Warum Semantik?

Gegenüberstellung

Syntax

$\leftrightarrow$

Semantik

Historische Bemerkungen zur Semantik

Ordnungsrelation

Halbordnung

Geordnete Menge

totale/lineare Ordnung

Wir studieren die Semantik von Programm(iersprach)en hauptsächlich aus drei Gründen:

- Um Programmtexte und -spezifikationen eindeutig interpretieren zu können
- Darauf aufbauend: um Interpreter oder Compiler implementieren zu können
- Um (Korrektheits-) Beweise formal durchführen zu können

Terme, Formeln, Programmtexte haben „an sich" keine festgelegte Bedeutung.

Zum Beispiel ist das Pascal-Programm

```
program P(input, output);
var
  x, y : real;
begin
  y := x / 0
end.
```

syntaktisch korrekt, und es braucht eine Semantik, die zum Beispiel dem Operator / die Bedeutung der Division erteilt, um sagen zu können, dass das Programm semantisch sinnlos ist.

Eine solche wird ihnen erst durch eine *Semantikdefinition* zuteil. Diese arbeitet in der Sprache der *Mengen*, der *Relationen*, der *Funktionen*.

(TODO: Dazu ein Beispiel aus der Logik: $\dot{\bigwedge}\ (x_1, x_2)$)

Axiomatische Semantik

ca. 1920–1930	Logik	
1957	FLOYD:	Schleifeninvariante [vgl. v. Neumann 1940er]
1969	HOARE:	Hoare-Kalkül
1976	DIJKSTRA:	wp-Kalkül

Denotationelle Semantik

1969	SCOTT, STRACHEY, DE BAKKER	
1976	EGLI, PLOTHIN, ASHCROFT	Nichtdeterminismus

Operationale Semantik

1968	Lucas	
1981	Plothin, Kahn	Ersetzungssemantik

Sei M eine Menge.
Ist M nichtleer und ist $\leqslant$ eine Relation auf M, die für alle a, b, $c \in M$ die *Ordnungsaxiome*

$$\begin{array}{rcll} & a \leqslant a & & \text{(Reflexivität)} \\ a \leqslant b \wedge b \leqslant c & \Longrightarrow & a \leqslant c & \text{(Transitivität)} \\ a \leqslant b \wedge b \leqslant a & \Longrightarrow & a = b & \text{(Antisymmetrie)} \end{array}$$

erfüllt, so heißt $\leqslant$ eine *Ordnung auf* M und das Paar $(M, \leqslant)$ eine *geordnete Menge*.
Gilt für alle a, $b \in M$ zusätzlich

$$a \leqslant b \vee b \leqslant c \qquad \text{(Totalität, Linearität)} \quad ,$$

so liegt eine *totale/lineare Ordnung* bzw. eine *total/linear geordnete Menge* vor. Um die Ordnungen von den totalen Ordnungen abzugrenzen, nennt man erstere gelegentlich auch *Halbordnungen*.

Quasiordnung

Präordnung

Striktordnung

strikter Anteil einer Ordnung

Teilordnung

obere, untere Schranke

Majorante, Minorante

maximales, minimales Element

größtes, kleinstes Element

Sei M eine nichtleere Menge.
Eine transitive und irreflexive Relation auf M heißt eine *Striktordnung* auf M. Sie erfüllt also die folgenden Axiome für alle a, b, $c \in M$:

$$\begin{array}{ll} a \leqslant b \ \wedge \ b \leqslant c \quad \Longrightarrow \quad a \leqslant c & \text{(Transitivität)} \\ \neg(a \leqslant a) & \text{(Irreflexivität)} \end{array}$$

Ist $(M, \leqslant)$ eine geordnete Menge, so definieren wir den *strikten Anteil* $<$ *von* $\leqslant$ durch

$$\forall\, a, b \in M \quad a < b :\Longleftrightarrow \quad a \leqslant b \ \wedge \ a \neq b \quad .$$

Sei M eine nichtleere Menge.
Eine reflexive und transitive Relation auf M heißt eine *Quasiordnung* oder *Präordnung* auf M. Sie erfüllt also die folgenden Axiome für alle a, b, $c \in M$:

$$\begin{array}{ll} a \leqslant a & \text{(Reflexivität)} \\ a \leqslant b \ \wedge \ b \leqslant c \quad \Longrightarrow \quad a \leqslant c & \text{(Transitivität)} \end{array}$$

Sei $(M, \leqslant)$ eine geordnete Menge, sei N eine Teilmenge von M, und sei $a \in M$.

Dann heißt das Element a	falls
obere Schranke, Majorante von N	für alle $b \in N$ gilt $b \leqslant a$
untere Schranke, Minorante von N	für alle $b \in N$ gilt $a \leqslant b$
maximales Element von N	$a \in N$, und es gibt kein $b \in N$ mit $a < b$
minimales Element von N	$a \in N$, und es gibt kein $b \in N$ mit $b < a$
größtes Element von N	$a \in N$, und für alle $b \in N$ gilt $b \leqslant a$
kleinstes Element von N	$a \in N$, und für alle $b \in N$ gilt $a \leqslant b$

Schranken von N müssen nicht zu N gehören – im Gegensatz zu maximalen, minimalen, größten, kleinsten Elementen.
Jede in N liegende obere Schranke von N ist ein größtes Element von N.
Jede in N liegende untere Schranke von N ist ein kleinstes Element von N.

Sei $(M, \leqslant)$ eine geordnete Menge, und sei N eine nichtleere Teilmenge von M.

Dann heißt das Paar $\left(N, \leqslant\big|_{N \times N}\right)$ eine *Teilordnung* von $(M, \leqslant)$, falls $\left(N, \leqslant\big|_{N \times N}\right)$ selbst eine geordnete Menge ist.

Dabei ist $\leqslant\big|_{N \times N}$ natürlich gleich $\leqslant \cap\, N \times N$.

Unter Missbrauch der Notation schreiben wir auch
$\left(N, \leqslant\big|_{N}\right)$ für $\left(N, \leqslant\big|_{N \times N}\right)$.

oberer Konus $\mathsf{Ma}(X)$

unterer Konus $\mathsf{Mi}(X)$

Infimum, größte untere Schranke

Supremum, kleinste obere Schranke

TODO: Existenz und Eindeutigkeit von Schranken, maximalen/minimalen Elementen, größten/kleinsten Elementen, Suprema, Infima

vergleichbare, unvergleichbare Elemente

mengentheoretische Kette

Antikette

Sei $(M, \leqslant)$ eine geordnete Menge, sei N eine Teilmenge von M, und sei $a \in M$. Dann heißt a

> *Infimum* oder *größte untere Schranke* von N, falls a das größte Element von $\mathsf{Mi}(N)$ ist;
>
> *Supremum* oder *kleinste obere Schranke* von N, falls a das kleinste Element von $\mathsf{Ma}(N)$ ist.

Wir bezeichnen das Supremum von N mit $\bigsqcup N$ und das Infimum von N mit $\bigsqcap N$.

Sei $(M, \leqslant)$ eine geordnete Menge. Wir definieren zwei Abbildungen $\mathsf{Ma}, \mathsf{Mi} \colon \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(M)$, indem wir für alle Teilmengen X von M festlegen

$$\mathsf{Ma}(X) := \{a \in M \;:\; a \text{ ist obere Schranke von } X\}$$

den *oberen Konus* von X und

$$\mathsf{Mi}(X) := \{a \in M \;:\; a \text{ ist untere Schranke von } X\}$$

den *unteren Konus* von X.

Sei $(M, \leqslant)$ eine geordnete Menge.

> Zwei Elemente $a, b \in M$ mit $a \leqslant b$ oder $b \leqslant a$ heißen *vergleichbar*.
>
> Zwei Elemente $a, b \in M$ mit $a \nleqslant b$ und $b \nleqslant a$ heißen *unvergleichbar*.
>
> Eine nichtleere Teilmenge K von M heißt eine *mengentheoretische Kette* in M, falls für alle $a, b \in K$ eine der Beziehungen $a \leqslant b$ oder $b \leqslant a$ gilt.
>
> Eine nichtleere Teilmenge A von M heißt eine *Antikette*, falls für alle $a, b \in A$ gilt: Aus $a \leqslant b$ folgt $a = b$.

Sei $(M, \leqslant)$ eine geordnete Menge, sei N eine Teilmenge von M, und sei $a \in M$.

> $\bigsqcup N$ ist eindeutig bestimmt, sofern existent.
>
> $\bigsqcap N$ ist eindeutig bestimmt, sofern existent.
>
> Größte Elemente von N sind eindeutig bestimmt, sofern existent.
>
> Kleinste Elemente von N sind eindeutig bestimmt, sofern existent.
>
> Maximale Elemente von N sind *nicht* eindeutig bestimmt, sofern existent.
>
> Minimale Elemente von N sind *nicht* eindeutig bestimmt, sofern existent.

Beweis: Hier fehlt noch was!

Verband

Ein Verband ist eine algebraische Struktur

$$(V, \sqcup, \sqcap) \quad ,$$

wobei

V eine nichtleere Menge,
$\sqcup : V \times V \to V$ eine Abbildung, *Vereinigung* genannt,
$\sqcap : V \times V \to V$ eine Abbildung, *Durchschnitt* genannt

so sind, dass für alle a, b, $c \in V$ die folgenden *Verbandsaxiome* gelten:

$$\begin{aligned}
a \sqcup b &= b \sqcup a && \text{(Kommutativität von } \sqcup\text{)}\\
a \sqcap b &= b \sqcap a && \text{(Kommutativität von } \sqcap\text{)}\\
(a \sqcup b) \sqcup c &= a \sqcup (b \sqcup c) && \text{(Assoziativität von } \sqcup\text{)}\\
(a \sqcap b) \sqcap c &= a \sqcap (b \sqcap c) && \text{(Assoziativität von } \sqcap\text{)}\\
(a \sqcup b) \sqcap a &= a && \text{(Absorption 1)}\\
(a \sqcap b) \sqcup a &= a && \text{(Absorption 2)}
\end{aligned}$$