

Das Konzept einer zweidimensionalen Phase unter Verwendung einer algebraisch erweiterten Signalrepräsentation*

Thomas Bülow und Gerald Sommer

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Lehrstuhl für Kognitive Systeme
Preußerstraße 1-9, 24105 Kiel
email: {tbl,gs}@informatik.uni-kiel.de

Zusammenfassung In diesem Artikel wird das Konzept der zweidimensionalen Phase eines Bildsignals vorgestellt, wobei die Phase durch ein Paar reeller Zahlen gegeben wird und nicht wie üblich durch einen einzigen reellen Wert. Dadurch erhält man ein intrinsisch zweidimensionales Phasenkonzept. Die Einführung der zweidimensionalen Phase beruht auf der algebraischen Erweiterung der Frequenzraumrepräsentation von einer komplexwertigen zu einer quaternionenwertigen Darstellung.

1 Einleitung

Das Konzept der *Phase* eines Signals stammt aus der eindimensionalen Signaltheorie und ist dort in verschiedenen Ausprägungen vertreten. So kann man neben der *globalen Phase (Fourier-Phase)* zwischen der *momentanen Phase* und der *lokalen Phase* unterscheiden (siehe z.B. [5]). Insbesondere die lokale Phase erlaubt es, Rückschlüsse über die lokale Struktur eines eindimensionalen Signals zu ziehen: Kennt man den Wert der lokalen Phase an einer bestimmten Position des Signals, so läßt sich entscheiden, ob an der entsprechenden Position eine Stufe oder eine Spitze vorliegt, oder ob es sich bei einer detektierten ansteigenden (oder abfallenden) Flanke um einen konkaven oder um einen konvexen Anstieg (oder Abfall) handelt [9]. Die lokale Phase kann an einer Position auf unterschiedlichen Skalen bestimmt werden und dadurch unterschiedliche Werte annehmen. Dieser Effekt soll im folgenden jedoch nicht berücksichtigt werden.

Wie viele Konzepte der eindimensionalen Signaltheorie so ist auch das Phasenkonzept in die mehrdimensionale und insbesondere in die zweidimensionale Signaltheorie übernommen worden. Im wesentlichen läuft diese Verallgemeinerung darauf hinaus, daß an jeder Position eine Vorzugsorientierung ausgewählt wird und die eindimensionalen Konzepte entlang dieser Orientierung angewendet werden. Wie im eindimensionalen Fall erhält man (bei fest gewählter Vorzugsorientierung) eine reelle Zahl als lokale Phase, die darüber Auskunft gibt, ob

* Diese Arbeit wurde finanziert durch die Studienstiftung des deutschen Volkes (Th. B.) und die DFG (So 320-2-1) (G. S.).

man es lokal mit einer Linie, einer Stufenkante oder einer konvex oder konkav steigenden oder fallenden Struktur zu tun hat. Granlund [5] schlägt eine $(n + 1)$ -dimensionale Phasendarstellung für n -dimensionale Signale vor, die aus der reellen Phase und dem Richtungsvektor der gewählten Vorzugsorientierung besteht.

Hier stellt sich jedoch das Problem, daß Anzahl und Art der möglichen Signalstrukturen eines zweidimensionalen Signals prinzipiell von denen eines eindimensionalen Signals verschieden sind. So läßt sich beispielsweise eine Ecke innerhalb eines Bildes nicht in eine der Kategorie „Linie“ oder „Kante“ einordnen. Ebenso ist es bei der Unterscheidung von Krümmungen nicht mehr mit der Frage „konvex oder konkav?“ getan. Vielmehr müssen lokale Krümmungen einer zweidimensionalen Struktur zusätzlich daraufhin untersucht werden, ob sie hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch sind.

Einen Ansatz zur Untersuchung intrinsisch zweidimensionaler Signalstrukturen machten Krieger und Zetzsche [7]. Sie benutzten dazu quadratische Volterra-Filter und gaben ein Kriterium dafür an, daß ein Volterra-Filter ausschließlich auf intrinsisch zweidimensionale Strukturen antwortet. Wir wählen hier einen anderen Zugang, indem wir am Phasenkonzept festhalten, jedoch bei der Erweiterung auf zwei Dimensionen von den gewohnten Wegen abweichen.

