

Entwurf und Implementierung quadratischer Filter in geometrischer Algebra



Diplomarbeit

am Lehrstuhl für Kognitive Systeme
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Prof. Dr. Gerald Sommer

vorgelegt von
Hendrik Schnepel

20. November 2007

Betreuer: Dr. Sven Buchholz

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist die konstruktive Entwicklung von Anwendungen quadratischer Filter im Rahmen der geometrischen Algebra.

Durch die Verknüpfung des Energieoperators mit einer geometrischen Einbettung kontinuierlicher Signale wird eine Verbindung zum analytischen Signal hergestellt.

Dies motiviert die Formulierung einer entsprechenden Definition für diskrete, zweidimensionale Signale, so dass die gewonnenen Erkenntnisse in der Bildverarbeitung eingesetzt werden können. In diesem Zuge wird eine spezielle geometrische Einbettung vorgeschlagen und auf Basis des Teager-Filters eine neuartige Gruppe multivektorieller Filter entwickelt.

Es werden darauf basierende Detektoren von intrinsisch ein- und zweidimensionalen Strukturen betrachtet und die Vor- und Nachteile der verwendeten Methode diskutiert.

Das experimentelle Vorgehen wird dabei durch ein in MATLAB entwickeltes System zur Spezifikation und Anwendung multivektorieller Volterra-Filter unterstützt.

Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und ausschließlich die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Kiel, den 20. November 2007
Hendrik Schnepel

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	ix
Symbolverzeichnis	xi
1 Einleitung	1
2 Quadratische Filter und geometrische Algebra	5
2.1 Polynomielle und quadratische Filter	5
2.2 Einführung in die geometrische Algebra	12
2.3 Die theoretische Fundament des Energieoperators	17
2.4 Der eindimensionale Teager-Filter	22
3 Entwurf des multivektoriellen Teager-Filters	29
3.1 Überblick	29
3.2 Der zweidimensionale Teager-Filter	30
3.3 Konstruktion des geometrischen Signals	35
3.4 Der multivektorielle Teager-Filter	41
3.4.1 Der Kern des geometrischen Signals	41
3.4.2 Der multivektorielle Teager-Filter	44
4 Experimentelle Ergebnisse	51
4.1 Voraussetzungen	51
4.2 Der Kantendetektor im Vergleich	52
4.3 Intrinsisch zweidimensionale Strukturen	56
4.4 Vektorielle Merkmale	60
4.5 Stabilität des Filters gegenüber Signalstörungen	62
5 Schlusswort	67
A Aspekte der Implementierung	71
Literaturverzeichnis	75

Abbildungsverzeichnis

2.1	Veranschaulichung eines quadratischen Filters	9
2.2	Das geometrische Signal	23
2.3	Vergleich reellwertiger und geometrischer Kantendetektion	25
2.4	Vergleich reellwertiger und geometrischer Liniendetektion	28
3.1	Antworten verschiedener Teager-Filter auf eine orthogonale Ecke	32
3.2	Antworten verschiedener Teager-Filter auf eine diagonale Ecke	33
3.3	Antwort des vollständigen Teager-Filters auf verschiedene Ecken	34
3.4	Vergleich des Laplace- und klassischen Teager-Filters	35
3.5	Orientierungsvektoren auf Grundlage zweier Differenzoperatoren	36
3.6	Konstruktion des gleichmäßigen Orientierungsvektors	38
3.7	Gleichmäßige Orientierungsvektoren des geometrischen Signals	40
4.1	Zweidimensionale Kantendetektion des multivektoriellen Teager-Filters . .	53
4.2	ROC-Kurven verschiedener Kantendetektoren	55
4.3	Volterra-Kern des klassischen Teager-Filters	56
4.4	Volterra-Kern des multivektoriellen Teager-Filters, 1	57
4.5	Zweidimensionale Eckendetektion des multivektoriellen Teager-Filters . .	57
4.6	Detektion intrinsisch zweidimensionaler Strukturen	58
4.7	Volterra-Kern des multivektoriellen Teager-Filters, σ_{12}	59
4.8	Vektorielle Merkmale	61
4.9	Lineare Impulsantwort des multivektoriellen Teager-Filters	62
4.10	Zufälliges Rauschen zunehmender Intensität	62
4.11	Fehler verschiedener Teager-Filter bei Signalstörungen	64

Symbolverzeichnis

\mathbb{Z}	Ring der ganzen Zahlen
\mathbb{R}	Körper der reellen Zahlen
\mathbb{C}	Körper der komplexen Zahlen
$\mathcal{G}_{p,q}$	Geometrische Algebra der Signatur (p, q)
a, b, c	Reell- und komplexwertige Größen
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$	Vektorielle Größen
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	Multivektorielle Größen
h_k	Volterra-Kern der Ordnung k
H_k	Volterra-Operator der Ordnung k
$h * x$	Faltungsoperation reellwertiger Signale
$\mathbf{H} *_{\mathit{l}} \mathbf{X}$	Linksseitige Faltungsoperation multivektorieller Signale
$\mathbf{X} *_{\mathit{r}} \mathbf{H}$	Rechtsseitige Faltungsoperation multivektorieller Signale

1 Einleitung

Einführung

Zu den einfachsten Grundlagen klassischer Signaltheorie gehören lineare Filter. Ihre Definition erfolgt häufig im Ortsraum durch die Angabe zumeist reellwertiger Faltungskerne. Werden Betrachtungen im Frequenzraum durchgeführt, erfolgt dies im Allgemeinen mit Hilfe der Fourier-Transformation, die über den komplexen Zahlen definiert wird. Durch die zweidimensionale Formulierung dieser Prinzipien sind unter anderem vielseitige Anwendungen in der Bildverarbeitung möglich.

Sowohl für lineare Filter als auch für die komplexen Zahlen existieren jeweils allgemeinere mathematische Konzepte. Auf Seite der Filter stehen dabei die Volterra-Filter, die neben linearen auch polynomielle Terme von beliebiger Ordnung erlauben. Eine Teilmenge bilden die in dieser Arbeit betrachteten quadratischen Filter.

Geometrische Algebra auf der anderen Seite bildet einen mathematischen Rahmen, der trivialerweise die reellen Zahlen enthält, aber ebenso die Spezifikation der komplexen Zahlen, der Quaternionen und von weiteren hyperkomplexen Zahlensystemen erlaubt. Dadurch wird die Verwendung von Entitäten beliebig höherer Dimensionen möglich.

Durch Verwendung und Kombination dieser jeweils sehr allgemeinen Prinzipien wird in dieser Arbeit eine neue Gruppe von Filtern auf der Basis klassischer Methoden entwickelt. Für ein reellwertiges Signal wird dazu eine geometrische Einbettung beschrieben, durch die bei Anwendung klassischer Filter zusätzliche Merkmale im Ausgangssignal erzeugt werden. Durch das Zusammenfassen dieser geometrischen Erweiterung und des herkömmlichen Filters in einem Operator entstehen lineare und quadratische Filter in geometrischer Algebra.

Ein Überblick über nichtlineare Filter

Lineare Filter bilden aus gutem Grund die Basis der Signalverarbeitung. Sie zeichnen sich durch Eigenschaften aus, die eine einfache, aber umfassende mathematische Betrachtung erlauben. Zudem können sie auf effiziente Art und Weise praktisch implementiert werden. Dazu tragen insbesondere ihre Verknüpfung mit der Fourier-Transformation und das damit verbundene Faltungstheorem bei.^[1]

Nun gibt es jedoch viele Situationen, in denen die Modellierung nichtlinearen Verhaltens erforderlich ist. Dazu gehören signalabhängige oder multiplikative Störungen.^[2] In der linearen Filterung wird meist ein Glättungsoperator verwendet, um vor der eigentlichen Verarbeitung des Signals eventuelles Rauschen zu unterdrücken. Dies geht aber häufig mit einem unerwünschten Informationsverlust einher. Nichtlineare Filter bieten dazu Lösungsmöglichkeiten und werden vor allem dann verwendet, wenn die einfachen, linearen Filter keine ausreichend zufriedenstellenden Ergebnisse liefern können.

Es existiert eine Vielfalt von nichtlinearen Operatoren, die im Rahmen der Bildverarbeitung eingesetzt werden. Sie lassen sich grob verschiedenen Kategorien zuordnen:^[3]

- Morphologische Filter, deren Ausgabe von geometrischen Merkmalen abhängt, wie beispielsweise die auf der Minkowski-Addition basierenden Operationen der Dilatation und Erosion.
- Rangordnungsfilter, die auf einer Ordnung von Datenpunkten innerhalb einer definierten Umgebung operieren. Der Medianfilter ist ein bekanntes Beispiel hierfür.
- Homomorphe Filter, die einer Verallgemeinerung des Überlagerungsprinzips folgen. Ein einfaches Beispiel ist die Verwendung des Logarithmus zur Separation multiplikativ verknüpfter Signale.
- Volterra-Filter, die basierend auf dem Prinzip der Volterra-Reihe die polynomiellen Filter bilden, und somit die quadratischen Filter einschließen.

Eine Klasse von nichtlinearen Filtern sind also die polynomiellen Volterra-Filter, die auf natürliche Weise wiederum die Menge der quadratischen Filter enthalten. Das Verhalten dieser Filter wird mit Hilfe der Volterra-Reihe spezifiziert.

Attraktiv ist unter praktischen und mathematischen Gesichtspunkten, dass es sich bei den Volterra-Filtern um eine natürliche Erweiterung linearer Filter handelt. Konzepte von Filterkern und Faltung werden eingängig in höhere Ordnungen übertragen. Mit einem Grundwissen in linearer Filterung, das im Bereich der Signalverarbeitung vorausgesetzt werden darf, sind polynomielle Filter dadurch leicht verständlich und anwendbar. Weiterhin sind Eigenschaften polynomieller Funktionen sowie Methoden für ihre mathematische Betrachtung weitgehend untersucht. Dadurch stehen bekannte Gesetzmäßigkeiten und Algorithmen auch für polynomielle Filter zur Verfügung.

Motivation

Die Volterra-Reihe begrenzt nicht den polynomiellen Grad des Modells. Mit steigendem Grad führt aber der exponentiell wachsende Berechnungsaufwand zu Schwierigkeiten

bei der praktischen Umsetzung und Implementierung. Mit der Verwendung quadratischer Filter wird daher ein Kompromiss eingegangen. Die Volterra-Reihe wird hier nach dem Term zweiter Ordnung abgebrochen. Unter Verzicht auf eine Modellierung höherer Ordnungen wird eine vereinfachte Repräsentation definiert. Die Beschreibung eines begrenzten Maßes an nichtlinearem Verhalten ist somit ebenso möglich wie eine effiziente Implementierung.

Durch Beschränkung des Filterkerns auf einen kleinen Träger kann die Effizienz weiter optimiert werden. Wie auch im Laufe dieser Arbeit deutlich werden wird, stellen quadratische Filter selbst dann noch eine interessante Erweiterung linearer Systeme dar und können zu maßgeblich besseren Ergebnissen führen.

Im Folgenden sollen nun die Vorteile dieser quadratischen Filter mit den Möglichkeiten eines vektoriiellen Signals kombiniert werden. Ein solches Signal erlaubt nicht nur die übliche Filterung von Grauwerten, sondern auch von orientierten Daten, vektoriiell eingebetteten Farbbildern und anderen mehrdimensionalen Datenpunkten. Die ideale mathematische Grundlage dafür bietet die geometrische Algebra, die unter Verwendung des geometrischen Produkts die Definition der Faltung und Fourier-Transformation für vektorielle Daten ermöglicht.

Gliederung der Arbeit

In diesem einführenden Kapitel wurden die grundlegenden Konzepte, die die Basis dieser Arbeit bilden, kurz vorgestellt. Im nachfolgenden Kapitel 2 werden sowohl quadratische Filter als auch der Aufbau der geometrischen Algebra formal eingeführt. Daraufhin wird zunächst der für kontinuierliche Signale definierte Energieoperator vorgestellt, dessen diskrete Approximation den quadratischen Teager-Filter ergibt. Nach der Konstruktion einer geometrischen Einbettung eines Signals wird die Anwendung dieser Operatoren darauf untersucht. Das Auftreten interessanter Merkmale motiviert den Entwurf eines multivektoriellen Filters.

In Kapitel 3 wird zunächst eine für den zweidimensionalen Fall geeignete Konstruktion des geometrischen Signals hergeleitet. Die geometrische Beschreibung dieses Signals für ein reellwertiges Eingangssignal wird in die Formulierung eines linearen Faltungskerns überführt. Dies erlaubt die Kombination dieses Kerns mit dem Kern des Teager-Filters. Dadurch entsteht der multivektorielle Teager-Filter, der die Berechnung des geometrischen Signals und die Anwendung des klassischen Teager-Filters darauf in einer Operation zusammenfasst.

