Prof. Dr. H. Weiß
Dr. M. Freibert

Sommersemester 2016

Übungen zu „Kurven und Flächen“

Tutorium 1

1. Zeigen Sie die Polarisierungsidentität
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Folgern Sie: Ist $\varphi(0) = 0$ für eine Isometrie $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so gilt bereits $\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion. Betrachten Sie die Kurve
$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, f(t)).$$
Zeigen Sie:
   (a) γ ist eine reguläre $\mathcal{C}^1$-Kurve.
   (b) $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$.
   (c) γ ist nach Bogenlänge parametrisiert $\Leftrightarrow$ f konstant.

3. Betrachten Sie die $\mathcal{C}^\infty$-Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t^2, t^3)$. Skizzieren Sie die Spur der Kurve im γ und bestimmen Sie die singulären Punkte von γ, d.h. die Parameterwerte $t \in \mathbb{R}$ mit $\gamma'(t) = 0$.