Im folgenden Abschnitt werden wir das Phasenkonzept kurz erläutern und auch sofort an einem Beispiel darstellen, wie wir uns ein zweidimensionales Phasenkonzept vorstellen. Anhand der Definition der momentanen Phase über das analytische Signal wird gezeigt, warum keine der bekannten Verallgemeinerungen des analytischen Signals für zweidimensionale Signale dazu geeignet ist, die zweidimensionale Phase zu bestimmen. Der wesentliche Grund ist die algebraischen Basis der zweidimensionalen Fouriertransformation und damit der Frequenzraumdarstellung. Wir schlagen im zweidimensionalen Fall anstatt der komplexwertigen Darstellung eine quaternionwertige Repräsentation vor und führen dazu in Abschnitt vier die quaternionische Fouriertransformation (QFT) ein.

Im fünften Abschnitt stellen wir das mittels der QFT verallgemeinerte analytische Signal und den Begriff der quaternionischen Gaborfilter vor und werden abschließend einige experimentelle Ergebnisse vorführen, die zeigen wie sich die zweidimensionale Phase praktisch schätzen läßt.

2 Das Phasenkonzept

In der Signaltheorie werden stets in Raum und Zeit endliche Signale untersucht. Im folgenden soll davon ausgegangen werden, daß eindimensionale Signale die Länge $l = 2\pi$ haben und im Intervall $[0, 2\pi]$ gegeben sind; zweidimensionale Signale sollen in dem quadratischen Definitionsbereich $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ gegeben sein. Weiterhin gehen wir davon aus, daß die Randbedingungen $f(0) = f(2\pi)$ für ein eindimensionales Signal f bzw. $g(0, y) = g(2\pi, y)$ und $g(x, 0) = g(x, 2\pi)$ für ein zweidimensionales Signal g erfüllt sind². Es ist bekannt, daß sich eindimensiona-

² Diese Annahme ist insbesondere für diskretisierte Signale — mit denen man es ja praktisch immer zu tun hat — sinnvoll, da sie dazu führt, daß auch die Frequenz-

le Signale der oben genannten Art durch Linearkombinationen der Funktionen

$$\begin{aligned} \cos(mx) & \text{ mit } m \in \mathbb{N}^0 \\ \sin(nx) & \text{ mit } n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1)$$

mit $x \in [0, 2\pi]$ beliebig genau approximieren lassen (siehe z.B. [4]). Das entsprechende Funktionensystem für zweidimensionale Signale ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \cos(mx) \cos(ny) & \text{ mit } m \in \mathbb{N}^0, n \in \mathbb{N}^0 \\ \sin(mx) \cos(ny) & \text{ mit } m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^0 \\ \cos(mx) \sin(ny) & \text{ mit } m \in \mathbb{N}^0, n \in \mathbb{N} \\ \sin(mx) \sin(ny) & \text{ mit } m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (2)$$

mit $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Im folgenden sollen die Funktionen $f(x) = \cos(x)$ im eindimensionalen Fall und $f(x, y) = \cos(x) \cos(y)$ im zweidimensionalen Fall als Referenzsignale für die Definition der Phase dienen. Als *momentane Phase* des eindimensionalen Kosinussignals $f(x) = \cos(x)$ wird die Position innerhalb des Signals selbst definiert, solange sie zwischen 0 und 2π liegt, wovon hier ausgegangen werden soll. Die momentane Phase von $f(x) = \cos(x)$ an der Stelle $x = \pi/2$ wäre also $\pi/2$. In diesem Fall hängt die momentane Phase direkt mit der lokalen Struktur des Signals zusammen (siehe Abb. 3a). Dies ist jedoch nicht für beliebige Signale der Fall. Deshalb ist es zweckmäßig, zusätzlich das Konzept der *lokalen Phase* einzuführen, was in Abschnitt 6 erfolgen wird.

Analog zur oben gegebenen Definition der momentanen Phase für die eindimensionale Kosinusfunktion, die im folgenden Abschnitt anhand des analytischen Signals für beliebige eindimensionale Signale verallgemeinert werden soll, werden wir jetzt die momentane Phase eines zweidimensionalen Signals definieren. Als entsprechendes Referenzsignal eignet sich das Produkt zweier Kosinusfunktionen $f(x, y) = \cos(x) \cos(y)$. Als momentane Phase von f an der Position (x, y) definieren wir das Paar (x, y) selbst, solange es in dem Intervall $[0, 2\pi[\times [0, \pi[$ liegt. Eine Definition der Phase ist hier nicht wie man erwarten könnte in dem Bereich $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ möglich. Der Grund dafür wird durch Abb. 1 klar. Es ist möglich, die Funktion $f(x, y) = \cos(x) \cos(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ aus $f(x, y)$, $(x, y) \in [0, 2\pi[\times [0, \pi[$ durch Aneinandersetzen der Intervalle zu gewinnen. Daraus folgt, daß alle möglichen Werte der Phase in diesem Intervall enthalten sind.

3 Das eindimensionale analytische Signal

Es wurde bisher noch nicht gezeigt, wie die momentane Phase eines beliebigen eindimensionalen Signals definiert werden kann. Das soll jetzt nachgeholt werden. Dazu definierten wir zunächst das analytische Signal f_A eines eindimensionalen

raumrepräsentation diskret ist.

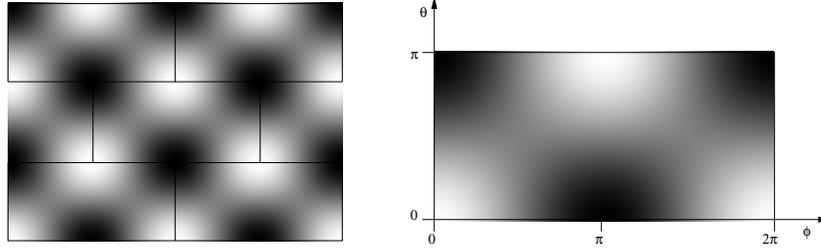


Abb. 1. Die Funktion $f(x, y) = \cos(x) \cos(y)$ mit $(x, y) \in [0, 4\pi[\times [0, 3\pi[$ (links) und $(x, y) \in [0, 2\pi[\times [0, \pi[$ (rechts).

Signals f . Man erhält das analytische Signal aus dem Ausgangssignal durch die Unterdrückung der negativen Frequenzen und gleichzeitige Verdoppelung der übrigen Komponenten.

$$f_A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(u) e^{i2\pi ux} du \quad \text{mit} \quad (3)$$

$$Z(u) = \begin{cases} 2F(u) & \text{falls } u \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4)$$

Daraus folgt, daß das analytische Signal komplexwertig ist, im Gegensatz zum ursprünglichen Signal, welches als reel angenommen wird. Das analytische Signal der Kosinusfunktion — des Referenzsignals für die momentane Phase — ist gleich der komplexen Exponentialfunktion:

$$f(x) = \cos(x) \implies f_A(x) = e^{ix} \quad . \quad (5)$$

Auf diesem Wege können wir die momentane Phase von f definieren als das Argument des analytischen Signals f_A an der Position x .

$$\text{momentane Phase von } f(x) = \arg(f_A(x)) \quad (6)$$

Diese Definition gilt für beliebige eindimensionale Signale [5].

Ein anderer großer Vorteil des analytischen Signals gegenüber dem ursprünglichen Signal ist die Tatsache, daß sich die momentane Amplitude eines Signals f an der Stelle x aus dem analytischen Signal als dessen Absolutbetrag $|f_A(x)|$ ergibt.

All das deutet darauf hin, daß es wünschenswert wäre, das Konzept des analytischen Signals für zweidimensionale Signale zu verallgemeinern. Hierbei tritt das Problem auf, daß in der Frequenzebene positive und negative Frequenzen a priori nicht definiert sind. Die bestehenden Ansätze zu einer Verallgemeinerung des analytischen Signals (z.B. in [5] durch Auswahl einer Vorzugsorientierung) erlauben es nicht, die oben definierte zweidimensionale Phase aus f_A zu bestimmen. Dies gilt unabhängig von der gewählten Definition des zweidimensionalen analytischen Signals, solange es komplexwertig ist, was in allen uns bekannten

Ansätzen der Fall ist. Im eindimensionalen Fall wird das analytische Signal durch die Anwendung der Fouriertransformation, Ausblendung der negativen Frequenzen und anschließende inverse Fouriertransformation bestimmt. Wollen wir ein zweidimensionales analytisches Signal entwickeln, das nicht komplexwertig ist, sondern die Bildebene auf Werte einer höherdimensionalen Algebra abbildet, so müssen wir uns zunächst einer Verallgemeinerung der Fouriertransformation zuwenden.

4 Die quaternionische Fouriertransformation

Dieser Abschnitt enthält die Neuerung, die den Übergang zur zweidimensionalen Phase erlaubt. Wir modifizieren die zweidimensionale Fouriertransformation

$$F(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ux} f(\mathbf{x}) e^{-i2\pi vy} d^2 \mathbf{x} \quad , \quad (7)$$

indem wir die imaginäre Einheit in der zweiten Exponentialfunktion des Fourierkerns in j umbenennen:

$$F^q(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ux} f(\mathbf{x}) e^{-j2\pi vy} d^2 \mathbf{x} \quad . \quad (8)$$

Wir verwenden auch die Schreibweise $\mathcal{F}_q\{f\} = F^q$ und $\mathcal{F}\{f\} = F$. Die beiden imaginären Einheiten i und j werden jetzt als Elemente der Quaternionenalgebra \mathbb{H} aufgefaßt: Die Algebra der Quaternionen ist eine vierdimensionale \mathbb{R} -Algebra mit der Basis $\{1, i, j, k\}$. Die Einheiten i , j und k sind imaginär: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Sie erfüllen die Vertauschungsrelationen $ij = -ji = k$. Ausführlicheres über Quaternionen findet man z.B. in [8] und [6]. Auch von Chernov [3] wurden Quaternionen in der Fouriertransformation verwendet, allerdings um schnelle Algorithmen für die zweidimensionale DFT zu erhalten. Die Transformation (8) wird quaternionische Fouriertransformation (QFT) genannt (zur QFT siehe [2]). Die inverse QFT ist gegeben durch

$$f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ux} F^q(\mathbf{u}) e^{j2\pi vy} d^2 \mathbf{u} \quad . \quad (9)$$

Es ist bekannt, daß der gerade (ungerade) Anteil eines eindimensionalen reellen Signals durch die Fouriertransformation in einen geraden (ungeraden) Real- (Imaginär-) Teil transformiert wird (siehe z.B. [1]). Ein zweidimensionales Signal kann in vier Komponenten unterschiedlicher Symmetrie zerlegt werden: Gerade oder ungerade bzgl. der x -Richtung einerseits und bzgl. der y -Richtung andererseits. Wir stellen fest, daß der (gerade, gerade)-Anteil eines reellen zweidimensionalen Signals durch die QFT in einen Realteil, der (ungerade, gerade)-Anteil in einen i -Imaginärteil, der (gerade, ungerade)-Anteil in einen j -Imaginärteil und der (ungerade, ungerade)-Anteil in einen k -Imaginärteil symmetrieeerhaltend transformiert wird.

5 Das zweidimensionale analytische Signal

Aufbauend auf der QFT kann das Konzept des analytischen Signals auf zwei Dimensionen verallgemeinert werden.

Definition: Das zweidimensionale analytische Signal f_A eines Signals f mit der QFT $\mathcal{F}_q\{f\} = F^q$ ist gegeben durch

$$f_A(x, y) = \mathcal{F}_q^{-1}\{Z^q\}(x, y) \quad ,$$

wobei Z^q definiert ist durch

$$Z^q(u, v) = \begin{cases} 4F^q(u, v) & \text{falls } u \geq 0 \text{ und } v \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus den Symmetrieeigenschaften der QFT folgt, daß sämtliche relevante Information in der quaternionischen Frequenzebene in einem Quadranten enthalten ist, so daß das analytische Signal die gesamte Information über das Ausgangssignal enthält³. Als Beispiel verwenden wir die Funktion $f(x, y) = \cos(x) \cos(y)$. Für dieses Signal, das wir als Referenzsignal für die Definition der Phase gewählt hatten, erhalten wir das analytische Signal $f_A(x, y) = e^{ix} e^{jy}$. Da das analytische Signal wie im eindimensionalen Fall auch hier zur Definition der momentanen Phase verwendet werden soll, benötigen wir eine Verallgemeinerung der Argumentabbildung, die jedem Quaternion der Form $q = e^{ix} e^{jy}$ ein Paar $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ wie folgt zuordnet: $\arg(q) = (x', y') \in [0, 2\pi[\times [0, \pi[$, mit $e^{ix'} e^{jy'} = q$. Es ist nicht schwer, $\arg(q)$ aus der kartesischen Darstellung $q = e^{ix} e^{jy} = a + bi + cj + dk$ zu erhalten (siehe [2]).

6 Experimentelle Ergebnisse

Wie in Abschnitt 2 erwähnt ist zur Schätzung der lokalen Struktur die Verwendung der lokalen Phase der momentanen Phase vorzuziehen. Eine Möglichkeit dazu ist die Einführung sogenannter Gaborfilter, die durch

$$g_e(x) = e^{-\pi x^2/\sigma^2} \cos(2\pi u_0 x), \quad g_o(x) = e^{-\pi x^2/\sigma^2} \sin(2\pi u_0 x) \quad (10)$$

gegeben sind, wobei $g_e(x)$ das gerade und $g_o(x)$ das ungerade Gaborfilter darstellen. Hierbei lassen sich die sogenannte Zentralfrequenz u_0 und die Weite der Gaussglocke, die durch σ bestimmt wird, variieren. Faltet man das Signal f mit den Gaborfiltern und bezeichnet die Ergebnisse mit $G_e\{f\}(x)$ bzw. $G_o\{f\}(x)$, so ergibt sich als lokale Phase von f an der Position x

$$\text{lokale Phase von } f(x) = \arg(G_e\{f\}(x) + iG_o\{f\}(x)) \quad . \quad (11)$$

Die Funktion $\arg(z)$ ist definiert durch $\arg(z) = \phi$ für $z = e^{i\phi} \in \mathbb{C}$, wobei wir annehmen daß $\phi \in [0, 2\pi[$ gilt. Offensichtlich hängt die lokale Phase von der Wahl der Parameter u_0 und σ ab.

³ Es läßt sich zeigen, daß der Realteil des quaternionischen analytischen Signals gleich dem Ausgangssignal ist.

Um die zweidimensionale lokale Phase schätzen zu können, führen wir das quaternionische Gaborfilter ein (siehe Abb. 2), das gegeben ist durch

$$g^q(x, y) = e^{-\pi(x^2+y^2)/\sigma^2} (e^{2\pi i u_0 x} e^{2\pi j v_0 y}) \quad (12)$$

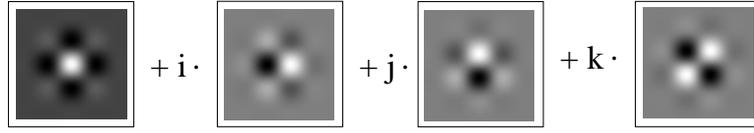


Abb. 2. Ein quaternionisches Gaborfilter mit $u_0 = v_0$; von links nach rechts: Realteil, i -Imaginärteil, j -Imaginärteil, k -Imaginärteil.

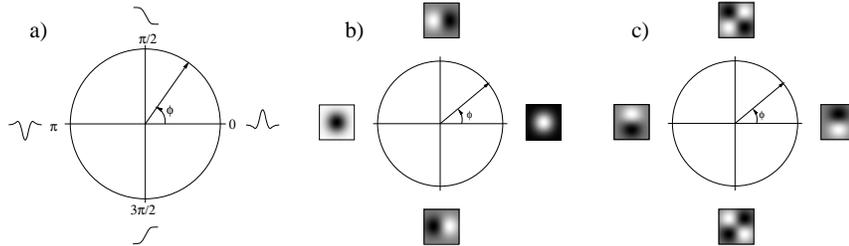


Abb. 3. Zusammenhang zwischen der Phase und der lokalen Signalstruktur: **a.** Im eindimensionalen Fall (siehe [5]), **b.** im zweidimensionalen Fall für $\theta = 0$, **c.** im zweidimensionalen Fall für $\theta = \pi/2$.

Wie im eindimensionalen Fall, so besteht auch im zweidimensionalen Fall ein Zusammenhang zwischen der lokalen Phase und der lokalen Struktur des Signals. In Abb. 3 ist dieser Zusammenhang dargestellt und zwar einerseits der bekannte Zusammenhang für eindimensionale Signale in Abb. 3a, wie er sich z.B. in [5] findet, andererseits der Zusammenhang der zweidimensionalen Phase mit der Struktur des Bildsignals in Abb. 3b und Abb. 3c.

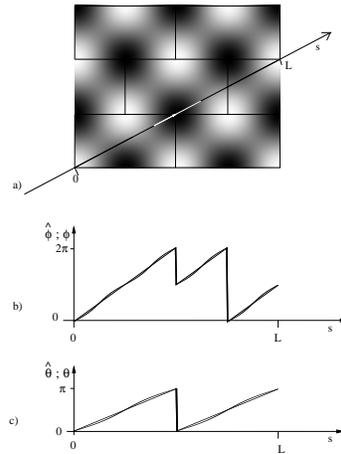


Abb. 4a. Das Testsignal mit dem Weg, entlang dessen die Phase geschätzt wird. **b.** $\hat{\phi}$ und ϕ , **c.** $\hat{\theta}$ und θ .

Es soll zum Abschluß ein Experiment dargestellt werden, das zeigt, wie die zweidimensionale Phase mittels der quaternionischen Gaborfilter geschätzt werden

kann. In Abb. 4a ist noch einmal die Funktion $f(x, y) = \cos(x) \cos(y)$ abgebildet mit einem Weg, entlang dessen die zweidimensionale Phase geschätzt werden soll. Das Signal wurde mit quaternionischen Gaborfiltern gefaltet, deren Zentralfrequenz um den Faktor 4 kleiner war als die Frequenz des untersuchten Signals. Aus den resultierenden Quaternionen wird die Phase mittels der in Abschnitt 5 angegebenen zweidimensionalen Argumentfunktion bestimmt. In Abb. 4b und 4c sind die geschätzten Werte ϕ und θ abgebildet. Zum Vergleich ist auch die momentane Phase (ϕ, θ) eingezeichnet, welche geradlinig verläuft.

7 Zusammenfassung

Das Phasenkonzept ist in der Signaltheorie von besonderer Bedeutung. Wir haben gezeigt, wie sich durch Verwendung einer quaternionwertigen Signalrepräsentation ein zweidimensionale Phase definieren läßt. Dazu wurde zunächst die zweidimensionale quaternionwertige Fouriertransformation definiert und anschließend verwendet, um das analytische Signal für zweidimensionale Signale zu definieren. Die lokale zweidimensionale Phase läßt sich mittels der quaternionischen Gaborfilter schätzen. Das Prinzip der QFT läßt sich auf n -dimensionale Signale übertragen [2]. Dabei tritt eine 2^n -dimensionale Clifford Algebra an die Stelle der Quaternionen.

Danksagung

Wir danken Dr. Kostas Daniilidis für wertvolle Anregungen und sein Interesse an dieser Arbeit.

Literatur

1. R. BRACEWELL, *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill, 2nd edition, 1986
2. TH. BÜLOW, G. SOMMER, *Algebraically Extended Representation of Multi-Dimensional Signals*, Proc. of the 10th Scandinavian Conference on Image Analysis, Lappeenranta, 559–566, 1997
3. V.M. CHERNOV, *Discrete orthogonal transforms with data representation in composition algebras*, Proceedings of the 9th Scandinavian Conference on Image Analysis, 357–364, 1995
4. R. COURANT, D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Springer Verlag Berlin, 1993
5. G.H. GRANLUND, H. KNUTSSON, *Signal Processing for Computer Vision*, Kluwer Academic Publishers, 1995
6. I.L. KANTOR, A.S. SOLODOVNIKOV, *Hypercomplex Numbers*, Springer-Verlag, New-York, 1989
7. G. KRIEGER, CH. ZETSCHE, *Nonlinear Image Operators for the Evaluation of Local Intrinsic Dimensionality*, IEEE Trans. on Image Processing, vol. 5, no. 6, 1026–1042, 1996
8. I.R. PORTEOUS, *Clifford Algebras and the Classical Groups*, Cambridge University Press, 1995
9. J. WENG, *Windowed Fourier Phase: Completeness and Signal Reconstruction*, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 41, 657–666, 1993