

Tutorium zu Mathematik C für Informatikstudierende, 2016

In der Zeit **vom 17. März bis zum 1. April 2016** montags bis freitags werde ich ein Tutorium/Training zur Vorbereitung auf die Klausur im zweiten Prüfungszeitraum am 9. April 2016 durchführen.

Wer mich bei der Vorbereitung und Durchführung unterstützen möchte, melde sich bitte bis **20 Uhr am 3. März** per E-Mail an tdu@informatik.uni-kiel.de bei mir.

Wer am Tutorium teilnehmen möchte, teile mir dies bitte, ebenfalls per E-Mail, bis **20 Uhr am 3. März** mit.

Sobald Uhrzeiten, Treffpunkt und sonstige **Voraussetzungen** feststehen, werden sie **hier** bekanntgegeben. Insbesondere werden hier kleinere Aufgaben, Fragen, ..., erscheinen, die im Tutorium wieder auftauchen — was aber niemanden davon abhalten möge, sie bereits vorher zu bearbeiten.

Spezialfragen und -themenwünsche bitte auch möglichst früh mitteilen.

Das Tutorium beginnt täglich um 10 Uhr und geht bis etwa 15 Uhr; es ist eine Stunde Mittagspause eingeplant.

Treffpunkt ist **Raum 709** im Uni-Hochhaus (denn es haben sich nur $\frac{2^2}{2 \cdot 2 \cdot 2}$ Leute angemeldet).

Update 07.03.16: Eine defekte Gasleitung zwingt mich, vom **21. bis zum 23. März** zu Hause zu bleiben, und am **25.** sowie am **28. März** ist das Hochhaus verschlossen; ich biete daher an, das Tutorium bei Bedarf bis zum **7. April** zu verlängern.

Thure Dührsen

Aufgaben

1. a. Ausgehend von der Gleichung $0 = \sin(\pi) = \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{5}\right)$ zeige man

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}} \quad .$$

Dies gelingt zum Beispiel, indem man die Additionstheoreme

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

(vgl. [Tutorium zu Mathe C, 2014, Aufgabe 8](#)) sowie den trigonometrischen Pythagoras benutzt.

<http://sammeltlemmas.blogspot.de/2016/02/sinleftfracpi5right-sqrtfrac58.html>

- b. Man folgere daraus

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} \quad \text{und weiter} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} \quad \text{sowie} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}$$

Es ist also peinlichst genau auf die Vorzeichen zu achten! ;)

2. Ein massiver Holzwürfel wird rot gestrichen und danach in 27 gleichgroße Würfel zersägt. Diese werden wahllos auf einem Tisch verstreut.
- Einer der kleinen Würfel wird gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau zwei rote Seiten besitzt?
 - Zwei der kleinen Würfel werden (unter Beachtung der Reihenfolge) gezogen. Es gelte: Mindestens einer der gezogenen Würfel hat keine rote Seite.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite gezogene Würfel mindestens eine rote Seite besitzt?
 - Einer der kleinen Würfel wird einmal geworfen. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine rote Seite oben liegt.
 - Ein blinder Mann setzt die kleinen Würfel wieder zu einem großen Würfel zusammen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Außenfläche des großen Würfels komplett rot ist?

nach <http://math.stackexchange.com/questions/1159899/hard-combinatorics-question-in-school-exam>

3. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, das mindestens zwei Punkte enthält, und sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit nullstellenfreier Ableitung und Nullstelle $\xi \in D$. Man zeige:

$$\text{Gilt } \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)^2} \right| < 1 \text{ für alle } x \in D, \text{ so konvergiert das}$$

$$\text{Newton-Verfahren } N : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ gegen } \xi.$$

Hinweis: Man beachte [Aufgabe 14](#).

Gerald Teschl, Susanne Teschl: Mathematik für Informatiker, Band 2: Analysis und Statistik, Springer Verlag Berlin/Heidelberg, 2. Auflage 2007, S. 97;
Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1, Vieweg+Teubner Verlag Wesbaden, 13. Auflage 2011, S. 408;
<https://p.uni-goettingen.de/get/text/1155>; <https://p.uni-goettingen.de/get/text/1156>

4. Ohne Methoden der Differentialrechnung zu benutzen, bestimme man alle lokalen Extrema der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 4x + 2y + 8$

Hinweis: $8 = 3 + 5 = 3 + (4 + 1)$

5. Sei $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft

$$1 - x^2 \leq f(x) \leq \exp(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0} .$$

- Man zeige, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert und berechne ihn.
- Kann auf die Stetigkeit der Funktion f verzichtet werden?

<http://math.stackexchange.com/questions/1171172/calculate-limit-for-continuous-function>

6. Man untersuche die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{x^4 + y^4}$:

- Existiert $(\nabla f)(0, 0)$?
- Ist f im Punkt $(0, 0)$ total differenzierbar?

http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=204712&post_id=1497420

7. Wir betrachten eine Menge von 5000 Briten.
Ein Brite ist entweder ein Engländer oder ein Schotte oder ein Waliser. 30% der

Briten sind Schotten, und es gibt sechsmal so viele Engländer wie Waliser. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Brite rotes Haar hat, beträgt $\frac{1}{4}$, und ein Brite, der kein Waliser ist, hat mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ rotes Haar. Wie viele Waliser mit rotem Haar sind zu erwarten?

<https://math.stackexchange.com/questions/414745/bayes-theorem-problem-enough-information?rq=1>

8. Man zeige

- durch Differenzieren
- durch Integrieren

die Gültigkeit der folgenden Aussage:

$$\text{Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } \cos(x)^2 - \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1}{2} .$$

Hinweis zu b: Man leite zunächst das Additionstheorem $\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ her (vgl. [Tutorium zu Mathe C, 2014, Aufgabe 8](#)) und integriere dann die linke Seite der obigen Gleichung.

9. Sei X eine nichtleere Menge, und sei d eine Metrik auf X . Seien $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ und seien $x, y \in X$ Gilt dann

$$B_r(x) = B_s(y) \implies r = s \wedge x = y ?$$

<http://math.stackexchange.com/questions/351101/if-2-open-balls-define-the-same-space-is-it-true-that-x-y-and-r-s?q=1>

10. Man berechne die folgenden bestimmten Integrale.

a. $\int_0^t \sqrt{2x^4 + 2x^2} \, dx, \quad t > 0$

nach

http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=204787&post_id=1497907

b. $\int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^1 \frac{1}{t^2 \cdot \sqrt{1-t^2}} \, dt$

c. $\int_{-1}^1 \frac{(1-x) \cdot (1+2x)^6}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

<http://mathematica.stackexchange.com/questions/58940/symbolic-integration-error>

11. Der Zwischenwertsatz 9.6 kann auch folgendermaßen formuliert werden (vgl. Barbara Langfeld, Mathe C, WS 2014/15, Korollar 1.2.14):

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und γ eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$.
Dann gilt:

Ist f stetig, so gibt es $p \in [a, b]$ mit $f(p) = \gamma$.

Man formuliere die Umkehrung des Satzes und entscheide, ob sie gilt, beispielsweise indem man die Funktion

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [-1, 1], \quad x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases},$$

betrachte.

12. Es sei $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die an keiner Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar ist. (Dass es solche Funktionen gibt, kann man zum Beispiel [hier](#) oder [hier](#) nachlesen.)

Man gebe eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ an, die an genau zwei Stellen, nämlich bei $x_1 := \frac{1}{4}$ und bei $x_2 := \frac{1}{2}$, differenzierbar ist.

<http://math.stackexchange.com/questions/1113005/can-a-continuous-function-on-0-1-be-constructed-which-is-differentiable-exactl>

13. a. Wie viele Binärfolgen der Länge 10 haben mindestens drei Einsen?
 b. Wie viele Binärfolgen der Länge 10 haben eine gerade Anzahl von Einsen?
 c. Wie viele Binärfolgen der Länge 10 haben weder zwei aufeinanderfolgende Einsen noch zwei aufeinanderfolgende Nullen?
 d. Wie viele Binärfolgen der Länge 10 haben genau vier aufeinanderfolgende Einsen (sie können darüberhinaus noch weitere Einsen enthalten)?
 e. Wie viele Binärfolgen der Länge 10 haben keine zwei aufeinanderfolgenden Einsen?

nach

<https://math.stackexchange.com/questions/218246/combinatorics-questions-about-binary-strings-of-length-10?rq=1>

14. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, das mindestens zwei Punkte enthält, und sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Man zeige:

Gilt $\sup_{x \in D} |f'(x)| < 1$, so ist f eine Kontraktion bezüglich $|\cdot|$.

15. a. Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{11/10}}$ konvergiert und dass ihr Wert größer als 10 ist.

<http://www.stewartcalculus.com/data/default/uploads/LiesCalcAndCompTold.pdf>

- b. Gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ so, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 42 \mu^k$ gegen 42 konvergiert?

nach

http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=204959&post_id=1498927

16. Sei X eine Menge und sei $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Für alle $x, y, z \in X$ gelte

i. $d(x, y) = 0 \iff x = y$

ii. $d(x, y) = d(y, x)$

iii. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Man zeige, dass d eine Metrik auf X im Sinne der Definition 7.1 ist. (Was ist hier also nur zu zeigen?)

17. Sei $a \in \mathbb{R}$. Man zeige: Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sin(x) & , \quad x \text{ ist rational} \\ 0 & , \quad x \text{ ist irrational} \end{cases}$$

ist genau dann an der Stelle a stetig, wenn a ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

<http://www.mecca.org/~halfacre/MATH/Salt%20and%20Pepper.pdf>

18. a. Man bestimme alle lokalen Extrema der Funktion
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$
- b. Ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sqrt{x^4 + |y|^3}$, im Punkt $(0, 0)$ partiell differenzierbar?

19. a. Man zeige, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$, definiert durch

$$a_n := \begin{cases} 1 & , \quad n = 1 \\ \sqrt{1 + a_{n-1}} & , \quad n > 1 \end{cases} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \quad ,$$

konvergiert und gebe ihren Grenzwert an.

http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=184903&post_id=1363796

Lösung

- b. Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch

$$f_0 := 0, \quad f_1 := 1, \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Man zeige, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = g$ ist, wobei g den Grenzwert von Aufgabenteil a bezeichnet.

Herbert Amann, Joachim Escher, Analysis 1, Birkhäuser Verlag, Basel, 3. Auflage 2006, S. 180.

20. Sei X eine nichtleere Menge, und sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Außerdem sei $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $d(x, y) := |f(x) - f(y)|$ für alle $x, y \in X$. Man stelle eine geeignete Zusatzforderung an f , so dass d eine Metrik auf X ist.

Anleitung: Man versuche, die definierenden Bedingungen einer Metrik nachzurechnen und schließe die dabei zutage tretende Lücke.

21. In einer Quizsendung wird folgendes Spiel gespielt:

1. Ein Auto und zwei Ziegen werden zufällig auf drei Tore verteilt.
2. Zu Beginn des Spiels sind alle Tore verschlossen, so dass das Auto und die Ziegen nicht sichtbar sind.
3. Der Kandidat, dem die Position des Autos völlig unbekannt ist, wählt ein Tor aus, das aber vorerst verschlossen bleibt.
4.
 - a. Hat der Kandidat das Tor mit dem Auto gewählt, so öffnet der Moderator eines der beiden anderen Tore — hinter dem sich immer eine Ziege befindet —, wobei er kein Tor bevorzugt.
 - b. Hat der Kandidat ein Tor mit einer Ziege gewählt, dann muss der Moderator dasjenige der beiden anderen Tore öffnen, hinter dem die zweite Ziege steht.
5. Der Moderator bietet dem Kandidaten an, seine Entscheidung zu überdenken und das andere ungeöffnete Tor zu wählen.
6. Das vom Kandidaten letztlich gewählte Tor wird geöffnet, und er erhält das Auto, falls es sich hinter diesem Tor befindet; und im anderen Fall eine Ziege.

Angenommen, Sie nähmen an dem Spiel teil und zögen außerdem das Auto den Ziegen vor:

- a. Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie im Schritt 3 das Tor wählen, hinter dem das Auto steht?
- b. Würden Sie im Schritt 5 das Tor wechseln oder nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

nach Gerald Teschl, Susanne Teschl: Mathematik für Informatiker, Band 2: Analysis und Statistik, Springer Verlag Berlin/Heidelberg, 2. Auflage 2007, S. 247f. und [Wikipedia: Ziegenproblem](#)

22. Man bestimme die Stellen, an denen die Funktion

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 6 \arctan(\sqrt{x}) - \log(1+x),$$

ein lokales Minimum oder Maximum hat.

Walter Bergweiler, Klausur zu Analysis 1, 13.02.2012

23. a. Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in \mathbb{R} und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in \mathbb{R} . Man beweise oder widerlege: Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.

- b. Man entscheide, ob die durch

$$a_n := 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und}$$

$$b_n := \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{(n+1)^3 - (n-1)^3} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierten Folgen konvergieren, und gebe im Fall der Konvergenz den Grenzwert an.

24. a. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Man zeige, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stetig ist. <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Stetigkeit&oldid=138807997#Beispiele>
- b. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- i. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$
- ii. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$
- iii. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |a_n - a| \leq \varepsilon$
- iv. $\exists c > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |a_n - a| \leq c \cdot \varepsilon$

[Carsten Schütt, Analysis 1, WS 2014/15, Aufgabe 17](#)

25. a. Seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Es gebe eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt: Der Betrag jedes Eintrags der Matrix A^k ist höchstens gleich c . Man zeige, dass dann der Betrag jedes Eigenwerts von A höchstens gleich 1 ist.

- b. Man bestimme alle reellen Zahlen a so, dass alle Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & a \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

reell sind.

<http://www.matheplanet.com/default3.html?call=viewtopic.php?topic=185945>

26. Man berechne die folgenden Grenzwerte:

- a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4x}$ Hinweis: Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

<http://math.stackexchange.com/questions/611069/evaluate-lim-x-to-infty-1-frac2x5x-without-lhopital?rq=1>

- b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{\sin(3x)}$
<http://math.stackexchange.com/questions/565286/evaluate-lim-x-rightarrow-0-frac-sin-6x-sin2x-without-lhopital>
- c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$
 Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1, Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden, 13. Auflage 2011, S. 312.
- d. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$
 Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1, Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden, 13. Auflage 2011, S. 312.
- e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$
 Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1, Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden, 13. Auflage 2011, S. 180.
- f. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=197205&post_id=1448107

27. Sei Ω eine nichtleere Menge, und sei \mathcal{A} eine endliche σ -Algebra über Ω . Man zeige: Es gibt $n \in \mathbb{N}_0$ mit $|\mathcal{A}| = 2^n$.

[Wikipedia: \$\sigma\$ -Algebra](#)

28. 1. Man ersetze die Funktion

$$f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\exp(x) - 1}$$

durch ihr Taylorpolynom erster Ordnung zum Entwicklungspunkt 1 und schätze den dabei entstehenden Fehler ab (mittels Korollar 10.19 oder indem man sich am [hier \(ab S. 20\)](#) (die Seite www.mathematik.net ist mittlerweile historisch) gezeigten Vorgehen orientiert).

2. (rechenaufwändig) Man bestimme genügend viele Terme der Taylorentwicklung um 0 von

$$f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

um damit den Wert $\log(2)$ so genau berechnen zu können, dass die ersten zehn Nachkommastellen stimmen.

3. (rechenaufwändig) Man entwickle die Funktion

$$f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1-x-x^2},$$

um die Stelle 0 nach Taylor bis einschließlich der Terme zehnter Ordnung, nehme die auffällige Folge der Entwicklungskoeffizienten zur Kenntnis und beweise die sich aufdrängende Vermutung.

29. Die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines Jahres in Deutschland an Tuberkulose zu erkranken, beträgt $\frac{53}{1000000}$.

