e)^2 + \frac{f'''(x_e)}{3!}(x-x_e)^3 + \frac{f^{(4)}(x_e)}{4!}(x-x_e)^4 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_e)}{n!}(x-x_e)^n$$

# Taylorpolynome

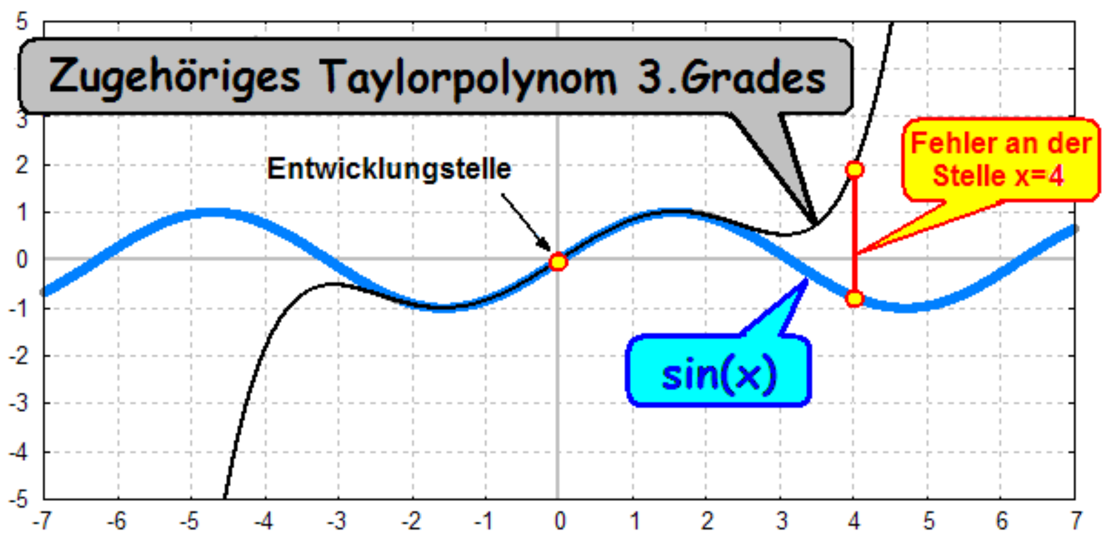
zurück

Der Fehler bzw. die Güte der Approximation

## Erklärung

In diesem Kapitel wollen wir nun der Frage nachgehen, wie gut eine Funktion durch ein Taylorpolynom approximiert wird. Eine Approximation macht nämlich keinen Sinn, wenn man über die Güte der Approximation keine Aussage machen kann.

Im Bild sehen wir die Sinusfunktion (blau) und ihr Taylorpolynom 3.Grades (schwarz) mit der Entwicklungstelle x=0. Außerdem ist die Differenz zwischen Funktion und dem Taylorpolynom für die Stelle x=4 eingezeichnet. Diese Differenz nennt man Fehler:

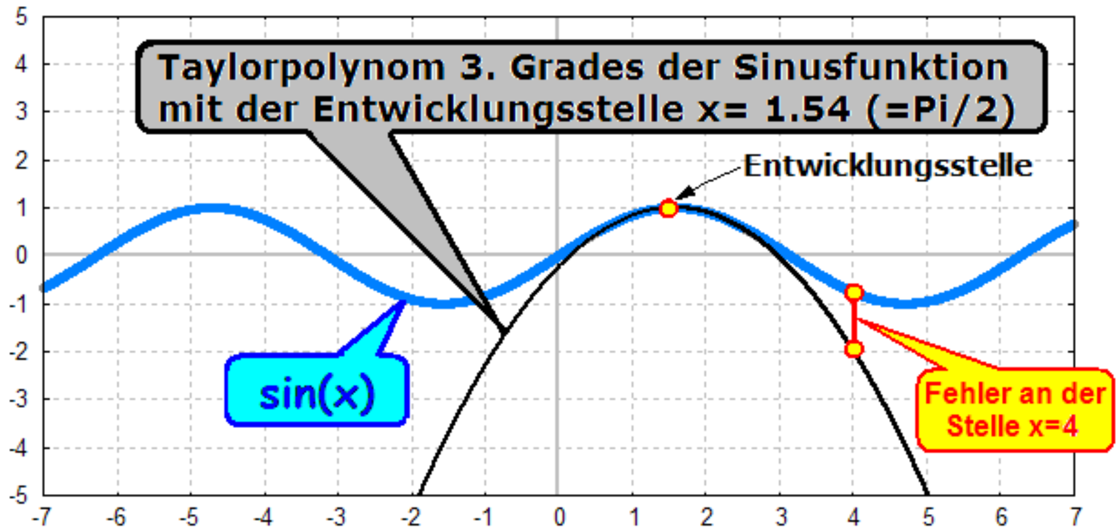



Wie gesagt wollen wir in diesem Kapitel eine Formel angeben, mit der man den Fehler abschätzen kann. Zuerst wollen wir uns verdeutlichen, wovon der Fehler abhängt:

1. Wie man im Bild oben sieht, ändert sich die Größe des Fehlers, wenn ich eine andere Stelle betrachtet. Bei x=2 ist der Fehler sehr gering (er ist im Bild kaum sichtbar). Bei x=4 ist der Fehler aber bereits sehr groß (fast 3 Kästchen).