Die einzelnen Bestandteile und die Konsequenzen des praktischen Einsatzes dieses neu entwickelten Filters werden in Kapitel 4 auf hauptsächlich experimentelle Weise unter-

sucht. Es wird festgestellt, dass die charakteristische Funktion des ursprünglichen Teager-Filters erhalten bleibt, nämlich die des Kantendetektors. Der neue Filter arbeitet jedoch unabhängig von einer Verschiebung des Signals entlang der Ordinate und bietet dadurch eine verbesserte Sensitivität. Weiterhin enthält der multivektorielle Teager-Filter Komponenten für die Detektion von intrinsisch zweidimensionalen Strukturen, wodurch neben Kanten auch speziell Ecken separat erkannt werden können.

Kapitel 5 fasst die gewonnenen Erkenntnisse zusammen und enthält eine abschließende Bewertung. Dabei wird noch einmal auf die speziellen Eigenschaften des multivektoriellen Teager-Filters eingegangen, aber auch ein allgemeiner Blick auf die verwendete Methodik geworfen.

Während des Entwurfs des multivektoriellen Teager-Filters wurden alle Berechnungen auch empirisch verifiziert und experimentelle Untersuchungen einiger Merkmale durchgeführt. Dazu wurden Programme in MATLAB entwickelt, die die Spezifikation und Anwendung quadratischer, multivektorieller Filter in geometrischen Algebren beliebiger Signatur ermöglichen. Dieses System und praktische Aspekte einer solchen Implementierung werden im Anhang beschrieben.

2 Quadratische Filter und geometrische Algebra

2.1 Polynomielle und quadratische Filter

Grundlagen linearer Signalverarbeitung

In diesem ersten Abschnitt des Kapitels sollen die polynomiellen Volterra-Filter und damit die quadratischen Filter formal eingeführt werden. Um den Vergleich mit den linearen Filtern zu erleichtern und Besonderheiten quadratischer Filter hervorzuheben, werden zuvor die Grundlagen der linearen Signalverarbeitung kurz zusammengefasst.

Ein Signal wird durch eine reellwertige Funktion x über einem Definitionsbereich D modelliert. Durch die Verwendung eines allgemeinen, vektoriellen Arguments kann eine einheitliche Beschreibung für Signale beliebiger Dimension konstruiert werden. Der nicht näher spezifizierte Definitionsbereich lässt sowohl kontinuierliche als auch diskrete und ebenso beschränkte wie unbeschränkte Räume zu:

$$x : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Während kontinuierliche, eindimensionale Signale hauptsächlich in der klassischen Signaltheorie Anwendung finden, oder der Entwicklung theoretischer Konzepte dienen, werden in der praktischen Bildverarbeitung diskrete, zweidimensionale Signale verwendet. Motiviert durch die in dieser Arbeit angestrebte Anwendbarkeit in der Bildverarbeitung wird für die folgenden Definitionen implizit von einem diskreten Definitionsbereich ausgegangen. Dabei ist allerdings zu bemerken, dass eine kontinuierliche Beschreibung keine Probleme birgt. Im Allgemeinen werden sich die verwendeten Summationen auf einfachste Weise durch das Integral ersetzen lassen.

Gegenstand der Signalverarbeitung ist die Umwandlung eines gegebenen Eingangssignals x in ein Ausgangssignal y anhand eines spezifischen Algorithmus. Diese Berechnung erfolgt durch die Anwendung eines Operators auf das Eingangssignal. Das Wirken eines oder mehrerer Operatoren kann in einem System S zusammengefasst werden:

$$y : D \rightarrow \mathbb{R} \quad y \equiv S[x] \quad (2.2)$$

Die linearen Filter bilden eine Klasse von solchen Operatoren. Tatsächlich stellen sie bereits eine Teilmenge der Volterra-Filter dar, die in diesem Abschnitt des Kapitels diskutiert werden. Daher lohnt sich ein Blick auf ausgewählte Eigenschaften. Die Definition eines linearen Filters erfolgt auf dem formalen Weg über seinen Faltungskern h :

$$h : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Mit Hilfe dieses Kerns kann die Berechnung der Antwort y eines linearen Systems auf ein Eingangssignal x durch die Faltungsoperation erfolgen:

$$y(\mathbf{n}) = (h * x)(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{k}} h(\mathbf{k})x(\mathbf{n} - \mathbf{k}) \quad (2.4)$$

Ist der Kern dagegen nicht bekannt, so gewinnt die Impulsantwort an Bedeutung. Dabei handelt es sich um die Antwort eines Systems auf ein spezielles Eingangssignal, nämlich den Einheitsimpuls δ , der hier in der diskreten Form definiert wird:

$$\delta : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta(\mathbf{n}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{n} \equiv 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.5)$$

Für ein lineares System entspricht die Impulsantwort gerade wieder dem zugrundeliegenden Faltungskern. Somit ist die eindeutige Charakterisierung eines Filters auch ohne explizit definierte Kenntnisse über seine innere Funktionsweise möglich. Diese Methode dient folglich der Systemidentifikation.

Oft ist es sinnvoll, einen Filter nicht nur wie bisher formuliert im Ortsraum zu untersuchen, sondern auch im Frequenzraum. Den Zugang hierzu bietet die Fourier-Transformation. Für ein reell- oder komplexwertiges Signal über einem diskreten Definitionsbereich wird die Fourier-Transformation für eine feste Zahl von N Datenpunkten definiert:

$$X(\mathbf{u}) = \mathcal{F}\{x\}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{k}} x(\mathbf{k})e^{-i\frac{2\pi}{N}\mathbf{u}^\top \mathbf{k}} \quad (2.6)$$

Durch diese Basistransformation kann das Signal in Form von überlagerten Sinus- und Cosinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen dargestellt werden. Das ursprüngliche Signal kann dabei genau dann vollständig rekonstruiert werden, wenn die Voraussetzungen des Abtasttheorems erfüllt sind. Dieses besagt, dass die Abtastfrequenz mehr als doppelt so groß sein muss, wie die maximal im Signal selbst auftretende Frequenz. Diese Grenzfrequenz heißt die Nyquist-Frequenz. Die inverse Fouriertransformation berechnet

dann das ursprüngliche Signal:

$$x(\mathbf{n}) = \mathcal{F}^{-1}\{X\}(\mathbf{n}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{u}} X(\mathbf{u}) e^{i\frac{2\pi}{N} \mathbf{u}^T \mathbf{n}} \quad (2.7)$$

Für die Anwendung linearer Filter wird die Fourier-Transformation auch durch das Faltungstheorem interessant, das die Operation der Faltung mit der Verarbeitung im Frequenzraum verknüpft. Es gilt:

$$\mathcal{F}\{h * x\} = \mathcal{F}\{h\} \cdot \mathcal{F}\{x\} \quad (2.8)$$

In Worten besagt dieses Theorem, dass die Faltung eines Filterkerns mit einem Signal gleichbedeutend ist mit der punktweisen Multiplikation der Frequenzdarstellung dieser beiden Komponenten und der darauffolgenden Rücktransformation in den Ortsraum. Deshalb spielt dieses Theorem insbesondere dann eine wichtige Rolle bei der praktischen Implementierung linearer Filter, wenn Faltungskerne über einem größeren Träger verarbeitet werden müssen. Basierend auf sehr schnellen Algorithmen für die Fouriertransformation kann so eine große Beschleunigung in der Anwendung des Filters erzielt werden.

Der Volterra-Operator als Baustein polynomieller Filter

Die wichtigsten Begriffe der linearen Signalverarbeitung wurden nun eingeführt. Es wurde dabei bereits erwähnt, dass die bisher beschriebenen linearen Filter einen Spezialfall der Volterra-Filter darstellen, die wiederum auch die quadratischen Filter enthalten. Tatsächlich bilden die Volterra-Filter eine natürliche Erweiterung linearer Filter auf polynomielle Modelle beliebiger Ordnung. So werden vergleichbar mit der Bedeutung des bisherigen Filterkerns nun die Volterra-Kerne höherer Ordnung definiert. Eine Funktion von m Argumenten heißt in diesem Zusammenhang Volterra-Kern der Ordnung m :

$$h_m : D \times \dots \times D \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq m \quad (2.9)$$

Ähnlich der Idee der Faltung, jedoch durchaus davon abzugrenzen, verknüpft nun der Volterra-Operator H_m der Ordnung m das Eingangssignal mit dem der Ordnung entsprechenden Volterra-Kern:

$$H_m[x(\mathbf{n})] = \sum_{\mathbf{k}_1} \dots \sum_{\mathbf{k}_m} h_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) x(\mathbf{n} - \mathbf{k}_1) \dots x(\mathbf{n} - \mathbf{k}_m) \quad (2.10)$$

Auch wenn schon an der Definition erkennbar ist, dass es sich bei der Berechnung des Volterra-Operators nicht um eine lineare Faltung handelt, so kann das Verfahren dennoch linearisiert werden, indem eine höherdimensionale Faltung verwendet wird. Dieser Zusammenhang soll kurz verdeutlicht werden.

Die Hilfsfunktion v_m konstruiert dazu ein Produkt, bei dessen Faktoren es sich gerade um ausgewählte Werte des Eingangssignals handelt. Der nichtlineare Bestandteil des Volterra-Operators wird somit in einer Darstellung zusammengefasst, die als ein herkömmliches mehrdimensionales Signal betrachtet werden kann:

$$v_m : D^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad v_m(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m) = \prod_{i=1}^m x(\mathbf{n}_i) \quad (2.11)$$

Diese Hilfsfunktion kann nun durch eine höherdimensionale, aber lineare Faltung mit dem Volterra-Kern verknüpft werden:

$$\tilde{H}_m(\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m) = \sum_{\mathbf{k}_1} \cdots \sum_{\mathbf{k}_m} h_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) v_m(\mathbf{n}_1 - \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{n}_m - \mathbf{k}_m) \quad (2.12)$$

Das Ergebnis des eigentlichen Volterra-Operators wird schließlich als ein Teil dieser Faltungsoperation ermittelt:

$$H_m[x(\mathbf{n})] = \tilde{H}_m(\mathbf{n}, \dots, \mathbf{n}) \quad (2.13)$$

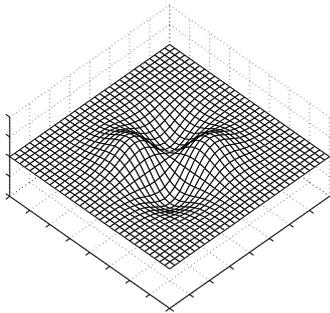
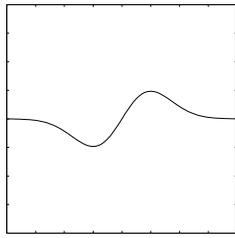
Der Zusammenhang zwischen einem nichtlinearen Volterra-Operator und seiner linearisierten Berechnung durch eine höherdimensionale Faltung mag im Vergleich zu den rein linearen Filtern weniger intuitiv sein. In der Literatur existiert dazu eine Visualisierung, die auch hier zur Veranschaulichung reproduziert wurde.^[4] Abbildung 2.1 zeigt die zuvor allgemein beschriebene Berechnung schrittweise anhand der Anwendung eines Volterra-Operators zweiter Ordnung auf ein eindimensionales Signal.

Nachdem nun die Volterra-Operatoren einer jeweils festen polynomiellen Ordnung eingeführt wurden, kann das zusammenfassende Volterra-System definiert werden. Dazu sei angemerkt, dass der Volterra-Operator der Ordnung Null bisher bewusst nicht betrachtet wurde. Das Ergebnis seiner Berechnung entspräche gleichermaßen dem Volterra-Kern der Ordnung Null, welcher wiederum als eine einfache Konstante h_0 formuliert werden kann.

Zusammengefasst besteht ein Volterra-System nun aus der Überlagerung von Volterra-Operatoren beliebig hoher Ordnungen und beschreibt so die Klasse der polynomiellen

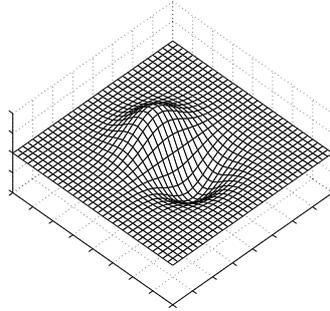
1. Expansion

$$v_2(n_1, n_2) = x(n_1)x(n_2)$$

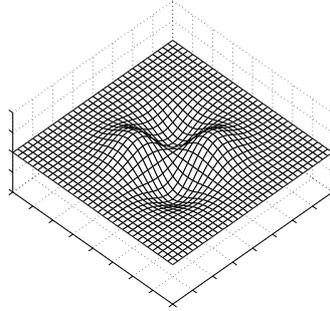


2. Faltung

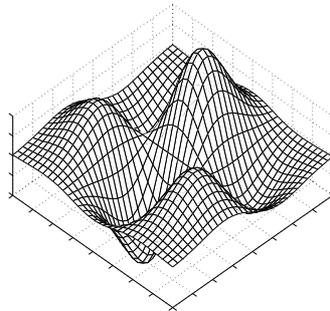
$$y_2(n_1, n_2) = (h_2 * v_2)(n_1, n_2)$$



*



=



3. Schnitt

$$H_2[x(n)] = y_2(n, n)$$

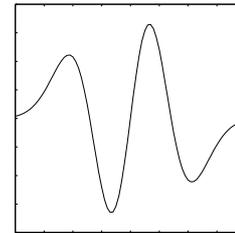
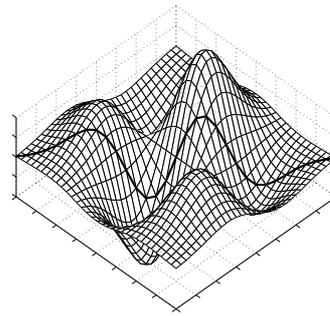


Abbildung 2.1: Darstellung^[4] zur Berechnung der Antwort eines quadratischen Volterra-Operators H_2 auf ein eindimensionales Signal: (1.) Bestimmung der zweidimensionalen Hilfsfunktion v_2 durch Multiplikation des Signals x mit sich selbst, (2.) zweidimensionale Faltung eines quadratischen Kerns h_2 mit der Hilfsfunktion und (3.) diagonalen Schnitt durch das Ergebnis der Faltung.

Filter:

$$y(\mathbf{n}) = h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} H_m[x(\mathbf{n})] \quad (2.14)$$

Die Impulsantwort polynomieller Filter

Polynomielle Filter wurden als eine Verallgemeinerung linearer Filter vorgestellt. Für diese wurde in der Einleitung dieses Kapitels die Impulsantwort und ihre Bedeutung erläutert. Für polynomielle Filter ergibt sich nun ein wichtiger Unterschied. Es muss festgestellt werden, dass die Impulsantwort im Falle eines beliebigen Volterra-Operators nicht länger für die Identifizierung des Kerns verwendet werden kann. Zur Verdeutlichung wird ein einzelner Impuls beliebiger Intensität als Eingangssignal betrachtet:

$$x(\mathbf{n}) = c \cdot \delta(\mathbf{n}), \quad c \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

Die Antwort eines Volterra-Systems darauf kann durch Einsetzen in (2.14) und (2.10) unabhängig von der Angabe konkreter Volterra-Kerne berechnet werden:

$$y(\mathbf{n}) = h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c^m \cdot h_m(\mathbf{n}, \dots, \mathbf{n}) \quad (2.16)$$

Durch die Impulsantwort des Systems werden also nur für $\mathbf{k}_1 = \dots = \mathbf{k}_m$ die Werte des jeweiligen Volterra-Kerns $h_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m)$ identifiziert. Dies entspricht offensichtlich nicht dem vollständigen Kern. Die Identifikation eines Volterra-Kerns ist folglich nur dann möglich, wenn die vollständige Auswertung der implizit im Operator enthaltenen Faltung verfügbar ist. In diesem Fall wäre das Prinzip der Impulsantwort wiederum anwendbar.

Quadratische Filter

Die für beliebige polynomielle Ordnungen und insbesondere die unendliche Aufsummierung von Operatoren definierte Volterra-Reihe kann in praktischen Implementierungen nicht verwendet werden. Aber auch die Berechnung von einzelnen Volterra-Operatoren höherer Ordnung bringt schnell eine Komplexität mit sich, die ein darauf basierendes Verfahren für praktische Zwecke untauglich machen würde. Daher wird ein Kompromiss zwischen der Modellierung nichtlinearen Verhaltens und der effizienten Nutzung in praktischen Anwendungen eingegangen. Durch Abbruch der Volterra-Reihe nach dem Term zweiter Ordnung ergeben sich die durch einen konstanten Term h_0 und die Volterra-

Kerne h_1 und h_2 definierten quadratischen Filter. Die Antwort eines solchen Filters berechnet sich wie folgt:

$$y(\mathbf{n}) = h_0 + \sum_{\mathbf{k}} h_1(\mathbf{k})x(\mathbf{n} - \mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}_1} \sum_{\mathbf{k}_2} h_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)x(\mathbf{n} - \mathbf{k}_1)x(\mathbf{n} - \mathbf{k}_2) \quad (2.17)$$

Der rechnerische Aufwand, der in praktischen Implementierungen eine wichtige Rolle spielt, ist aber selbst bei der Verwendung von nur quadratischen Volterra-Filtern nicht zu unterschätzen. In der Bildverarbeitung werden zweidimensionale Signale verwendet und entsprechende Filter benötigt. Quadratische Filter sind auch hier von Interesse, ihre Komplexität ist jedoch entsprechend hoch. Durch explizites Ausschreiben der Berechnung wird die Rolle der vierdimensionalen Faltung deutlich. Sie ergibt sich aus der Kombination eines zweidimensionalen Signals mit einem Volterra-Operator zweiter Ordnung:

$$y(m, n) = h_0 + \sum_k \sum_l h_1(k, l)x(m - k, n - l) + \sum_{k_1} \sum_{l_1} \sum_{k_2} \sum_{l_2} h_2(k_1, l_1, k_2, l_2)x(m - k_1, n - l_1)x(m - k_2, n - l_2) \quad (2.18)$$

Bei der Verwendung von Kernen, die über einem großen Träger definiert sind, wurde im Falle linearer Filter die Nutzung des Faltungstheorems (2.8) empfohlen. Neben dem einfach zu behandelnden konstanten Term h_0 stellt der Volterra-Operator H_1 dabei einen solchen linearen Anteil dar. Auf Grund der Linearität der Fourier-Transformation kann bis zu diesem Punkt die Theorie der linearen Filterung verwendet werden. Besondere Beachtung erfordert aber der Volterra-Operator zweiter Ordnung. Hier muss das Faltungstheorem erweitert und angepasst werden.^[2] Es ergibt sich in diesem Fall:

$$\mathcal{F}\{H_2[x(\mathbf{n})]\}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{u}_1} \sum_{\mathbf{u}_2} \mathcal{F}\{h_2\}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \cdot \mathcal{F}\{x\}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathcal{F}\{x\}(\mathbf{u}_2), \quad \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} \quad (2.19)$$

An dieser Erweiterung des Faltungstheorems werden zwei Merkmale quadratischer Filter deutlich. Man beachte dazu die Bedingung $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$. Sie begründet zum einen, dass im Ausgangssignal höhere Frequenzen auftreten, als im Eingangssignal überhaupt vorhanden waren. Denn angenommen, die Größe der auftretenden Frequenzen \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 wäre sowohl im Kern als auch im Signal beschränkt, so sind die Frequenzen des Ausgangssignals nur durch die entsprechend größere obere Schranke von $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$

begrenzt. Dies hat Auswirkungen auf die Nyquist-Frequenz. Zum anderen ist bezüglich des Anteils einer bestimmten Frequenz \mathbf{u} die Symmetrie der Addition zu beachten. Hier werden bei der Filterung also Frequenzanteile mehrfach integriert. Die Charakterisierung eines quadratischen Filters im Frequenzraum wird dadurch erheblich aufwendiger.

Mit dem Vorhergehenden wurden die polynomiellen und insbesondere die quadratischen Filter eingeführt, die im weiteren Verlauf ausführlich zur Anwendung kommen werden. Vorerst wird jedoch die geometrische Algebra vorgestellt, die die zweite Komponente des in dieser Arbeit entwickelten Filterentwurfs darstellt. Nach einer kurzen Motivation des Entwurfs im Kontinuierlichen wird dann in Abschnitt 2.4 der erste konkrete quadratische Filter vorgestellt.

2.2 Einführung in die geometrische Algebra

Grundlagen

Geometrische Algebra stellt einen vereinheitlichenden Rahmen für die Formulierung der komplexen Zahlen, der Quaternionen, weiteren hyperkomplexen Zahlensystemen sowie allgemein vektorieller und geometrisch motivierter Mathematik dar. Ihr Aufbau und einige Grundlagen werden in diesem Abschnitt erläutert.

Eine Algebra ist eine mathematische Struktur \mathcal{A} , die über einem Körper K unter Verwendung einer assoziativen und distributiven multiplikativen Verknüpfung definiert wird. Für $\alpha, \beta \in K$ und $x, y, z \in \mathcal{A}$ erfüllt das Produkt einer Algebra also diese Eigenschaften:

$$a(bc) = (ab)c \quad (2.20)$$

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha(xz) + \beta(yz) \quad (2.21)$$

Auf Grundlage eines n -dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraums wird eine 2^n -dimensionale geometrische Algebra $\mathcal{G}_{p,q}$ erzeugt. Auch wenn prinzipiell basisunabhängig vorgegangen werden kann, wird hier für den zugrundeliegenden Vektorraum die kanonische Orthonormalbasis vorausgesetzt. Die Basisvektoren des Vektorraums werden mit $p + q = n$ Erzeugenden in der geometrischen Algebra identifiziert, die einen Teil der Basis der Algebra bilden:

$$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \equiv \sigma_1, \dots, \sigma_p, \sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+q} \quad (2.22)$$

Die Wahl des Paares (p, q) spezifiziert die sogenannte Signatur der Algebra und legt das multiplikative Verhalten des Produkts dieser Algebra eindeutig fest. Die skalare

Einheit 1 ist ein weiterer Bestandteil der Basis jeder geometrischen Algebra und es gilt:

$$\sigma_i^2 = \begin{cases} +1 & \text{für } 1 \leq i \leq p \\ -1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.23)$$

Weiterhin ist das geometrische Produkt im Allgemeinen antikommutativ. Dies hat weitreichende Folgen für die Anwendung bisheriger mathematischer Aussagen, in denen die gewohnte Kommutativität der Multiplikation stillschweigend vorausgesetzt wurde, wie etwa im Fall der Faltung. Für die Multiplikation verschiedener Erzeugenden gilt also:

$$\sigma_k \sigma_l = -\sigma_l \sigma_k, \quad l \neq k \quad (2.24)$$

Produkte von Erzeugenden, die nach den Regeln (2.23) und (2.24) nicht weiter reduziert werden können, bilden die verbleibenden Basiselemente der 2^n -dimensionalen Algebra $\mathcal{G}_{p,q}$. Eine besondere Rolle kommt dabei dem Pseudoskalar zu, der die Rolle der verallgemeinerten imaginären Einheit einnimmt:

$$\sigma_1 \dots \sigma_n = \sigma_{1\dots n} = I_n \quad (2.25)$$

Die allgemeinen Elemente einer geometrischen Algebra heißen Multivektoren. In der hier verwendeten Notation werden Multivektoren und multivektorielle Funktionen in hervorgehobenen Großbuchstaben gedruckt, etwa \mathbf{A} , \mathbf{B} und $\mathbf{F}(x)$.

Geometrische Algebra in der Signalverarbeitung

Durch die Einführung der geometrischen Algebra sind nun nicht mehr nur reell- oder komplexwertige Signale und Faltungskerne denkbar, sondern vielmehr entsprechende multivektorielle Umsetzungen der bisher vorgestellten signaltheoretischen Konzepte möglich.

Die Einbettung von Operatoren und Signalen in geometrischer Algebra eröffnet vielseitige Möglichkeiten. Die Anzahl von Kombinationen und Variationen steigt dabei jedoch exponentiell mit jeder zusätzlichen Dimension des zugrundeliegenden Vektorraums. Zudem spielen nicht nur die dimensional Freiheitsgrade und die damit verfügbaren Komponenten der Multivektoren eine Rolle, sondern auch die Signatur der Algebra. Zwischen Algebren gleicher Dimension kann die Wahl verschiedener Signaturen zusätzlich zu unterschiedlichem Verhalten und andersartigen Ergebnissen eines Operators führen.

Diese Arbeit legt deshalb den Schwerpunkt auf genau zwei spezifische Algebren, nämlich die Verwendung von $\mathcal{G}_{2,0}$ für die Verarbeitung eindimensionaler Signale und die Verwen-

	1	σ_1	σ_2	I_2
1	1	σ_1	σ_2	I_2
σ_1	σ_1	1	I_2	σ_2
σ_2	σ_2	$-I_2$	1	$-\sigma_1$
I_2	I_2	$-\sigma_2$	σ_1	-1

Tabelle 2.1: Multiplikationstabelle für die Basiselemente der Algebra \mathcal{G}_2

derung von $\mathcal{G}_{3,0}$ für zweidimensionale Signale. Im Folgenden werden diese Algebren auch kurz als \mathcal{G}_2 und \mathcal{G}_3 bezeichnet.

Die Basis der Algebra \mathcal{G}_2 besteht aus dem Skalar, zwei vektoriellen Erzeugenden und dem Pseudoskalar:

$$\mathcal{G}_2 = \text{span}\{1, \sigma_1, \sigma_2, I_2\} \quad (2.26)$$

Die Multiplikation der einzelnen Basiselemente ist in Tabelle 2.1 aufgeführt. Die Interpretation eines Multivektors dieser Algebra ist verhältnismäßig einfach. Im Wesentlichen handelt es sich um die simple Möglichkeit zweidimensionale Vektoren der euklidischen Ebene in einen umfassenderen mathematischen Rahmen einzubetten.

Die Basis der Algebra \mathcal{G}_3 besteht dagegen aus weiteren Elementen. Durch das Produkt der Erzeugenden entstehen die sogenannten Bivektoren σ_{12} , σ_{13} und σ_{23} :

$$\mathcal{G}_3 = \text{span}\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, I_3\} \quad (2.27)$$

Die Multiplikation dieser Basiselemente ist entsprechend in Tabelle 2.2 aufgeführt. In diesem Fall gestaltet sich die Interpretation etwas umfangreicher. Die Bivektoren entstehen durch das Produkt zweier Erzeugenden, die im euklidischen Raum gerade zwei linear unabhängigen Basisvektoren entsprechen. Man kann daher sagen, dass eine Linearkombination von Bivektoren dem Aufspannen einer Ebene entspricht und dabei noch einen weiteren skalaren Freiheitsgrad in Form des Betrags besitzt. Tatsächlich werden die Bivektoren häufig als Flächenelemente charakterisiert. In dieser Arbeit werden die Bivektoren durchgängig als Normalenvektoren zu ihrer assoziierten Ebene visualisiert. Die Zuordnung für die Darstellung im Raum erfolgt dabei gemäß des Kreuzprodukts der entsprechenden euklidischen Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= \sigma_1 \sigma_2 \equiv \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \\ \sigma_{13} &= \sigma_1 \sigma_3 \equiv \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y \\ \sigma_{23} &= \sigma_2 \sigma_3 \equiv \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad (2.28)$$

	1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_{12}	σ_{13}	σ_{23}	I_3
1	1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_{12}	σ_{13}	σ_{23}	I_3
σ_1	σ_1	1	σ_{12}	σ_{13}	σ_2	σ_3	I_3	σ_{23}
σ_2	σ_2	$-\sigma_{12}$	1	σ_{23}	$-\sigma_1$	$-I_3$	σ_3	$-\sigma_{13}$
σ_3	σ_3	$-\sigma_{13}$	$-\sigma_{23}$	1	I_3	$-\sigma_1$	$-\sigma_2$	σ_{12}
σ_{12}	σ_{12}	$-\sigma_2$	σ_1	I_3	-1	$-\sigma_{23}$	σ_{13}	$-\sigma_3$
σ_{13}	σ_{13}	$-\sigma_3$	$-I_3$	σ_1	σ_{23}	-1	$-\sigma_{12}$	σ_2
σ_{23}	σ_{23}	I_3	$-\sigma_3$	σ_2	$-\sigma_{13}$	σ_{12}	-1	$-\sigma_1$
I_3	I_3	σ_{23}	$-\sigma_{13}$	σ_{12}	$-\sigma_3$	σ_2	$-\sigma_1$	-1

Tabelle 2.2: Multiplikationstabelle für die Basiselemente der Algebra \mathcal{G}_3

Ein Multivektor, der ausschließlich bivectorielle Komponenten enthält, entspricht in der räumlichen Visualisierung daher dem Folgenden:

$$\alpha \cdot \sigma_{12} + \beta \cdot \sigma_{13} + \gamma \cdot \sigma_{23} \equiv \gamma \cdot \mathbf{e}_x - \beta \cdot \mathbf{e}_y + \alpha \cdot \mathbf{e}_z \quad (2.29)$$

Die Visualisierung vektoriieller Komponenten erfolgt in beiden Algebren durch die direkte Identifikation mit den euklidischen Basisvektoren. Skalare und pseudoskalare Anteile können jeweils als einfache skalare Daten visualisiert werden. Je nach Kontext der Anwendung werden in den Visualisierungen spezifische Komponenten dargestellt und andere ausgeblendet. Die Auswahl wird in den jeweiligen Fällen kenntlich gemacht.

Faltung und Faltungstheorem der Fouriertransformation

Zur Anwendung geometrischer Algebra in der Signalverarbeitung ist eine erweiterte Definition der Faltung unerlässlich. Der natürlichste Ansatz folgt der Idee, die reelle Multiplikation durch das geometrische Produkt zu ersetzen. Da aber das geometrische Produkt die Kommutativitätseigenschaft nicht erfüllt, werden zwei Varianten der Faltung definiert. Es wird dabei explizit unterschieden, ob der Filterkern links- oder rechtsseitig zur Anwendung gebracht wird.^[5]

Sei also \mathbf{X} ein multivektorielles Signal und \mathbf{H} ein multivektorieller Filterkern. Dann ist die Faltung unter linksseitiger Anwendung des Filters wie folgt definiert:

$$(\mathbf{H} *_l \mathbf{X})(n) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{H}(\mathbf{k}) \mathbf{X}(n - \mathbf{k}) \quad (2.30)$$

Die Faltung unter rechtsseitiger Anwendung des Filters wird analog definiert und die Berechnung erfolgt entsprechend:

$$(\mathbf{X} *_r \mathbf{H})(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{X}(\mathbf{n} - \mathbf{k}) \mathbf{H}(\mathbf{k}) \quad (2.31)$$

Für die in späteren Abschnitten und Kapiteln folgenden Betrachtungen sei schon jetzt hervorgehoben, dass sowohl Signal als auch Kern ebenso gut rein reellwertig sein können und beispielsweise nur der jeweils andere Faktor in geometrischer Algebra formuliert wird. Die obigen Faltungsdefinitionen sind somit in allgemeiner Form gehalten.

In der Filterung reellwertiger Signale wurde das Faltungstheorem (2.8) als eine wichtige Aussage hervorgehoben. Unter Berücksichtigung der Besonderheiten der multivektoriellen Faltung kann dieses Theorem in die geometrische Algebra übertragen werden. Dazu wird die diskrete multivektorielle Fourier-Transformation von N Datenpunkten definiert:

$$\mathcal{F}\{\mathbf{X}\}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{X}(\mathbf{k}) e^{-I_n \frac{2\pi}{N} \mathbf{u}^\top \mathbf{k}} \quad (2.32)$$

Es sei auf die Verwendung des Pseudoskalars als Verallgemeinerung der imaginären Einheit hingewiesen. Für die Anwendbarkeit dieser Fouriertransformation muss die Signatur der Algebra daher so gewählt sein, dass das Quadrat des Pseudoskalars entsprechend -1 ergibt. Die Anordnung der Multiplikation des Fourierkerns ist zudem nicht beliebig. Lediglich für Algebren der Dimension $n = 3 \pmod{4}$ kommutiert der Pseudoskalar mit allen Basiselementen.^[6] Das Faltungstheorem gilt jedoch in jedem Fall bei Festlegung auf eine spezifische Fourier-Transformation. Entsprechend der multivektoriellen Faltung wird dieses Theorem nun in zwei Varianten aufgestellt. Die links- und rechtsseitige Anwendung des Filters wird auch im Frequenzraum unterschieden:

$$\mathcal{F}\{\mathbf{H} *_l \mathbf{X}\} = \mathcal{F}\{\mathbf{H}\} \mathcal{F}\{\mathbf{X}\} \quad (2.33)$$

$$\mathcal{F}\{\mathbf{X} *_r \mathbf{H}\} = \mathcal{F}\{\mathbf{X}\} \mathcal{F}\{\mathbf{H}\} \quad (2.34)$$

Die für die folgenden Kapitel nötigen Grundlagen quadratischer Filter, geometrischer Algebra und multivektorieller Signalverarbeitung wurden damit behandelt. Mit dem folgenden Abschnitt beginnen bereits die ersten Betrachtungen in Richtung des Entwurfs eines multivektoriellen Filters, der die bis hierher eingeführten Prinzipien zusammenführen wird.

2.3 Die theoretische Fundament des Energieoperators

Dieses und die folgenden Kapitel arbeiten auf den Entwurf eines neuartigen multivекtoriellen Filters hin. Zur Motivation der spezifischen Konstruktion des geometrischen Signals und der Wahl eines konkreten quadratischen Filters als Grundlage des Entwurfs sollen zunächst einige Beobachtungen anhand eines kontinuierlichen, eindimensionalen Signals beschrieben werden.

Das kontinuierliche geometrische Signal

Das prinzipielle Vorgehen in diesem Kapitel basiert darauf, auf der Grundlage eines reellwertigen Eingangssignals geometrische Information zu erzeugen, die dann durch einen klassischen Filter weiterverarbeitet wird. Von hauptsächlichem Interesse sind dabei vorerst die Ergebnisse einer solchen Kombination, bevor in Kapitel 3 ein tatsächlich multivекtorieller Filter daraus entsteht. Es soll weiterhin für diesen aktuellen Abschnitt ein kontinuierliches Signal vorausgesetzt werden, das die Betrachtung einiger theoretischer Aspekte ermöglichen wird:

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.35)$$

Als ein erster Schritt in Richtung der angestrebten geometrischen Information wird das Eingangssignal zunächst in Form einer parametrischen Kurve φ in die euklidische Ebene eingebettet:

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = t \cdot \mathbf{e}_x + x(t) \cdot \mathbf{e}_y \quad (2.36)$$

Da die Betrachtung im Kontinuierlichen stattfindet, kann zu jedem Punkt dieser Kurve ein orthogonaler Vektor bezüglich der Tangente angegeben werden, der ebenfalls in der Ebene der Kurve liegt. Die Berechnung erfolgt über das Kreuzprodukt mit dem Vektor \mathbf{e}_z , der aus der Ebene herauszeigt. Nachdem der zum Signal orthogonale Vektor also als eine kontinuierliche Funktion formuliert werden kann, werden die Basisvektoren \mathbf{e}_x und \mathbf{e}_y durch die Erzeugenden der geometrischen Algebra \mathcal{G}_2 ersetzt. So wird der zur parametrischen Kurve orthogonale Vektor in die geometrische Algebra eingebettet und bildet das kontinuierliche geometrische Signal. Die skalaren und pseudoskalaren Komponenten dieses Signals werden nicht verwendet:

$$\mathbf{X} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}_2, \quad \mathbf{X}(t) = -\dot{x}(t) \cdot \sigma_1 + \sigma_2, \quad \mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{e}_z \times \dot{\varphi}(t) \quad (2.37)$$

Bei diesem Vorgehen ist hervorzuheben, dass das Kreuzprodukt keine innerhalb der geometrischen Algebra verfügbare Operation darstellt. An dieser Stelle wird der Sinn der

formalen Unterscheidung von euklidischen Basisvektoren und Erzeugenden der geometrischen Algebra deutlich. Die Herleitung des zum Signal orthogonalen Vektors kann nur im euklidischen Raum erfolgen. Das so erzielte Ergebnis wird dann durch Ersetzen der Basisvektoren uminterpretiert. Dies soll vorerst kein Problem darstellen. Die Existenz des geometrischen Signals wird für die Betrachtungen in diesem Kapitel vorausgesetzt.

Anwendung des Energieoperators

Ein typischer quadratischer Filter ist der Teager-Filter, auf den in Abschnitt 2.4 noch ausführlich eingegangen wird.^[7, 8] Es handelt sich bei diesem Filter um die diskrete Approximierung des Energieoperators. Der Energieoperator arbeitet auf einem kontinuierlichen Signal. Hier steht also ein Filter zur Verfügung, der sowohl als ein Operator im Kontinuierlichen als auch in Form eines quadratischen Volterra-Filters im Diskreten definiert ist. Auf Grund dieses Zusammenhangs und der damit vorhandenen Möglichkeit, gewonnene Erkenntnisse auf ein diskretes Signal in der Bildverarbeitung zu übertragen, wird für das in diesem Abschnitt verwendete kontinuierliche Signal die Wirkungsweise des Energieoperators untersucht:

$$\Psi_1[x(t)] = (\dot{x}(t))^2 - x(t)\ddot{x}(t) \quad (2.38)$$

An einem einfachen Signalmodell kann das Maß der Energie durch diesen Operator nachvollzogen werden. Dazu wird eine einfache Sinusfunktion der Amplitude A , der Frequenz ω und der Phasenverschiebung ϕ aufgestellt:^[8]

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (2.39)$$

Die Anwendung des Energieoperators auf dieses Signal erzeugt eine konstante Antwort, die den maßgeblichen Faktor der quadratischen Amplitude enthält. Es kann bereits jetzt angemerkt werden, dass diese Eigenschaft auch bei Anwendung auf eine geometrische Repräsentation des Signals erhalten bleiben sollte:

$$\begin{aligned} \Psi_1[x(t)] &= (\dot{x}(t))^2 - x(t)\ddot{x}(t) \\ &= A^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) - A \sin(\omega t + \phi)(-A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)) \\ &= A^2\omega^2(\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)) \\ &= A^2\omega^2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Für andere Formen von Signalen gibt es verschiedene Anpassungen und Verallgemeinerungen des Energieoperators. So existiert für zweidimensionale Signale beispielsweise eine komplexwertige Einbettung.^[9] Eine sehr allgemeine Form stellt dabei der Energietensor dar, der ebenso für zweidimensionale Signale definiert wird. Sowohl der erwähnte komplexwertige Operator als auch der hier betrachtete eindimensionale Energieoperator sind Spezialfälle des Energietensors:^[10]

$$\psi_t[x(\mathbf{t})] = [\nabla x(\mathbf{t})][\nabla x(\mathbf{t})]^\top - x(\mathbf{t})\mathbf{H}x(\mathbf{t}), \quad \nabla x = [x_x \ x_y]^\top, \quad \mathbf{H} = \nabla\nabla^\top \quad (2.41)$$

Tatsächlich wird hier bezüglich der Verwendung der Ableitungen zumindest ähnlich vorgegangen werden. Es muss allerdings beachtet werden, dass der Energietensor weiterhin ein zweidimensionales, reellwertiges Eingangssignal voraussetzt. Ein solches ist mit dem Ansatz der hier verwendeten geometrischen Einbettung nicht länger gegeben. Diese Einbettung erfordert auf Grund des mehrdimensionalen Signals zudem die Verwendung des geometrischen Produkts. Bezüglich des ursprünglichen Eingangssignals bringt die geometrische Konstruktion weiterhin einen zusätzlichen Ableitungsschritt mit sich, der im Energietensor nicht enthalten ist. Während also die prinzipielle Idee des Energieoperators weiterverwendet wird, handelt es sich nicht um einen einfachen Spezialfall des Tensors.

In einem ersten Schritt der Vorbereitung wird nun erneut das Signal der Sinusfunktion (2.39) betrachtet und gemäß der Vorschrift (2.37) das dazugehörige geometrische Signal aufgestellt:

$$\mathbf{X}(t) = -A\omega \cos(\omega t + \phi)\sigma_1 + \sigma_2 \quad (2.42)$$

Die prinzipielle Idee des Energieoperators, die erste und zweite Ableitung des Signals zu verwenden, wird konsequent fortgeführt. Diese werden allerdings in jedem Schritt vektoranalytisch so berechnet, dass Multivektoren als Summanden bestehen bleiben. Für die Multiplikation wird schließlich das geometrische Produkt verwendet:

$$\begin{aligned} \psi_G[\mathbf{X}(t)] &= \left(\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t)\right)^2 - \mathbf{X}(t)\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{X}(t) \\ &= (A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)\sigma_1)^2 - (-A\omega \cos(\omega t + \phi)\sigma_1 + \sigma_2)(A\omega^3 \cos(\omega t + \phi)\sigma_1) \\ &= A^2\omega^4 \sin^2(\omega t + \phi) + A^2\omega^4 \cos^2(\omega t + \phi) + A\omega^3 \cos(\omega t + \phi)\sigma_2\sigma_1 \\ &= A^2\omega^4 - A\omega^3 \cos(\omega t + \phi)I_3 \\ &= \omega^3(A^2\omega - I_3A \cos(\omega t + \phi)) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Das Ergebnis dieser Berechnung ist durchaus mit dem der Anwendung des Energieoperators vergleichbar. Als erstes ist festzustellen, dass der skalare Anteil des Ergebnisses

weiterhin die quadratische Amplitude des ursprünglichen Signals enthält. Trotz der geometrischen Einbettung bleibt also die zentrale Eigenschaft des Energieoperators erhalten. Aber gerade wegen dieser speziellen Einbettung ergeben sich auch einige Unterschiede und neuartige Interpretationsmöglichkeiten.

Die Verwendung des zum Signal orthogonalen Vektors bewirkt eine grundlegende Veränderung. Oft ist es nämlich in der Praxis von Interesse, Operatoren zu entwickeln, die unabhängig von einer Verschiebung des Signals entlang der Ordinate arbeiten. Das heißt, ein Operator sollte auf eine Funktion $x(t)$ ebenso antworten, wie auf eine Funktion $\tilde{x}(t) = x(t) + c$. In Bezug auf die Bildverarbeitung wird es dadurch beispielsweise möglich, gleiche Ergebnisse in dunklen und hellen, aber bezüglich ihrer relativen Intensitätsveränderungen gleichwertigen Bildbereichen zu erzielen. Weder der klassische Energieoperator noch der allgemeine Energietensor behandeln aber dieses Problem.^[11] Die geometrische Einbettung dagegen enthält einen zusätzlichen, impliziten Differentiationsschritt. Diese Vorgehensweise führt dazu, dass schon vor der eigentlichen Anwendung des Operators ein mögliche Verschiebung des Signals entlang der Ordinate irrelevant wird.

Betrachtung der lokalen Phase

Eine weitere interessante Eigenschaft kann im kontinuierlichen Modell der vorgeschlagenen geometrischen Einbettung festgestellt werden. Bei der Herleitung der oben genannten Eigenschaften wurde von einem reellwertigen Signal der Form $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ ausgegangen. Diese Funktion enthält also die eigentlichen Daten, bevor diese einem ersten Verarbeitungsschritt unterzogen werden.

Nun lohnt sich ein Blick auf die eindimensionale Hilberttransformation, die aus einem reellwertigen Signal den imaginären Anteil des sogenannten analytischen Signals erzeugt:

$$\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x\}(t) = (x * \frac{1}{\pi t})(t) \quad (2.44)$$

Die Hilberttransformation kann dabei einfacher im Frequenzraum als im Ortsraum durchgeführt werden. So werden Fehler bei der Phasenverschiebung vermieden:^[12]

$$\mathcal{F}\{\hat{x}\}(u) = -i \operatorname{sgn}(u) \cdot \mathcal{F}\{x\}(u) \quad (2.45)$$

Das analytische Signal setzt sich nun in seinem Realteil aus dem ursprünglichen Signal und im Imaginärteil aus dessen Hilberttransformation zusammen:

$$z(t) = x(t) + i \cdot \hat{x}(t) \quad (2.46)$$

Hier wird ein reellwertiges Signal x vorausgesetzt. Wie an der Darstellung im Frequenzraum zu erkennen ist, bewirkt die Hilberttransformation dann eine Phasenverschiebung um $|\frac{\pi}{2}|$ und es gilt $x^2(t) + \hat{x}^2(t) = 1$. Das heißt, Real- und Imaginärteil stehen in sogenannter Quadratur-Phasenbeziehung zueinander.

Es ist hervorzuheben, dass die Hilberttransformierte der Funktion $\sin(t)$ gerade durch $-\cos(t)$ gegeben ist. Nun fällt auf, dass die Anwendung des Energieoperators ψ_G (2.43) auf das geometrische Signal \mathbf{X} (2.42) genau diesen Zusammenhang im pseudoskalaren Anteil widerspiegelt:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \psi_G[\mathbf{X}(t)] = \omega^3 (A^2 \omega - \underbrace{A \cos(\omega t + \phi)}_{\hat{x}(t)}) I_3 \quad (2.47)$$

Zwar erfolgt die Berechnung nicht über die tatsächliche Hilberttransformation und das Ergebnis enthält zusätzliche Faktoren, aber dennoch kann die entsprechende Information herausgelesen werden. Eine weitere interessante Eigenschaft ist dabei, dass sich diese Information im pseudoskalaren Anteil anfindet. Dieser Anteil entspricht der imaginären Einheit der komplexen Zahlen. Es kann also eine Ähnlichkeit zum imaginären Anteil des analytischen Signals festgestellt werden.

Trotz der leichten Abweichungen von dem eigentlichen analytischen Signal ist dieses Operatorverhalten bemerkenswert, denn das analytische Signal ist die Grundlage für das Konzept der momentanen oder lokalen Phase:

$$\phi(t) = \tan^{-1}(\text{Im}\{z(t)\}, \text{Re}\{z(t)\}) \quad (2.48)$$

Diese momentane Phase ermöglicht wiederum das Klassifizieren von Kanten und Linien im Signal nach steigender oder fallender Flanke.

Der Energieoperator wird im Diskreten durch den Teager-Filter approximiert. Dieser Filter wird unter anderem für die Detektion von Kanten verwendet. Im kontinuierlichen Modell der geometrischen Einbettung wurde nun festgestellt, dass im pseudoskalaren Anteil der Operatorantwort eine Information steckt, die sich ähnlich der lokalen Phase verhält. Dies gibt Anlass zu der Interpretation, dass neben der Kantendetektion auch eine Bestimmung der Kantenorientierung möglich ist. Die durchgeführte theoretische Untersuchung des geometrischen Signals motiviert damit auch eine Umsetzung im Diskreten, um auf Anwendungen in der Bildverarbeitung hinzuarbeiten.

2.4 Der eindimensionale Teager-Filter

Die geometrische Einbettung im Diskreten

Der Teager-Filter ist ein typischer quadratischer Filter, der zur Kantendetektion und Kontrastverbesserung eingesetzt wird. Die Anwendung des Operators im Diskreten ist ein erster Schritt zur praktischen Anwendbarkeit der im vorigen Abschnitt gewonnenen theoretischen Erkenntnisse.

Im Vergleich zu linearen Filtern ist dieser Filter weniger anfällig gegenüber Rauschen. Die zweidimensionale Variante eignet sich daher gut für die Bildverarbeitung und wird im Abschnitt 3.2 des folgenden Kapitels beschrieben. In diesem Abschnitt sollen zuvor einige grundlegende Eigenschaften der reellwertigen Filterantwort mit denen der multivекtoriellen Filterantwort verglichen werden. Im Sinne der Anschaulichkeit wird der Fall eines eindimensionalen Signals betrachtet:

$$x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.49)$$

Die Konstruktion der geometrischen Form dieses diskreten Signals erfolgt in einer dem kontinuierlichen Modell sehr ähnlichen Weise. Basierend auf dem eigentlichen Signal werden die Datenpunkte zunächst in vektorieller Form in die euklidische Ebene \mathbb{R}^2 übertragen:

$$\mathbf{x} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x}(n) = n \cdot \mathbf{e}_x + x(n) \cdot \mathbf{e}_y \quad (2.50)$$

Die im Kontinuierlichen verwendete Ableitung wird durch den Differenzoperator ersetzt. Dieser wird hier so definiert, dass die Anwendung sowohl auf die reellwertigen Datenpunkte des ursprünglichen Signals als auch auf die vektoriellen Datenpunkte in der euklidischen Ebene erfolgen kann:

$$\Delta_m[\mathbf{x}(n)] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \Delta_m[\mathbf{x}(n)] = \mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}(n) \quad (2.51)$$

Anschaulich formuliert wird nun zwischen jeweils zwei sequentiell aufeinander folgenden Datenpunkten ein Vektor aufgespannt und der dazu orthogonale Vektor gebildet, so dass dieser ebenfalls in der euklidischen Ebene liegt. Die Erzeugenden σ_1 und σ_2 der Algebra \mathcal{G}_2 werden wiederum mit den euklidischen Basisvektoren \mathbf{e}_x und \mathbf{e}_y identifiziert:

$$\mathbf{X} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{G}_2, \quad \mathbf{X}(n) = -\Delta_1[x(n)] \cdot \sigma_1 + \sigma_2, \quad \mathbf{X}(n) \equiv \mathbf{e}_z \times \Delta_2[\mathbf{x}(n)] \quad (2.52)$$

Es ist anzumerken, dass in jeder praktischen Implementierung die Anzahl der Datenpunkte N endlich sein wird. Die hier beschriebene geometrische Konstruktion reduziert

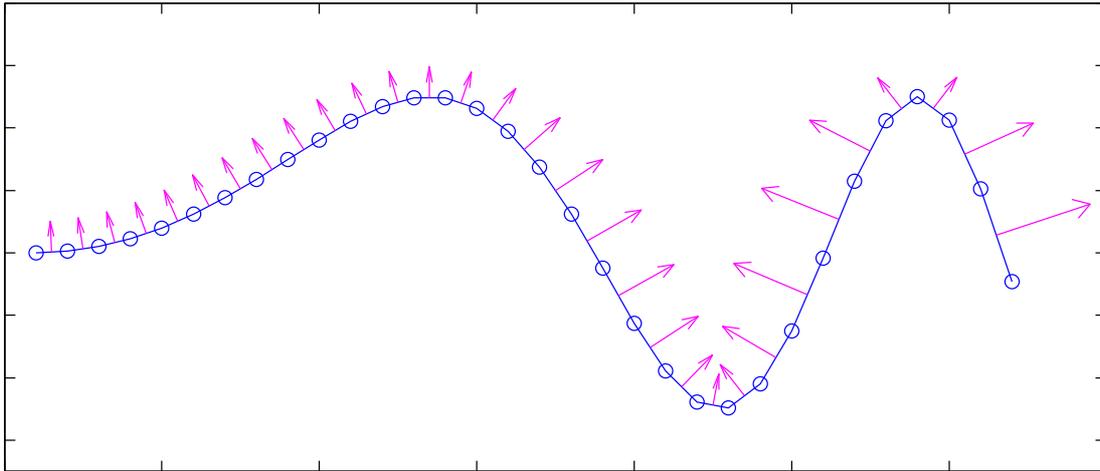


Abbildung 2.2: Diskretes, reellwertiges Signal, in Blau dargestellt, mit überlagert dargestelltem geometrischen Signal, in Magenta.

diese Zahl auf $N - 1$ Normalenvektoren. Dies begründet, dass die vektoriellen Daten des in Abbildung 2.2 gezeigten Beispiels nicht an den tatsächlichen Positionen der Datenpunkte sondern vielmehr auf den dazwischenliegenden Verbindungen visualisiert werden. Dort wird weiterhin ersichtlich, dass das geometrische Signal nicht nur in Form der Orientierung geometrische Information erzeugt. Da die Vektoren nicht normalisiert werden, enthält der Betrag ebenso ein Maß für die Steigung des Signals.

Definition des eindimensionalen Teager-Filters

Nach Definition des diskreten geometrischen Signals für den eindimensionalen Fall wird nun der dazu passende Teager-Filter eingeführt. Dieser wird ausschließlich über einen Volterra-Kern zweiter Ordnung definiert:

$$h_2 : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_2(k_1, k_2) = \delta(k_1, k_2) - \delta(k_1 + 1, k_2 - 1) \quad (2.53)$$

Die Antwort des Teager-Filters auf ein eindimensionales Signal kann als eine dementsprechende Funktion angegeben werden. Die Anwendung des Volterra-Kerns auf das diskrete geometrische Signal wird mittels der multivektoriellen Faltung realisiert. Da der verwendete Kern rein skalar ist, kann gleichermaßen die linksseitige (2.30) wie die

rechtsseitige Faltung (2.31) gewählt werden:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}(n) &= (h_2 *_{l} \mathbf{X})(n) \\
 &= (\mathbf{X} *_{r} h_2)(n) \\
 &= \mathbf{X}^2(n) - \mathbf{X}(n-1) \mathbf{X}(n+1)
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Verhalten als Kantendetektor

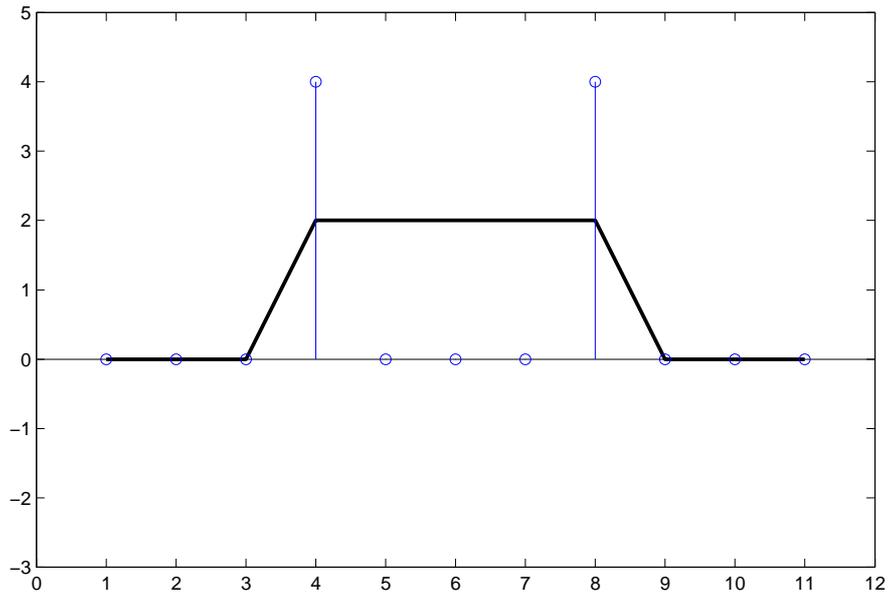
In der Praxis wird der Teager-Filter unter anderem als ein Kantendetektor verwendet. Dabei spielt vor allem seine Stabilität gegenüber Signalrauschen eine wichtige Rolle. Auf diesen Aspekt wird im nachfolgenden Kapitel in Abschnitt 3.2 näher eingegangen. Hier sollen vorerst grundlegende Eigenschaften der Filterantwort im Diskreten betrachtet werden. Der eindimensionale Fall eignet sich gut, um manche Sachverhalte anschaulicher darzustellen.

Die Abbildung 2.3(a) zeigt ein Signal, das zwei Kanten enthält. So ist zum einen eine steigende Flanke und zum anderen eine fallende Flanke enthalten. Wird der Teager-Filter auf dieses reellwertige Signal angewendet, so werden beide Kanten detektiert. Dies ist hier auf Grund des symmetrischen Charakters des Filters nicht anders zu erwarten. Dabei ist zu bemerken, dass beide Kanten unabhängig von steigender oder fallender Flanke im höherwertigen Bereich des Signals registriert werden. Es ist in diesem Ansatz nicht möglich, systematisch die Orientierung der Kante zu bestimmen.

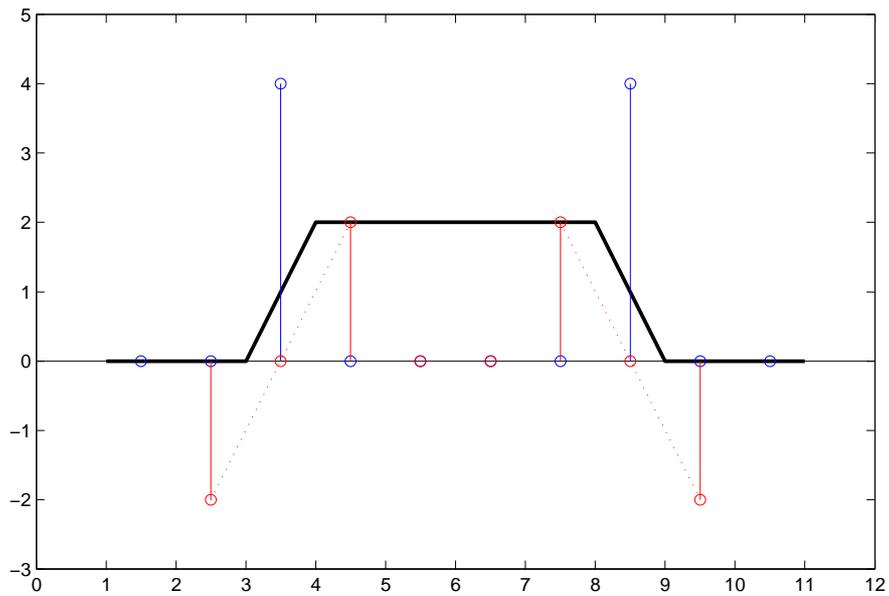
Zum Vergleich enthält die Abbildung 2.3(b) die Antwort des Teager-Filters auf das geometrische Signal. Dabei ist zu bemerken, dass N ursprüngliche Datenpunkte in $N-1$ Vektoren überführt wurden. Der Teager-Filter arbeitet nun auf genau diesen Vektoren. Die einzelnen Vektoren der entsprechend multivektoriellen Filterantwort sind damit nicht länger einem Datenpunkt des reellwertigen Signals zuzuordnen, sondern vielmehr dem Übergang zwischen zwei solchen Datenpunkten.

Der Filter antwortet mit einem skalaren Impuls genau an der Position der Kante. Die Detektion und Lokalisation ist also weiterhin möglich. Zusätzlich existiert nun aber ein pseudoskalarer Anteil in der Filterantwort. Dieser zeichnet sich durch ein sehr interessantes Verhalten aus.

Der pseudoskalare Anteil ist an der Position der Kante gerade Null. Anders jedoch in den einer Kante benachbarten Positionen. Dort existiert ein pseudoskalarer Anteil, der echt verschieden von Null ist. Zudem gibt er Aufschluss über die Orientierung der Kante. Im Falle eines reellwertigen Signals wurde die Symmetrie bei der Beschreibung des Filterverhaltens angesprochen. Es handelt sich bei dem lokal betrachteten Unterschied der



(a)



(b)

Abbildung 2.3: Antwort des Teager Filters auf eine Kante steigender sowie fallender Flanke; das Eingangssignal ist in beiden Fällen in Schwarz hervorgehoben: (a) Die Antwort auf das reellwertige Signal in Blau und (b) die Antwort auf das geometrische Signal mit dem skalaren Anteil der Antwort in Blau sowie dem pseudoskalaren Anteil in Rot.

steigenden und fallenden Flanke um die gleichen Eingangsdaten in lediglich veränderter Reihenfolge. Für das multivektorielle Signal muss nun die Antikommutativität des geometrischen Produkts beachtet werden. Gerade diese Eigenschaft führt dazu, dass sich bei einer umgekehrten Reihenfolge der Daten das Vorzeichen ändert.

Die geometrische Einbettung und das spezielle multiplikative Verhalten, das die geometrische Algebra dem Filter aufprägt, erweitern somit die Interpretierbarkeit der Filterantwort.

Der skalare Anteil ermöglicht die Detektion und Lokalisierung von Kanten. Durch das Betrachten der pseudoskalaren Anteile in den der so lokalisierten Kante benachbarten Positionen kann die Orientierung festgestellt werden.

Es konnte also bisher festgestellt werden, dass der Teager-Filter seine Eigenschaft als Kantendetektor auch bei der Anwendung auf multivektorielle Signale beibehält. Die Betrachtung des kontinuierlichen Modells hatte dies bereits voraussehen lassen. Zudem konnte der pseudoskalare Anteil der Filterantwort als ein Maß für die Orientierung bestätigt werden.

Verhalten als Liniendetektor

Neben der Kantendetektion kann das Verhalten des Filters auch an Linien verglichen werden. Abbildung 2.4 vergleicht die Antworten des Teager-Filters auf reellwertige und geometrische Signale unterschiedlicher Ausprägungen. Es werden drei verschiedene Formen von Linien betrachtet. Dabei wird zwischen positiven und negativen Linien unterschieden, sowie die Auswirkungen einer Verschiebung entlang der Ordinate untersucht.

Im Fall des reellwertigen Signals führen sowohl die positive als auch die negative Linie bei einer Grundlinie auf dem Nullniveau zu gleichen Filterantworten. Dies ist auf den quadratischen Term des Filters zurückzuführen, der das Vorzeichen des Signals in diesem Fall auflöst. Eine Unterscheidung der Ausrichtung ist hier anhand der Filterantwort nicht möglich.

Das Verschieben der Linie entlang der Ordinate führt zu einer ausgeprägteren Filterantwort. Diese könnte hier einen Ansatz zur Interpretation geben. Es ist jedoch festzustellen, dass ähnliche Antworten auch mit andersartigen Signalen erzeugt werden können. Dies ist beispielsweise mit einer sich vollständig im negativen Bereich befindlichen Linie anderer Ausrichtung möglich. Dort würden dann im Vergleich zu der hier dargestellten Linie die gleichen und damit in diesem Fall falschen Schlussfolgerungen bezüglich der Orientierung der Linie gezogen werden.

Die gleichen Signale werden nun in das geometrische Signal umgerechnet und ebenso durch den Teager-Filter verarbeitet. Die Filterantwort weist nun zusätzliche Komponenten auf, worauf sich neue Interpretationsmöglichkeiten ergeben.

Zunächst fällt auf, dass die Linie in allen drei Fällen mittels der links wie rechts angrenzenden Vektoren in zwei separate Kanten unterteilt wurde. Diese Kanten wurden durch den Filter detektiert. Auch hier ist die Ausrichtung der Kanten durch den jeweils benachbarten pseudoskalaren Anteil feststellbar. Es ist hervorzuheben, dass die Lokalisierung einer Linie durch zwei direkt benachbarte vektorielle Kanten eindeutig möglich ist. Zusätzlich kann die Ausrichtung dieser Linie festgestellt werden, indem die den jeweiligen Kanten zugeordnete pseudoskalare Information verwendet wird.

Wie durch die Art der geometrischen Konstruktion weiterhin zu erwarten war, hat die Verschiebung des Signals entlang der Ordinate in diesem Fall keinen Einfluss auf die Filterantwort. Die Filterantworten auf die ursprüngliche und die verschobene negative Linie sind im Fall des geometrischen Signals identisch.

Insgesamt konnten in diesem Kapitel also weitreichende Ergebnisse erzielt werden. Nach der Einführung quadratischer Filter und dem Konzept der geometrischen Algebra wurde ein auf reellwertigen Daten basierendes geometrisches Signal konstruiert. Die Anwendung eines klassischen Operators und quadratischen Filters darauf führte im Kontinuierlichen wie im Diskreten zu interessanten Merkmalen in der Filterantwort. Dadurch wird die Übertragung der Methode in die zweidimensionale Bildverarbeitung motiviert. Dies geschieht im nun folgenden Kapitel.

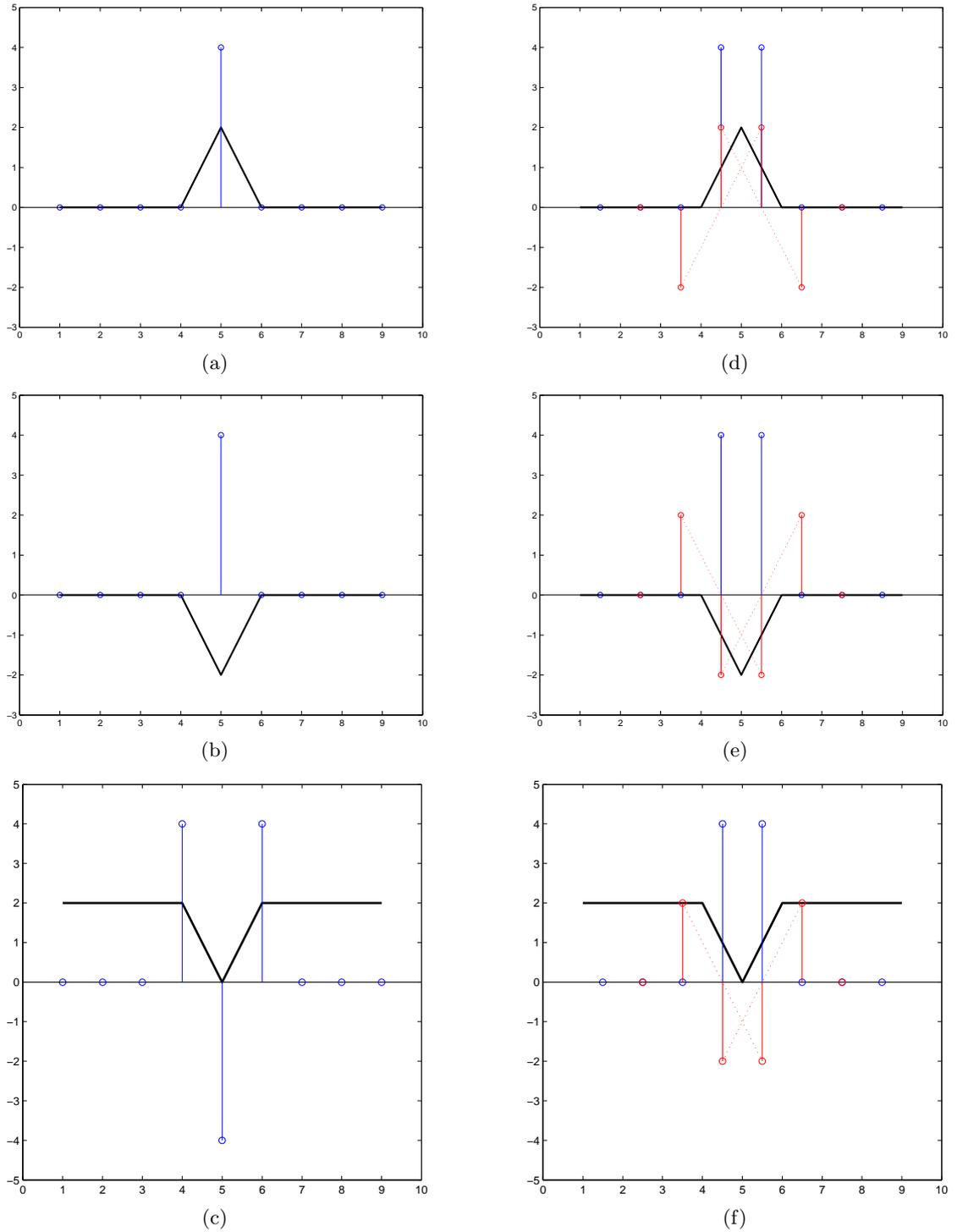


Abbildung 2.4: Die Antwort des Teager-Filters auf verschiedene Arten von Linien, jeweils in Schwarz hervorgehoben, zunächst für das reellwertige Signal einer (a) positiven Linie, (b) negativen Linie und (c) einer negativen Linie bei Verschiebung entlang der Ordinate; (d) bis (f) zeigen die Antworten auf das entsprechende geometrische Signal mit dem skalaren Anteil der Antwort in Blau und dem pseudoskalaren Anteil in Rot.

3 Entwurf des multivektoriellen Teager-Filters

3.1 Überblick

Im vorherigen Kapitel wurde der eindimensionale Teager-Filter betrachtet. Im klassischen Fall handelt es sich hierbei um einen einfachen Kantendetektor für reellwertige Signale, der durch einen quadratischen Volterra-Kern definiert wird. Durch die Konstruktion eines geometrischen Signals wurde eine entsprechend multivektorielle Filterantwort generiert. Der reellwertige Kern des Filters wurde allerdings nicht modifiziert. Die Anwendung des Filters erfolgte durch die Faltungsoperation in geometrischer Algebra. Während das charakteristische Verhalten des Teager-Filters im skalaren Anteil der Antwort erhalten blieb, konnte ein zusätzlicher Informationsgewinn in der pseudoskalaren Komponente festgestellt werden.

Das Verfahren soll nun auf ein zweidimensionales Signal übertragen und weiterführend untersucht werden. In dem nachfolgenden Abschnitt dieses Kapitels wird dazu der zweidimensionale Teager-Filter vorgestellt. Für das weitere Vorgehen ist dann die entsprechend zweidimensionale Formulierung des geometrischen Signals erforderlich. Die direkte Verallgemeinerung der bisherigen Konstruktion ist allerdings nicht möglich. Daher wird eine für zweidimensionale Signale spezifische Variante entwickelt.

Das geometrische Signal wurde bisher in einem Schritt der Vorverarbeitung berechnet. Für die Anwendung des eigentlichen Filters wird es als bereits gegeben vorausgesetzt. Die Erzeugung des geometrischen Signals ist somit nicht formal in die Signalverarbeitung integriert. Das Ziel des Filterentwurfs soll aber sein, ein reellwertiges Signal direkt verarbeiten zu können. Dazu wird die Berechnung des zweidimensionalen geometrischen Signals mathematisch aufbereitet und als ein Faltungskern in geometrischer Algebra formuliert. Auf dieser Grundlage entsteht der multivektorielle Teager-Filter, dessen Antwort auf ein reellwertiges Signal gerade der Antwort des klassischen Teager-Filters auf das konstruierte geometrische Signal entspricht. Damit entfällt die bisher notwendige Vorverarbeitung, während weiterhin äquivalente Ergebnisse erzielt werden.

Der multivektorielle Teager-Filter erlaubt es, die bisher eher phänomenal beschriebenen Auswirkungen der geometrischen Einbettung auf formale Weise zu untersuchen. Im Anschluss an dieses Kapitel werden die verschiedenen Bestandteile und Komponen-

ten der multivektoriellen Filterantwort separiert und ihre Bedeutung identifiziert. Dies ermöglicht einen Blick auf die innere Funktionsweise des neu entworfenen Filters.

3.2 Der zweidimensionale Teager-Filter

Als Grundlage der in dieser Arbeit entwickelten multivektoriellen Filter dient der klassische, reellwertige Teager-Filter. Im vorherigen Kapitel wurde der eindimensionale Teager-Filter als Approximation des Energieoperators betrachtet. Im Folgenden wird nun der zweidimensionale Teager-Filter vorgestellt, der als ein isotroper Kantendetektor in der Bildverarbeitung eingesetzt wird. Neben der Definition wird auch auf seine spezifischen Eigenschaften eingegangen.

Viele Anwendungen in der zweidimensionalen Signalverarbeitung basieren auf der seriellen oder parallelen Ausführung von eindimensionalen Konzepten in verschiedenen Orientierungen und gegebenenfalls der anschließenden Überlagerung der einzelnen Ergebnisse. Dieses Vorgehen erlaubt auf sehr einfache Weise die Verwendung von bewährten Verfahren der eindimensionalen Signaltheorie in zweidimensionalen Anwendungsgebieten wie etwa der Bildverarbeitung. Auch im Fall des Teager-Filters wird diese Methode genutzt und die eindimensionale Definition des Kerns (2.53) für die Anwendung in verschiedenen Orientierungen generalisiert.

Es wird in diesem Kapitel also ein diskretes, zweidimensionales Signal betrachtet. Dieses sei für diesen Abschnitt als reellwertig vorausgesetzt. Auf diese Weise können etwa die Intensitäten eines Graustufenbildes repräsentiert werden:

$$x : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Für ein solches Signal existieren vier Möglichkeiten von Achsenorientierungen. Dies sind die Horizontale, die Vertikale, sowie die zwei Diagonalen. Entsprechend diesen Orientierungen ergeben sich aus dem eindimensionalen Teager-Filter die vier orientierten Basisfilter y_h , y_v , y_{d1} und y_{d2} für die Anwendung auf ein zweidimensionales Signal:

$$y_h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_h(m, n) = x^2(m, n) - x(m-1, n)x(m+1, n) \quad (3.2)$$

$$y_v : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_v(m, n) = x^2(m, n) - x(m, n-1)x(m, n+1) \quad (3.3)$$

$$y_{d1} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_{d1}(m, n) = x^2(m, n) - x(m-1, n-1)x(m+1, n+1) \quad (3.4)$$

$$y_{d2} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_{d2}(m, n) = x^2(m, n) - x(m+1, n-1)x(m-1, n+1) \quad (3.5)$$

In der ursprünglichen Form des Teager-Filters geht aus einem Approximationsverfahren die Verwendung der zwei orthogonalen Basisfilter y_h und y_v in horizontaler und vertikaler Orientierung hervor.^[8] Aus der Überlagerung ergibt sich somit die orthogonale Variante des zweidimensionalen Teager-Filters:

$$\begin{aligned}
y_o : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_o(m, n) &= y_h(m, n) + y_v(m, n) \\
&= 2x^2(m, n) \\
&\quad - x(m-1, n)x(m+1, n) \\
&\quad - x(m, n-1)x(m, n+1)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Dieser Filter bietet erwartungsgemäß Eigenschaften eines zweidimensionalen Kantendetektors. Dennoch tritt bei dieser Definition ein Problem auf. Bei der Verwendung des orthogonalen Teager-Filters ist festzustellen, dass gerade orthogonale Ecken nicht von dem Filter detektiert werden. Dieser Effekt ist durch die überlagerte Arbeitsweise des Filters zu erklären. Abbildung 3.1(a) zeigt ein zweidimensionales Signal, dessen linke obere Ecke eine niedrigere Amplitude als die restliche Umgebung aufweist. Die Antwort des orthogonalen Teager-Filters in Abbildung 3.1(b) zeigt, dass keine Erkennung der Ecke stattfindet und somit der Zusammenhang der horizontalen und vertikalen Kante verloren geht.

Bei Betrachtung des Eingangssignals in jeweils exklusiv horizontaler und exklusiv vertikaler Richtung werden entsprechend der Definition des zweidimensionalen, orthogonalen Teager-Filters Zeilen und Spalten des diskreten Trägers separat verarbeitet. Eine Kante entspricht nun einem Sprung in der Amplitude des Signals und es wurde bereits bei der Betrachtung des eindimensionalen Teager-Filters festgestellt, dass die Filterantwort bei Detektion einer Kante gerade an der Position der höheren Seite dieser Amplitudenänderung auftritt. Es wird deutlich, dass weder der horizontale noch der vertikale Teager-Filter in seiner jeweiligen Funktion als orientierter Kantendetektor eine Antwort an der Position der Ecke generieren wird. In der Konsequenz liefert ebenso wenig die Überlagerung der einzelnen Filter eine Antwort und damit auch nicht der bisher definierte zweidimensionale Teager-Filter.

Dieses Verhalten des Teager-Filters ist nicht unbedingt wünschenswert. Ecken repräsentieren je nach Interpretation einen Orientierungswechsel innerhalb einer Kante oder aber den Berührungspunkt von zwei Kanten. Auf ihre spezielle Bedeutung in der zweidimensionalen Signalverarbeitung wird weiterhin in Kapitel 4 eingegangen. In jedem Fall sind sie aber ein Bestandteil von Kanten und sollten als solcher auch von einem Kantendetektor in die Filterantwort integriert werden. Als eine Lösung für die-

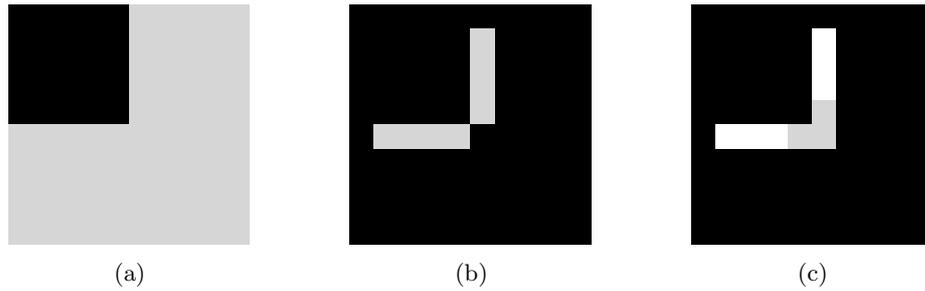


Abbildung 3.1: Antworten verschiedener Teager-Filter auf eine orthogonale Ecke: (a) Eingangssignal, (b) Antwort des orthogonalen Teager-Filters durch Überlagerung von y_h und y_v und (c) Antwort des diagonalen Teager-Filters durch Überlagerung von y_{d1} und y_{d2} .

ses Problem wurde zunächst die Verwendung des diagonalen Filterpaares y_{d1} und y_{d2} vorgeschlagen.^[13]

$$\begin{aligned}
 y_d : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_d(m, n) &= y_{d1}(m, n) + y_{d2}(m, n) \\
 &= 2x^2(m, n) \\
 &\quad - x(m-1, n-1)x(m+1, n+1) \\
 &\quad - x(m-1, n+1)x(m+1, n-1)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Tatsächlich wird durch diese Kombination die Erkennung von orthogonalen Ecken ermöglicht, wie die entsprechende Filterantwort in Abbildung 3.1(c) zeigt. Es ist jedoch naheliegend, dass dieses Vorgehen die Problematik lediglich verlagert. Bei Betrachtung einer diagonalen Ecke, wie sie etwa in Abbildung 3.2(a) dargestellt ist, erweist sich wiederum das diagonale Filterpaar als untauglich für eine zufriedenstellende Erkennung. Die Antwort des diagonalen Teager-Filters mit der entsprechenden Unterbrechung an der Position der Ecke zeigt Abbildung 3.2(b). In diesem Fall wäre der zuvor betrachtete orthogonale Teager-Filter die erfolgreichere Variante. Dieser erlaubt, wie in der Filterantwort in Abbildung 3.2(c) zu sehen ist, die erfolgreiche Erkennung der diagonalen Ecke.

