Prof. Dr. H. Weiß
Dr. M. Freibert Sommersemester 2016

Übungen zu „Kurven und Flächen“

Blatt 2

Abgabe: Bis Mo., 02.05.2016, 12:00 im Schreinfach der Vorlesung „Kurven und Flächen“.

1. Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine, nicht notwendigerweise der Bogenlänge nach parametrisierte, reguläre $\mathcal{C}^2$-Kurve. Erinnern Sie sich daran, dass dann nach Vorlesung die Krümmung $\kappa_\gamma(t)$ von γ zum Zeitpunkt $t \in [a,b]$ gerade definiert ist als die Krümmung $\kappa_{\tilde{\gamma}}(\psi(t))$ der nach Bogenlänge umparametrisierten Kurve $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi^{-1} : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^2$ zum Zeitpunk $\psi(t)$, wobei $\psi(t) := \int_a^t \|\gamma'(s)\|\, ds$ für $t \in [a,b]$ ist.

   (a) Zeigen Sie, dass für $t \in [a,b]$ gerade
   $$\kappa_\gamma(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \det \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) & \gamma_1''(t) \\ \gamma_2'(t) & \gamma_2''(t) \end{pmatrix}$$
   gilt.

   (b) Berechnen Sie für positive reelle Zahlen λ, μ die Krümmung an jedem Punkt der Ellipse $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{1}{\lambda^2}{x_1}^2 + \frac{1}{\mu^2}{x_2}^2 = 1\}$. (Finden Sie also insbesondere zunächst eine Kurve um die obige Menge zu parametrisieren.)

2. Es sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathcal{C}^2$-Kurve und $t \in I$ eine Stelle mit $\kappa(t) \neq 0$. Der *Krümmungskreis* oder *Schmiegekreis* an γ in t ist der Kreis mit Mittelpunkt $\gamma(t) + \kappa(t)^{-1} \cdot n(t)$ und Radius $|\kappa(t)|^{-1}$.

   Der Mittelpunkt des Kümmungskreises heißt *Krümmungsmittelpunkt*.

   a) Zeigen Sie, dass der Krümmungskreis an γ in t bei Parametrisierung nach Bogenlänge (und bei geeigneter Wahl der Orientierung des Kreises) die Kurve γ im Punkt $\gamma(t)$ von $z$weiter Ordung berührt, d.h. im Punkt $\gamma(t)$ stimmen jeweils die ersten und zweiten Ableitungen der Kurve γ und des Krümmungskreises überein.

   b) Die Menge der Kümmungsmittelpunkte einer Kurve γ nennt man die *Evolute von* γ. Finden Sie eine Parametrisierung der Evolute E der Parabel
   $$\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, {x_1}^2 = x_2\}.$$
   Zeigen Sie weiter $E = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2(2x_2 - 1)^3 = 27x_1^2\}$.
   Hinweis. Benutzen Sie die Krümmungsformel aus der ersten Aufgabe.

3. Skizzieren Sie die Spuren folgender Kurven und bestimmen Sie deren Windungszahlen:

   i) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := (\cos t, \sin 2t)$.

   ii) $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{\gamma}(t) := \left(\frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{2}{3}\cos^3(t) + \cos(t), -\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{2}{3}\sin^3(t)\right)$.
   (Hinweis: Benutzen Sie die Identitäten $2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$ und $2\cos^2(t) - 1 = \cos(2t)$ von links nach rechts um $\tilde{\gamma}'(t)$ geeignet zu vereinfachen.)