2. Der Fehler für eine bestimmte Stelle (wie z.B. x=4) ändert sich aber auch, wenn ich für das Taylorpolynom eine andere Enwicklungsstelle wähle.

   Im Bild unten habe ich die Sinusfunktion wieder durch ein Taylorpolynom 3.Grades approximiert, aber diesmal habe ich die Sinusfunktion an der Stelle x=1.54 entwickelt. Man sieht, dass der Fehler an der Stelle x=4 wesentlich geringer geworden ist (nur noch etwas mehr als 1 Kästchen):




Zusammengefaßt kann man sagen: Der Fehler hängt von der Stelle x ab, und von der Entwicklungstelle $x_e$, an der ich die Funktion entwickelt habe. Auf der nächsten Seite geben wir eine Formel an (Formel von Lagrange), mit der man diesen Fehler (in Abhängigkeit von x und $x_e$) abschätzen kann.

# Taylorpolynome

zurück

Restformel von Lagrange

## Restgliedformel von Lagrange

Eine Funktion f(x) mit dem Definitionsbereich [$x_e$,x] sei (n+1)-mal differenzierbar.
Dann gibt es eine Stelle c in ($x_e$,x), sodass für den Rest $R_n(x,x_e)$ gilt:

$$R_n(x,x_e) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_e)^{n+1}$$

Somit gilt für die Funktion f(x):

$$f(x) = \underbrace{f(x_e) + \frac{f'(x_e)}{1!}(x-x_e) + \frac{f''(x_e)}{2!}(x-x_e)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_e)}{n!}(x-x_e)^n}_{\text{Approximation der Funktion}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_e)^{n+1}}_{\text{Restglied}}$$

**Anmerkungen:**

► n ist dabei der Grad des Taylorpolynoms und $x_e$ ist die Entwicklungsstelle.
► Das letzte Glied des Polynoms wird als Restglied bezeichnet, oder als Rest.
► Beachte: Es ist nicht möglich, mit der Formel den Fehler an der Stelle x zu berechnen,
denn die Stelle c ist unbekannt und weder mit der Formel noch sonstwie berechnet werden.
Der Satz sagt lediglich, dass eine Stelle c existiert, an welcher die Berechnungsformel gilt.

**Anmerkungen zu anderen Schreibweisen:**

► Statt c schreibt man auch oft $\xi$ (gesprochen: Xi, griechischer Buchstabe).
► Die Entwicklungsstelle wird statt $x_e$ oft mit $x_0$ bezeichnet (manchmal auch mit a, selten mit c).
► Das Restglied $R_n(x,x_e)$ wird meist nur $R_n(x)$ genannt, was eigentlich etwas ungenau ist,
denn der Rest ist auch von der Entwicklungsstelle $x_e$ abhängig (d.h. ist Funktion von ihr).
Wenn aber klar ist, wo die Funktion entwickelt wurde, schreiben auch wir meist nur $R_n(x)$.
► Das Restglied $R_n(x,x_e)$ müßte eigentlich sogar $R(x,x_e,n)$ geschrieben werden,
weil der Rest auch von n abhängig ist, jedoch schreibt man das n meist in den Index.
► Das Restglied $R_n(x,x_e)$ müßte eigentlich sogar $R(x,x_e,n,f)$ geschrieben werden,
weil der Rest auch davon abhängig ist, welche Funktion man betrachtet. Aber diese Schreibweise ist noch seltener als es die vorige schon ist.

