Teilbarkeit durch 7

Wie kann man erkennen, ob eine ganze Zahl durch 7 teilbar ist?

Dazu rufen wir uns zunächst ins Gedächtnis, was *Teilbarkeit* ist:

Definition 1. Es seien a und b ganze Zahlen, und es gelte $a \neq 0$. Wir nennen a einen **Teiler** von b und b durch a **teilbar**, wenn es eine ganze Zahl k gibt mit $b = k \cdot a$. In diesem Fall schreiben wir $a \mid b$. Ist a kein Teiler von b, so schreiben wir $a \nmid b$.

Beispiel: Es ist 5 ein Teiler von 40, denn es gilt $40 = 8 \cdot 5$.
(Hier ist also $a = 5$, $b = 40$, $k = 8$.)

Nun: Sei z eine ganze Zahl.

Da z genau dann durch 7 teilbar ist, wenn $-z$ durch 7 teilbar ist[1], können wir uns ohne Schwierigkeiten auf *natürliche* Zahlen konzentrieren.

Wenn z ein- oder zweistellig ist, ziehe man das Einmaleins heran.

Wenn z mehr als zwei Stellen hat, so gibt es mehrere Möglichkeiten. Wenn die Zahl nicht allzu lang oder kompliziert ist, hilft etwas Kopfrechnen weiter, wenn man den folgenden Satz beachtet:

Satz 1 Für alle ganzen Zahlen a und b gilt:
Genau dann ist $a + b$ durch 7 teilbar, wenn sowohl a als auch b durch 7 teilbar sind.

Zwei Anmerkungen:
Erstens gilt dieser Satz natürlich nicht nur für den Divisor 7. An seiner Stelle kann auch jeder andere ganzzahlige Divisor $d \neq 0$ stehen.

Zweitens ist dieser Satz gar nicht schwer zu beweisen:
Seien a, b, d ganze Zahlen, $d \neq 0$.

---

[1] **Beweis:**

$$\begin{array}{rl} & 7 \mid z \\ \iff & \text{Es gibt eine ganze Zahl } k \text{ mit } z = 7k \\ \iff & \text{Es gibt eine ganze Zahl } k \text{ mit } -z = -7k \\ \iff & \text{Es gibt eine ganze Zahl } k \text{ mit } -z = 7 \cdot (-k) \\ \iff & \text{Es gibt eine ganze Zahl } l \text{ mit } -z = 7l \\ \iff & 7 \mid -z \end{array}$$

Übungsaufgabe. Ergänze die Begründungen!

„$\Longrightarrow$“ Es gelte: a und b sind durch d teilbar. Dann gibt es also ganze Zahlen k, l mit $a = k \cdot d$ und $b = l \cdot d$. Daraus folgt

$$a + b \quad = \quad k \cdot d + l \cdot d \quad = \quad (k + l) \cdot d \quad ,$$

d. h. $a + b = (k + l) \cdot d$, und da $k + l$ ebenfalls eine ganze Zahl ist, sehen wir, dass $a + b$ durch d teilbar ist.

„$\Longleftarrow$“ Diese Richtung überlasse ich als **Übungsaufgabe**.

Beispiel: Die Zahl 5678 ist nicht durch 7 teilbar, denn $5678 = 5600 + 78$, und 5600 ist durch 7 teilbar, 78 aber nicht.

Wir wollen uns nun ein Verfahren ansehen, das bei beliebig langen Zahlen zum Ziel führt.

Satz 2 Sei z eine im Dezimalsystem mehrstellige ganze Zahl. Man bilde aus z die ganze Zahl z', indem man die Einerstelle von z streiche und von der verbleibenden Zahl das Doppelte der gestrichenen Ziffer subtrahiere.

Dann gilt: Genau dann ist z' durch 7 teilbar, wenn z durch 7 teilbar ist.

Beispiel: Ist 3169 durch 7 teilbar?
Die letzte Ziffer ist 9, wir streichen sie weg und erhalten die Zahl 316; von dieser Zahl ist nun 18 zu subtrahieren, das ergibt 298. Wir haben also die Frage, ob 3169 durch 7 teilbar ist, auf die (einfachere!) Frage reduziert, ob 298 durch 7 teilbar ist.

Ist 298 durch 7 teilbar? Nein, denn *wenn* 298 durch 7 teilbar wäre, *dann* wäre auch $18 = 298 - 280$ durch 7 teilbar (das sieht man ein, indem man Satz 1 auf die Werte $a = 298$, $b = -280$ anwendet). Wir wissen aber, dass 18 nicht durch 7 teilbar ist. Also ist auch 298 nicht durch 7 teilbar und damit nach Satz 2 auch die Zahl 3169 nicht.

Es bleibt nun noch Satz 2 zu beweisen. Das werden wir hier nicht in voller Allgemeinheit durchführen, sondern uns auf den Fall *vierstelliger* Zahlen beschränken. Der vollständige Beweis steht unter `http://sammeltlemmas.blogspot.de/2015/07/teilbarkeit-durch-7.html`.

Sei also z eine vierstellige natürliche Zahl. Ihre Ziffern bezeichnen wir mit a, b, c, d. Es gelte also

$$z \quad = \quad 1000\,a + 100\,b + 10\,c + d \quad , \quad a, b, c, d \in \{0, \ldots, 9\}, \quad a \neq 0 \quad .$$

Indem wir z' wie vorgeschrieben bilden, erhalten wir außerdem

$$z' = 100\,a + 10\,b + c - 2\,d \quad .$$

Zunächst beweisen wir die Richtung „$\Longrightarrow$“, d. h.: Wir gehen davon aus, dass z' durch 7 teilbar ist, und haben zu zeigen, dass dann auch z durch 7 teilbar ist.

Gelte also $7 \mid z'$. Dann gibt es eine ganze Zahl l mit $7\,l = z'$. Nun formen wir diese Gleichung ein wenig um.

$$\begin{array}{lrcll}
 & 7\,l & = & z' & \\
\Longleftrightarrow & 7\,l & = & 100\,a + 10\,b + c - 2\,d & \mid \text{ Definition von } z' \text{ anwenden} \\
\Longleftrightarrow & 7\,l & = & -2\,d + c + 10\,b + 100\,a & \mid \\
\Longleftrightarrow & 70\,l & = & 10 \cdot (-2\,d + c + 10\,b + 100\,a) & \mid \\
\Longleftrightarrow & 70\,l & = & -20\,d + 10\,c + 100\,b + 1000\,a & \mid \\
\Longleftrightarrow & 70\,l + 20\,d & = & 10\,c + 100\,b + 1000\,a & \mid \\
\Longleftrightarrow & 70\,l + 21\,d & = & d + 10\,c + 100\,b + 1000\,a & \mid \\
\Longleftrightarrow & 70\,l + 21\,d & = & 1000\,a + 100\,b + 10\,c + d & \mid \\
\Longleftrightarrow & 70\,l + 21\,d & = & z & \mid
\end{array}$$

Es gilt also $70\,l + 21\,d = z$, und wegen $7 \mid 70\,l$ und $7 \mid 21\,d$ folgt mit Satz 1, dass 7 ein Teiler von $70\,l + 21\,d$, also von z, ist, und genau das hatten wir zu zeigen.

Übungsaufgabe. In der obigen Kette von Umformungen fehlen fast alle Begründungen. Ergänze diese!

Die Richtung „$\Longleftarrow$“ ist erneut eine Übungsaufgabe. (Hier gehe also davon aus, dass 7 ein Teiler von z ist, und zeige, dass daraus die Teilbarkeit von z' durch 7 folgt.)