Prof. Dr. H. Weiß
Dr. M. Freibert

Sommersemester 2016

Übungen zu „Kurven und Flächen“

Blatt 1

Abgabe: Bis Mo., 25.04.2016, 12:00 im Schreinfach der Vorlesung „Kurven und Flächen“.

1. Eine Kreisscheibe vom Radius 1 in der xy-Ebene rolle gleichförmig auf der x-Achse entlang. Die dabei durch einen Punkt auf ihrem Umfang beschriebene Kurve heißt *Zykloide*.
   (a) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass das Bild der parametrisierten Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t - \sin t,\, 1 - \cos t)^T$ eine Zykloide ist. Bestimmen Sie die singulären Punkte $t_0 \in \mathbb{R}$ von c (d. h. mit $\dot{c}(t_0) = 0$) und skizzieren Sie $c(\mathbb{R})$.
   (b) Berechnen Sie die Länge der Zykloide, die einer Rotation der Kreisscheibe entspricht. (Hinweis: $\cos t = 1 - 2\sin^2(\frac{t}{2})$.)

2. Sei $\phi : (\mathbb{R}^n, d_{eukl}) \to (\mathbb{R}^n, d_{eukl})$ eine Bewegung/Isometrie des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass ϕ von der Form
$$\phi(x) = Ax + b$$
für $A \in \mathrm{O}(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ ist. (Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) := \phi(x) - \phi(0)$ und zeigen Sie zunächst, dass diese linear ist. Folgern Sie daraus nun das gewünschte Ergebnis.)

3. (a) Ist $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve in $\mathbb{R}^n$, so haben γ und $\phi \circ \gamma$ dieselbe Länge.
   (b) Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Kurve mit Lipschitz-Konstante $L \in (0, \infty)$. Zeigen Sie die Abschätzung $\mathsf{L}(\gamma) \leq L \cdot (b - a)$ und damit die Rektifizierbarkeit von γ.
   (c) Es sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare Kurve und $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ eine Parametertransformation. Zeigen Sie, dass dann auch $\gamma \circ \varphi$ rektifizierbar ist mit $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$.

4.* (Bonusaufgabe. Die Koch-Kurve: Eine nicht rektifizierbare Kurve) Betrachten Sie in der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{eukl}})$ (identifiziert mit den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$) die Folge $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Kurven $\gamma_n : [0, 1] \to \mathbb{C}$ mit:
$$\gamma_0(t) := t \in \mathbb{C},$$
$$\gamma_{n+1}(t) := \begin{cases} \frac{1}{3}\gamma_n(4t) & : t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{1}{3}\sigma\gamma_n(4t-1) + \frac{1}{3} & : t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{3}\bar{\sigma}\gamma_n(4t-2) + \frac{1+\sigma}{3} & : t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ \frac{1}{3}\gamma_n(4t-3) + \frac{2}{3} & : t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases} \quad , \quad \text{für } \sigma := e^{i\pi/3}, \ \forall n > 0.$$
   (a) Zeigen Sie die Existenz eines gleichmäßigen Limes κ der Folge $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die sogenannte *Koch-Kurve*.
   (b) Zeigen Sie weiter, dass κ nicht rektifizierbar ist.