## Die Formel für die Abschätzung des Fehlers:

Wie soeben die Formel von Lagrange kennengelernt:

$$\boxed{R_n(x,x_e) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_e)^{n+1}} \quad ❶$$

Wie gesagt, kann man mit der Formel den Fehler nicht berechnen, denn c ist unbekannt.
Man kann aber aus ihr eine Formel herleiten, mit der man in den meisten Fällen

einen
Höchstwert angeben kann, den der Fehler $R(x,x_e)$ nicht übersteigen wird. Zunächst einmal
bestimmen wir den Betrag des Fehlers. Dabei benutzen wir den Satz: c=a·b => |c|=|a|·|b|

$$\boxed{\left|R_n(x,x_e)\right| = \frac{\left|f^{n+1}(c)\right|}{(n+1)!} \cdot \left|x - x_e\right|^{n+1}} \quad ❷$$

Jetzt schätzt man ab, wie groß der Ausdruck $|f^{n+1}(c)|$ im Intervall $(x_e,x)$ maximal werden kann:

Man berechnet den größten Wert, den der Ausdruck $|f^{n+1}(x)|$ im Intervall $(x_e,x)$ annimmt,
und nennt diesen Maximalwert $M_{|f^{n+1}(x)|}$. Weil auch c (laut dem Satz von Lagrange) im
Intervall $(x_e,x)$ liegt, kann $|f^{n+1}(c)|$ diesen Wert logischerweise nicht überschreiten, d.h. es gilt:

$$\boxed{\left|f^{n+1}(c)\right| \le M_{|f^{n+1}(x)|}} \quad ❸$$

Einsetzen der letzten Formel (3) in die vorletzte Formel (2) ergibt die Abschätzung:

$$\boxed{\left|R_n(x,x_e)\right| \le \frac{M_{|f^{n+1}(x)|}}{(n+1)!} \cdot \left|x - x_e\right|^{n+1}}$$

Auf den folgenden Seiten erklären wir anhand von Beispielen, wie man die Formel anwendet.

# Taylorpolynome

zurück

Fehler an der Stelle x=5 bei der Approximation der Sinusfunktion durch ein Taylorpolynom 3. Grades mit der Entwicklungsstelle $x_e=\pi/2$.

## ■ Aufgabe

Es soll der Fehler abgeschätzt werden, der an der Stelle x=5 auftritt, wenn die Sinusfunktion durch ein Taylorpolynom 3.Grades approximiert würde,
und die Sinusfunktion an der Stelle $x_e=\pi/2$ (ungefähr 1.57 oder 90°) entwickelt würde.

Die Formel für die Fehlerabschätzung lautete:

$$\left|R_n(x,x_e)\right| \le \frac{M_{\left|f^{n+1}(x)\right|}}{(n+1)!}\cdot\left|x-x_e\right|^{n+1}$$

Einsetzen der Entwicklungsstelle $\pi/2$:

Gesucht ist der Fehler an der Stelle x=5,
also müssen wir für x die Zahl 5 einsetzen:

$$\left|R_n(5,\tfrac{\pi}{2})\right| \le \frac{M_{\left|f^{n+1}(x)\right|}}{(n+1)!}\cdot\left|5-\frac{\pi}{2}\right|^{n+1}$$

Da das Taylorpolynom vom Grad 3 ist,
müssen wir für n die Zahl 3 einsetzen:

$$\left|R_3(5,\tfrac{\pi}{2})\right| \le \frac{M_{\left|f^{3+1}(x)\right|}}{(3+1)!}\cdot\left|5-\frac{\pi}{2}\right|^{3+1}$$

Den Nenner und die Klammer kann man ausrechnen:

$$\left|R_3(5,\tfrac{\pi}{2})\right| \le \frac{M_{\left|f^{3+1}(x)\right|}}{24}\cdot 138{,}28$$

Als nächstes bestimmen wir die 4.Ableitung der Funktion f, also die 4.Ableitung
der Sinusfunktion: Dies ist wieder die Sinusfunktion (Hilfe: Wie leite ich sin(x) viermal ab):

$$\left|R_3(5,\tfrac{\pi}{2})\right| \le \frac{M_{\left|\sin(x)\right|}}{24}\cdot 138{,}28$$

Nun fehlt nur noch der Maximalwert M, den der Betrag der Sinusfunktion im Intervall $[\pi/2\,,5]$ annehmen kann. Weil die Sinusfunktion den Wertebereich [–1,1] hat, ist dies der Wert 1:

$$\left|R_3(5,\tfrac{\pi}{2})\right| \le \frac{1}{24}\cdot 138{,}28$$

Die rechte Seite der Ungleichung ausrechnen ergibt (gerundet):

$$\boxed{\left|R_3(5,\tfrac{\pi}{2})\right| < 5.77}$$

Ergebnis: Wenn die Sinusfunktion durch ein Näherungspolynom 3.Grades mit der
Entwicklungsstelle $x_e=\pi/2$ approximiert wird, dann ist der Betrag des Fehlers
an der Stelle x=5.7618492... , also kleiner als 5.77.

Im Bild erkennt man aber, dass der tatsächliche Fehler an der Stelle x=5

nur
knappe 4 Einheiten beträgt. Aber wie gesagt, kann man mit der Formel den Fehler nur grob abschätzen, aber nicht berechnen: