Übungen zur Mathematischen Logik – Blatt 3 19. November 2015

Claudia Klingenberg, Thure Dührsen

Aufgabe 1

Um $(9\times 9)$-Sudoku zu formalisieren, bedienen wir uns der Aussagevariablen $X_{i,j}^k$ für alle $i,\ j,\ k \in \{1,\dots,9\}$, wobei für alle $i,\ j,\ k \in \{1,\dots,9\}$ gelte: $X_{i,j}^k$ ist genau dann gleich 1, wenn im Feld $(i,\ j)$ die Ziffer $k$ steht. Die $(3\times 3)$-Teilquadrate bilden wir bijektiv in Lesereihenfolge auf die Menge $\{(I,J) \mid I,\ J \in \{1,2,3\}\}$ ab.

1. Um auszudrücken, dass in jedem Feld mindestens eine Ziffer stehen muss, benutzen wir die Formel

$$\varphi_1 := \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{j=1}^{9} \bigvee_{k=1}^{9} X_{i,j}^k \quad .$$

2. Dass in keinem Feld mehr als eine Ziffer steht, wird durch

$$\varphi_2 := \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigwedge_{l=1}^{9} \left( X_{i,j}^k \wedge X_{i,j}^l \rightarrow k = l \right)$$

sichergestellt.

3. Durch die Formel

$$\varphi_3 := \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigvee_{j=1}^{9} X_{i,j}^k$$

stellen wir sicher, dass jede Ziffer in jeder Zeile mindestens einmal vorkommt.

4. Die Formel

$$\varphi_4 := \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{j'=1}^{9} \left( X_{i,j}^k \wedge X_{i,j'}^k \rightarrow j = j' \right)$$

verbietet, dass in einer Zeile mehr als eine Ziffer steht.

5. Die Formel

$$\varphi_5 := \bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigvee_{i=1}^{9} X_{i,j}^k$$

sorgt dafür, dass jede Ziffer in jeder Spalte mindestens einmal auftritt.

6. Durch

$$\varphi_6 := \bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{i'=1}^{9} \left( X_{i,j}^k \wedge X_{i',j}^k \rightarrow i = i' \right)$$

kann jede Ziffer in jeder Spalte höchstens einmal auftreten.

7. Jede Ziffer muss in jedem $(3\times 3)$-Teilquadrat mindestens einmal vorkommen; dies gewährleistet die Formel

$$\varphi_7 := \bigwedge_{I=1}^{3} \bigwedge_{J=1}^{3} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigvee_{i=3I-2}^{3I} \bigvee_{j=3J-2}^{3J} X_{i,j}^k \quad .$$

8. Schließlich erreichen wir mit der Formel

$$\varphi_8 := \bigwedge_{I=1}^{3} \bigwedge_{J=1}^{3} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigwedge_{i=3I-2}^{3I} \bigwedge_{i'=3I-2}^{3I} \bigwedge_{j=3J-2}^{3J} \bigwedge_{j'=3J-2}^{3J} \left(X_{i,j}^k \wedge X_{i',j'}^k \rightarrow i=i' \wedge j=j'\right) \quad ,$$

dass jede Ziffer in jedem $(3\times 3)$-Teilquadrat höchstens einmal auftritt.

Die Formel $\alpha$, die besagt, dass in jedem Matrixeintrag genau eine Ziffer steht, ist dann durch

$$\alpha := \varphi_1 \wedge \varphi_2$$

gegeben, und die Formel $\beta$, die besagt, dass in jeder Zeile, jeder Spalte und jedem $(3\times 3)$-Teilquadrat jede Ziffer aus $\{1,\ldots,9\}$ genau einmal vorkommt, ist

$$\beta := \bigwedge_{k=3}^{8} \varphi_k \quad .$$

Eine $(9\times 9)$-Matrix über $\{1,\ldots,9\} \cup \{?\}$ ist also genau dann ein gültiges Sudoku-Problem, wenn die Formel

$$\gamma := \bigwedge_{k=1}^{4} \varphi_{2k}$$

erfüllbar ist, denn genau dann lässt sie sich zu einer Matrix, in der keine Fragezeichen stehen, vervollständigen. Gilt zudem die Formel

$$\varphi := \alpha \wedge \beta \quad ,$$

so wurde das Problem korrekt gelöst (wir vernachlässigen hier die Frage nach eindeutiger Lösbarkeit).

Übungen zur Mathematischen Logik – Blatt 3 19. November 2015
Claudia Klingenberg, Thure Dührsen

Aufgabe 2

**Voraussetzung** Es seien $\alpha, \beta \in \mathscr{F}_{AL}$.

**Behauptung** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\alpha \iff \beta$

(ii) $\alpha \longleftrightarrow \beta$ ist Tautologie

(iii) $\alpha \implies \beta$ und $\beta \implies \alpha$

**Beweis** Wir zeigen (ii) $\implies$ (i).

Es gelte also: $\alpha \longleftrightarrow \beta$ ist Tautologie. Dann gilt also für jede WWB $w$: $w^*(\alpha \longleftrightarrow \beta) = 1$.

Sei $w$ eine WWB. Es ist $w^*(\alpha) = w^*(\beta)$ zu zeigen.

Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
w^*(\alpha \longleftrightarrow \beta) &= w^*((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)) \\
&= \dot{\wedge}\,[w^*(\alpha \rightarrow \beta), w^*(\beta \rightarrow \alpha)] \\
&= \dot{\wedge}\,[w^*(\neg \alpha \vee \beta), w^*(\neg \beta \vee \alpha)] \\
&= \dot{\wedge}\left[\dot{\vee}\left(w^*(\neg \alpha), w^*(\beta)\right), \dot{\vee}\left(w^*(\neg \beta), w^*(\alpha)\right)\right] \\
&= \dot{\wedge}\left[\dot{\vee}\left(\dot{\neg}\,(w^*(\alpha)), w^*(\beta)\right), \dot{\vee}\left(\dot{\neg}\,(w^*(\beta)), w^*(\alpha)\right)\right] \quad .
\end{aligned}$$

1. Fall: $w^*(\alpha) = 1$ und $w^*(\beta) = 1$. Dann gilt $w^*(\alpha) = w^*(\beta)$.

2. Fall: $w^*(\alpha) = 1$ und $w^*(\beta) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
w^*(\alpha \longleftrightarrow \beta) &= \dot{\wedge}\left[\dot{\vee}\left(\dot{\neg}\,(w^*(\alpha)), w^*(\beta)\right), \dot{\vee}\left(\dot{\neg}\,(w^*(\beta)), w^*(\alpha)\right)\right] \\
&= \dot{\wedge}\left[\dot{\vee}\left(\dot{\neg}\,(1), 0\right), \dot{\vee}\left(\dot{\neg}\,(0), 1\right)\right] \\
&= \dot{\wedge}\left[\dot{\vee}\left(0, 0\right), \dot{\vee}\left(1, 1\right)\right] \\
&= \dot{\wedge}\left[0, 1\right] \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Also ist die Prämisse $w^*(\alpha \longleftrightarrow \beta) = 1$ nicht erfüllt und damit tritt dieser Fall nicht ein.

3. Fall: $w^*(\alpha) = 0$ und $w^*(\beta) = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
w^*(\alpha \longleftrightarrow \beta) &= \dot{\wedge}\left[\dot{\vee}\left(\dot{\neg}(w^*(\alpha)), w^*(\beta)\right), \dot{\vee}\left(\dot{\neg}(w^*(\beta)), w^*(\alpha)\right)\right] \\
&= \dot{\wedge}\left[\dot{\vee}\left(\dot{\neg}(0), 1\right), \dot{\vee}\left(\dot{\neg}(1), 0\right)\right] \\
&= \dot{\wedge}\left[\dot{\vee}\left(1, 1\right), \dot{\vee}\left(0, 0\right)\right] \\
&= \dot{\wedge}\left[1, 0\right] \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Also ist die Prämisse $w^*(\alpha \longleftrightarrow \beta) = 1$ nicht erfüllt und damit tritt dieser Fall nicht ein.

4. Fall: $w^*(\alpha) = 0$ und $w^*(\beta) = 0$. Dann gilt $w^*(\alpha) = w^*(\beta)$.

Also gilt (ii) $\implies$ (i).

Wir zeigen (iii) $\implies$ (ii).

Gelte iii, d. h. $\alpha \implies \beta$ und $\beta \implies \alpha$. Dann gilt für jede WWB $w$: Falls $w \models \alpha$, so $w \models \beta$, und falls $w \models \beta$, so $w \models \alpha$.

Es ist zu zeigen, dass für jede WWB $w$ gilt: $w \models (\alpha \longleftrightarrow \beta)$.

Sei $w$ eine WWB.

Zu zeigen: (Falls $w \models \alpha$, so $w \models \beta$) und (falls $w \models \beta$, so $w \models \alpha$)
bewirkt
$w \models (\alpha \longleftrightarrow \beta)$.