Ein Mann hat den Verdacht, an Tuberkulose erkrankt zu sein und sucht einen Spezialisten auf. Der sagt ihm:

Der Test, den ich verwende, ist fast perfekt. Wenn Sie Tuberkulose haben, dann zeigt der Test das zu 99,99% an. Wenn Sie aber keine Tuberkulose haben, dann schlägt der Test nur in einem von zehntausend Fällen an.

Der Mann lässt sich testen und der Test fällt positiv aus. Der Mann überlegt:

Das bedeutet, dass ich nur mit 34,6% Wahrscheinlichkeit erkrankt bin. Ich sollte noch einen Test machen lassen...

Also geht er zu einem weiteren Spezialisten. Der sagt ihm:

Der Test, den ich verwende, hat eine Spezifität von 98% und eine Sensitivität von 99,5%.

Der Mann lässt sich testen und dieser Test fällt ebenfalls positiv aus.

- Bestätigen Sie die Rechnung nach dem ersten Test.
 - Bezogen auf den zweiten Test, wie wahrscheinlich ist es, dass der Mann tatsächlich krank ist?
 - Vergleichen Sie die in den Teilen a. und b. erhaltenen Ergebnisse. Angenommen, Sie wären beim ersten Test positiv auf Tuberkulose getestet worden: Hätten Sie ebenfalls das Urteil eines zweiten Arztes eingeholt? Wenn ja, warum? Wenn nein, was hätten Sie stattdessen getan?
30. Man zeige mithilfe einer endlichen geometrischen Reihe, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}_{>1}$ gilt:

$$k \mid n \implies 2^k - 1 \mid 2^n - 1 \quad .$$

Lösung

31. Man untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} & , \quad xy \neq 0 \\ 0 & , \quad xy = 0 \end{cases} :$

- Ist f an der Stelle $(0, 0)$ stetig?
- Existiert $J_f(0, 0)$?
- Ist f an der Stelle $(0, 0)$ total differenzierbar?

Gerald Teschl, Susanne Teschl: Mathematik für Informatiker, Band 2: Analysis und Statistik, Springer Verlag Berlin/Heidelberg, 2. Auflage 2007, S. 168

32. Wie wahrscheinlich ist es, dass in einem Hörsaal, in dem 180 Personen sitzen, zwei davon am selben Tag Geburtstag haben (das Geburtsjahr bleibt unberücksichtigt)?
33. Man zeige, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind, berechne die erste Ableitung und vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos(x) + 3x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (3x^3 + 4)^2 \cdot \exp(2x^2 + 1)$
- $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log_{10}(3^x)$
- $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{2^x}$
- $p : \mathbb{R}_{>1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log(x)^e$, wobei e die Eulersche Zahl ist.
- $r : (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log(\sin(\cos(\exp(x^2))))$
- $s : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

Die ersten vier Funktionen: Troels Johannsen, Uni Kiel, Mathematik für Geowissenschaftler 1, WS 2013/14,

Blatt 9, Aufgabe 3.

Die Funktion f : <http://what-if.xkcd.com/73/>Die Funktion r : <http://matheducators.stackexchange.com/a/1438>Die Funktion s : http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/99/calc_errors

34. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (\log \sqrt{k+1} - \log \sqrt{k})$$

<https://math.stackexchange.com/questions/1144706/formula-for-s-n>

b.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

<http://www.math.kit.edu/iag1/lehre/am12007w/media/loesungen9.pdf>

c.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$$

<http://www.math.kit.edu/iag1/lehre/am12007w/media/loesungen9.pdf>

d.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$$

<http://www.math.kit.edu/iag1/lehre/am12007w/media/loesungen9.pdf>

e.
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k + (-1)^k}$$

<http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=204528>

f.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$$

http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=176201&post_id=1298870

35. Man löse die folgenden unbestimmten Integrale.

a.
$$\int \frac{\log(\log(x))}{x \cdot \log(x)} dx$$

b.
$$\int x \cdot (1+x)^7 dx$$

c.
$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2} dt \quad \text{Anleitung: Man integriere die Gleichung}$$

$$\arctan(t) = \int \frac{1}{t^2+1} dt \text{ partiell.}$$

Detlef Müller, Uni, Kiel, Übungen zur Analysis II, Sommersemester 2010, Aufgabe 4.2

d.
$$\int 2 \exp(\sin(2x)) \cdot \cos(2x) dx$$

e.
$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$$

Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1, Vieweg+Teubner Verlag Wiesbaden, 13. Auflage 2011, S. 562.

f.
$$\int \frac{x-1}{x^2+4} dx$$

http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=205139&post_id=1500390

g.
$$\int \cos(u)^2 \sin(u) du$$

http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=205216&post_id=150100936. a. Man zeige, dass die durch $a_n := \frac{n \cdot \cos(n)}{n^2+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge eine Cauchy-Folge ist.b. Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei reelle Cauchy-Folgen. Man zeige, dass die durch $d_n := |a_n - b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge ebenfalls eine Cauchy-Folge ist.http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=188909&post_id=1392912

37. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei reelle Folgen mit den Grenzwerten $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Man zeige:

$$\left(\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : a_n \leq b_n \right) \implies a \leq b \quad .$$

<http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Publikationen/Mmd/MathDerive.pdf> (abgerufen am 25.09.2012)

38. Man zeige:

- a. Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad .$$

Herbert Amann, Joachim Escher, Analysis 1, Birkhäuser Verlag, Basel, 3. Auflage 2006, S. 108.

- b. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad .$$

<http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=187474>

Lösung

- c. Für nichtleere Teilmengen A, B von \mathbb{R} gelten

$$\begin{aligned} \sup(A+B) &= \sup(A) + \sup(B) \quad , \\ \inf(A+B) &= \inf(A) + \inf(B) \quad , \end{aligned}$$

wenn $A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ gesetzt wird.

Herbert Amann, Joachim Escher, Analysis 1, Birkhäuser Verlag, Basel, 3. Auflage 2006, S. 108.

39. In einem quaderförmigen Kuchen sind 50 Rosinen enthalten.

- Man gebe ein Verfahren an, den Kuchen mit genau drei geraden Schnitten in acht gleichgroße Teile zu zerlegen. Hinweis: Man wende Wissen aus der Vorlesung „Digitale Systeme“ an.
- Der Kuchen wird in 16 gleichgroße Stücke geteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in genau einem Stück genau drei Rosinen zu finden?
- In wie viele gleichgroße Stücke darf man den Kuchen höchstens schneiden, um mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit ein Stück zu finden, das mindestens eine Rosine enthält?

nach

http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=183083&post_id=1350608

40. Man bestimme **alle** Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen.

a. $2 \cos(x) + \sin(x)^2 = \frac{7}{4}$

Gerald Teschl/Susanne Teschl, Mathematik für Informatiker, Band 2, Springer Verlag, 2. Auflage 2007, S. 43

b. $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$

c. $\sin(2x) = \frac{1}{\tan(x)}$

41. Welche der folgenden Abbildungen sind Metriken?

a. $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \exp(|x-y|)$

Barbara Langfeld, Klausur zu Mathematik für Informatikstudierende C, 01.04.2014 (Version A)

$$\text{b. } d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} |x - y| & , \quad \exists \lambda > 0 : x = \lambda y \\ |x| + |y| & \text{sonst} \end{cases}$$

Herbert Amann, Joachim Escher, Analysis 1, Birkhäuser Verlag, Basel, 3. Auflage 2006, S. 151.

$$\text{c. } d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto |\arctan(x) - \arctan(y)|$$

42. Man gebe eine divergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen so an, dass für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt: Die Folge $(a_{k \cdot n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.

Hinweis: Eine Folge, die nur die Werte 0 und 1 annimmt, vereinfacht die Sache erheblich.

http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=189247&post_id=1395316

43. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Man leite eine Rekursionsformel für das Integral

$$I_n := \int x^n \cdot e^x \, dx$$

her.

Herbert Amann, Joachim Escher, Analysis 2, Birkhäuser Verlag, Basel, 2. Auflage 2006, S. 50.

44. Man zeige

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan(y)) \, dy$$

Herbert Amann, Joachim Escher, Analysis 2, Birkhäuser Verlag, Basel, 2. Auflage 2006, S. 50.