Gelte also (Falls $w \models \alpha$, so $w \models \beta$) und (falls $w \models \beta$, so $w \models \alpha$), d. h. es gelte:
$(*)$ Aus $w^*(\alpha) = 1$ folgt $w^*(\beta) = 1$ und aus $w^*(\beta) = 1$ folgt $w^*(\alpha) = 1$.

Es ist $w \models (\alpha \longleftrightarrow \beta)$. Dazu zeigen wir $w^*(\alpha \longleftrightarrow \beta) = 1$, d. h.
$\dot{\wedge}\left[\dot{\vee}\left(\dot{\neg}(w^*(\alpha)), w^*(\beta)\right), \dot{\vee}\left(\dot{\neg}(w^*(\beta)), w^*(\alpha)\right)\right] = 1$.
Gelte zunächst der erste Teilsatz aus $(*)$, d. h. es gelte: Aus $w^*(\alpha) = 1$ folgt $w^*(\beta) = 1$.

Gelte also $w^*(\alpha) = 1$. Dann folgt $w^*(\beta) = 1$ und damit

$$
\begin{aligned}
w^*(\alpha \longleftrightarrow \beta) &= \dot{\wedge}\Big[\dot{\vee}\big(\dot{\neg}(w^*(\alpha)), w^*(\beta)\big), \ \dot{\vee}\big(\dot{\neg}(w^*(\beta)), w^*(\alpha)\big)\Big] \\
&= \dot{\wedge}\Big[\dot{\vee}\big(\dot{\neg}(1), 1\big), \ \dot{\vee}\big(\dot{\neg}(1), 1\big)\Big] \\
&= \dot{\wedge}\Big[\dot{\vee}\big(0, 1\big), \ \dot{\vee}\big(0, 1\big)\Big] \\
&= \dot{\wedge}\Big[1, 1\Big] \\
&= 1 \quad .
\end{aligned}
$$

Gelte nun der zweite Teilsatz von $(*)$, d. h. es gelte: Aus $w^*(\beta) = 1$ folgt $w^*(\alpha) = 1$. Dann folgt wie eben $w^*(\alpha \longleftrightarrow \beta) = 1$, d.h. wir haben gezeigt:
(Falls $w \models \alpha$, so $w \models \beta$) und (falls $w \models \beta$, so $w \models \alpha$)
bewirkt
$w \models (\alpha \longleftrightarrow \beta)$.

Also gilt (iii) $\Longrightarrow$ (ii).

Wir zeigen (i) $\Longrightarrow$ (iii).

Gelte i, d. h. gelte $\alpha \Longleftrightarrow \beta$. Dann gilt für jede WWB $w$: $w^*(\alpha) = w^*(\beta)$. Es ist $(\alpha \Longrightarrow \beta)$ und $(\beta \Longrightarrow \alpha)$ zu zeigen, d. h. es ist zu zeigen, dass für jede WWB $w$ gilt: Falls $w \models \alpha$, so $w \models \beta$, und falls $w \models \beta$, so $w \models \alpha$.

Sei $w$ eine WWB. Dann gilt $\quad (*) \quad w^*(\alpha) = w^*(\beta)$, und es ist zu zeigen: Falls $w \models \alpha$, so $w \models \beta$, und falls $w \models \beta$, so $w \models \alpha$.

Gelte zunächst $w \models \alpha$. Dann gilt $w^*(\alpha) = 1$, und wegen $(*)$ folgt $w^*(\beta) = 1$, also $w \models \beta$.

Gelte nun $w \models \beta$. Dann gilt $w^*(\beta) = 1$, und wegen $(*)$ folgt $w^*(\alpha) = 1$, also $w \models \alpha$.

Also gilt (i) $\Longrightarrow$ (iii).

Damit gilt die Behauptung.

Übungen zur Mathematischen Logik – Blatt 3 19. November 2015

Claudia Klingenberg, Thure Dührsen

Aufgabe 4

**Voraussetzung** Es sei $n \in \mathbb{N}$, und es sei $\alpha \in \mathscr{P}(n)$ eine Formel, die nur die Junktoren $\longleftrightarrow$ und $\neg$ enthält.

**Behauptung** Es gilt genau eine der folgenden Aussagen:

(a) $\alpha$ ist Tautologie.

(b) $\alpha$ ist Widerspruch.

(c) Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Teilfolge $i_0 \dots i_m$ von $0 \dots n$ so, dass

$$\begin{aligned} \alpha &\iff A_{i_0} \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow A_{i_m} \qquad \text{oder} \\ \alpha &\iff \neg \left(A_{i_0} \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow A_{i_m}\right) \end{aligned}$$

zutrifft.

**Beweis** per Induktion nach $n$ mit trivialem Induktionsanfang $n = 0$: Es kann nur $\alpha = \top$ oder $\alpha = \bot$ gelten, also ist $\alpha$ entweder Tautologie oder Widerspruch.

IV: Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, und für alle Formeln aus $\mathscr{P}(n-1)$ gelte die Behauptung.

IS: Sei $\alpha \in \mathscr{P}(n)$, und es gelte: $\alpha$ enthält nur die Junktoren $\longleftrightarrow$ und $\neg$. Dann gibt es $\beta, \gamma \in \mathscr{P}(n-1)$ derart, dass $\beta$ und $\gamma$ nur die Junktoren $\longleftrightarrow$ und $\neg$ enthalten und genau einer der folgenden elf Fälle eintritt:

1. $\alpha = \top$. Dann ist $\alpha$ Tautologie.
2. $\alpha = \bot$. Dann ist $\alpha$ Widerspruch.
3. $\alpha = A_n$. Dann ist $\alpha$ weder Tautologie noch Widerspruch. Setzen wir $m := 0$ sowie $i_0 := n$, so haben wir lediglich

$$\alpha \iff A_{i_0} \quad \text{oder} \quad \alpha \iff \neg A_{i_0} \qquad (*)$$

zu zeigen. Dies gilt aber, weil die Gleichheit $\alpha = A_n$ die semantische Äquivalenz $\alpha \iff A_{i_0}$ nach sich zieht, also der erste Teilsatz von $(*)$ gilt.

4. $\alpha = \neg A_n$. Dann ist $\alpha$ weder Tautologie noch Widerspruch. Setzen wir $m := 0$ sowie $i_0 := i$, so haben wir lediglich

$$\alpha \iff A_{i_0} \quad \text{oder} \quad \alpha \iff \neg A_{i_0} \qquad (**)$$

zu zeigen. Dies gilt aber, weil die Gleichheit $\alpha = \neg A_n$ die semantische Äquivalenz $\alpha \iff \neg A_{i_0}$ nach sich zieht, also der zweite Teilsatz von (∗∗) gilt.

5. $\alpha = A_i \longleftrightarrow A_j$ für passende $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Im Fall $i = j$ ist dann $\alpha$ eine Tautologie; im Fall $i \neq j$ setze man $m := 1$, $i_0 := \min\{i, j\}$, $i_1 := \max\{i, j\}$ und erhalte so
$$\alpha \iff A_{i_0} \longleftrightarrow A_{i_1} \quad .$$
6. $\alpha = (\beta \longleftrightarrow A_n)$. Dann ist $\alpha$ im Fall $\beta \iff A_n$ eine Tautologie und im anderen Fall ein Widerspruch.
7. $\alpha = \neg(\beta \longleftrightarrow A_n)$. Dann ist $\alpha$ im Fall $\beta \iff A_n$ ein Widerspruch und im anderen Fall eine Tautologie.
8. $\alpha = (\beta \longleftrightarrow \gamma)$ oder $\alpha = \neg(\beta \longleftrightarrow \gamma)$. Dann ist auch $\alpha \in P(n-1)$, also gilt die Behauptung für $\alpha$.
9. $\alpha = ((\beta \longleftrightarrow \beta) \longleftrightarrow A_n)$. Dann ist nach Aufgabe 3(c) $\alpha$ semantisch äquivalent zu $A_n$, und für $A_n$ gilt die Behauptung, siehe Fall 3.
10. $\alpha = (\neg\beta \longleftrightarrow A_n)$. Dann ist nach Aufgabe 3(d) $\alpha$ semantisch äquivalent zu $\neg(\beta \longleftrightarrow A_n)$, und für letztere Formel gilt die Behauptung, siehe Fall 7.
11. $\alpha = (\beta \longleftrightarrow \neg A_n)$. Dann ist nach Aufgabe 3(b) $\alpha$ semantisch äquivalent zu $(\neg A_n \longleftrightarrow \beta)$, welche nach Aufgabe 3(d) zu $\neg(A_n \longleftrightarrow \beta)$ semantisch äquivalent ist, welche nach Aufgabe 3(b) wiederum zu $\neg(\beta \longleftrightarrow A_n)$ semantisch äquivalent ist. Da die Behauptung für die Formel $\neg(\beta \longleftrightarrow A_n)$ gilt (siehe Fall 7), gilt sie auch für $\alpha$.