Es wurden bisher also zwei Varianten des Teager-Filters betrachtet, nämlich zum einen diejenige auf Grundlage des orthogonalen und zum anderen die auf Grundlage des diagonalen Filterpaares. In beiden Fällen wird eine zuverlässige Detektion von Kanten realisiert. Es lassen sich jedoch für beide Varianten Beispiele konstruieren, in denen spezielle Ecken trotz ihres Beitrags zu den vorhandenen Kanten nicht in die jeweilige Filterantwort integriert werden. Dies zeigt, dass die Wahl der Basisfilter deutlich zu dem Verhalten

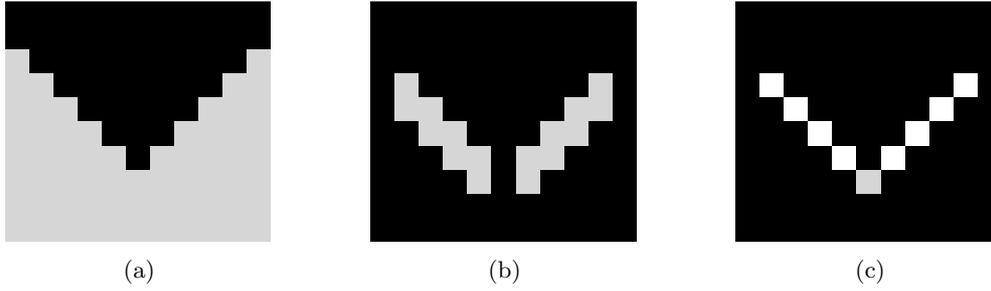


Abbildung 3.2: Antworten verschiedener Teager-Filter auf eine diagonale Ecke: (a) Eingangssignal, (b) Antwort des diagonalen Teager-Filters durch Überlagerung von y_{d1} und y_{d2} und (c) Antwort des orthogonalen Teager-Filters durch Überlagerung von y_h und y_v

des resultierenden Filters beiträgt.

Die letztendlich zufriedenstellende Lösung für das Problem der Eckenerkennung bietet ein neueres Verfahren.^[10] Dieses folgt dem Ansatz, die wiederholte Überlagerung des orthogonalen und diagonalen Filterpaares zu verwenden, oder anders formuliert die Überlagerung sämtlicher vier Basisfilter. So entsteht ein näherungsweise isotroper Filter über einem vollständigen 3×3 Träger:

$$\begin{aligned}
 y : \mathbb{Z}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & y(m, n) &= y_o(m, n) + y_d(m, n) \\
 & & &= y_h(m, n) + y_v(m, n) + y_{d1}(m, n) + y_{d2}(m, n) \\
 & & &= 4x^2(m, n) \\
 & & &\quad - x(m-1, n)x(m+1, n) \\
 & & &\quad - x(m, n-1)x(m, n+1) \\
 & & &\quad - x(m-1, n-1)x(m+1, n+1) \\
 & & &\quad - x(m-1, n+1)x(m+1, n-1)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Der vollständige Teager-Filter integriert in allen konstruierten Problemsituationen die jeweiligen Ecken in die Filterantwort und erfüllt damit die Anforderungen an einen geeigneten Kantendetektor. Abbildung 3.3 zeigt das Ergebnis sowohl für eine orthogonale als auch eine diagonale Ecke.

Die Wahl des Kerns des zweidimensionalen Teager-Filters wurde nun ausführlich beschrieben und motiviert. Im Folgenden soll kurz auf den Vorzug des Teager-Filters gegenüber herkömmlichen linearen Verfahren eingegangen werden. Bei Kantendetektoren handelt es sich im Allgemeinen um Filter, die bei ihrer Betrachtung im Frequenzraum eine Hochpasscharakteristik aufweisen. Dies ist dadurch begründet, dass gerade sprung-

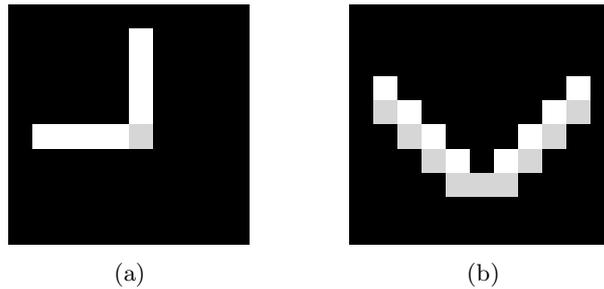


Abbildung 3.3: Antworten des vollständigen Teager-Filters auf (a) eine orthogonale und (b) eine diagonale Ecke. Zu den jeweiligen Eingangssignalen siehe Abbildungen 3.1(a) und 3.2(a).

hafte Änderungen und Unstetigkeiten in einem Signal an hohe Frequenzen gebunden sind. Durch Auswahl gerade dieser Frequenzen ist die Erkennung der durch sie charakterisierten Kanten möglich. Auf Grund dieser Eigenschaft entsteht aber auch leicht eine Empfindlichkeit solcher Filter gegenüber Signalstörungen, die sich in eben diesem Frequenzbereich befinden und im Fenster des lokal begrenzten Filterkerns vergleichbare Eigenschaften einer Kante aufweisen. Solche Störungen treten beispielsweise als binäres oder überlagertes Rauschen auf. In der Bildverarbeitung entsteht dieses Problem durch fehlerhafte oder verhältnismäßig ungenaue Sensoren von Digitalkameras und Scannern.

Lineare Filter erweisen sich in der Praxis als vergleichsweise empfindlich gegenüber Signalstörungen. Ein häufiges Hilfsmittel ist daher die Verwendung eines Glättungsoperators, um vor der Anwendung des eigentlichen Filters eventuelle Artefakte und Rauschen möglichst zu entfernen. Dabei ist problematisch, dass unbeabsichtigt auch tatsächliche Kanten unterdrückt werden können. Hier muss von Fall zu Fall ein Kompromiss entwickelt werden. Weiterhin entfällt die Anwendbarkeit des Glättungsoperators dann, wenn die ermittelten Kanten für die Kontrastverbesserung eingesetzt werden. In diesem Fall muss zu Gunsten der Bildschärfe auf die vorangehende Glättung verzichtet werden. Eine Rauschunterdrückung ist dann kaum noch zu realisieren.

Der quadratische Teager-Filter ermöglicht es, ausgewählte Paare von Datenpunkten miteinander zu vergleichen, und auf dieser Basis einen stabileren Objektzusammenhang zu erzeugen. Durch diese Methode wird der Einfluss einzelner Fehler im Signal verringert und das Ergebnis insgesamt deutlich verbessert. Abbildung 3.4 zeigt anhand eines verrauschten Signals den Vorteil des Teager-Filters gegenüber dem Laplace-Filter, einem typischen Beispiel für einen linearen Kantendetektor. Während zwar beide Filter die Kante an sich detektieren können, erzeugt der Teager-Filter eindeutig weniger fehlerhafte Beiträge.

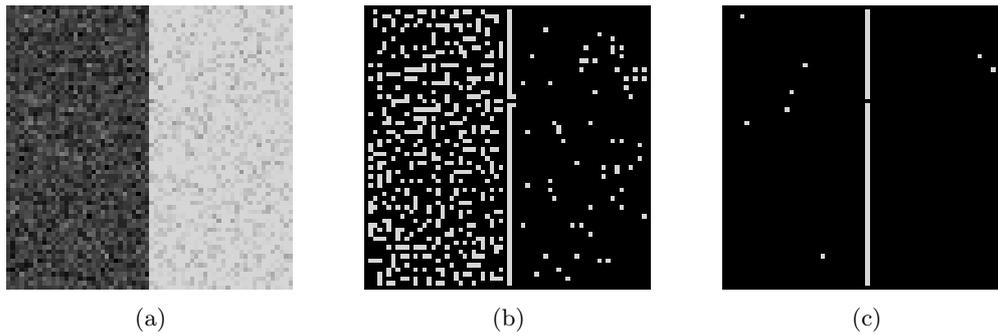


Abbildung 3.4: Ergebnisse der Anwendung verschiedener Filter auf ein verrauschtes Signal nach anschließender Verwendung eines adaptiven Schwellenwerts:^[14] (a) Eingangssignal, (b) Antwort des Laplace-Filters und (c) Antwort des reellwertigen Teager-Filters.

Insgesamt sind also zwei hauptsächliche Eigenschaften des klassischen Teager-Filters festzuhalten. Zum einen bietet dieser quadratische Filter im Vergleich zu linearen Operatoren eine erhöhte Stabilität gegen Signalstörungen. Insbesondere falsch positive Ergebnisse werden vermieden. Zum anderen basiert der Kern auf der Überlagerung verschiedener Basisfilter, die durch den eindimensionalen Teager-Filter motiviert sind und sich jeweils nach den möglichen Orientierungen im Signal richten. Während diese Basisfilter vergleichbare Eigenschaften teilen, bestimmt ihre spezifische Auswahl das Verhalten des Teager-Filters im Detail, etwa bei der Verarbeitung von Ecken. Diese zwei Eigenschaften werden nach dem nun folgenden Entwurf des multivektoriellen Teager-Filters erneut in Kapitel 4 aufgegriffen und für den Vergleich der klassischen mit der multivektoriellen Variante verwendet.

3.3 Konstruktion des geometrischen Signals

Als Grundlage des Entwurfs des multivektoriellen Teager-Filters dient zunächst ein geometrisches Signal, welches mittels des klassischen Teager-Filters verarbeitet wird. Der einleitenden Entwicklung des eindimensionalen geometrischen Signals aus Kapitel 2 folgend soll hier eine ähnliche Konstruktion erfolgen. In diesem Abschnitt wird also weiterhin der rein reellwertige Teager-Filter verwendet. Erst im nachfolgenden Abschnitt 3.4 wird der definierende Einfluss der geometrischen Algebra von dem Signal auf den Filterkernel verlagert.

In einem ersten Schritt der geometrischen Einbettung findet eine Methode aus der Differentialgeometrie Anwendung. Das reellwertige Signal x wird in der Form einer Höhen-

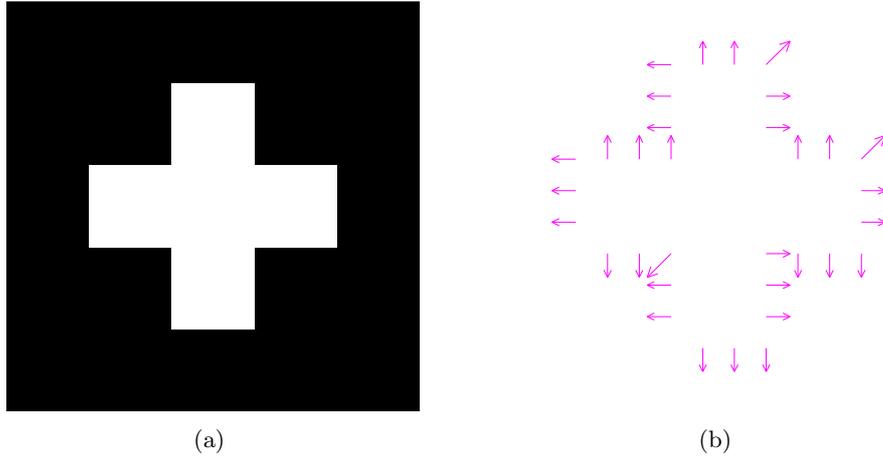


Abbildung 3.5: Beispiel für die Berechnung der Orientierungsvektoren auf Grundlage zweier Differenzoperatoren: (a) Eingangssignal und (b) Ergebnis mit inkonsistentem Verhalten an den Ecken. Orientierungsvektoren in Bereichen homogener Intensität des Eingangssignals sind orthogonal zur Bildebene ausgerichtet und nicht dargestellt.

karte in eine vektorielle Darstellung überführt. Diese Höhenkarte kann als eine diskrete Form eines Monge-Patch angesehen werden.^[15] Dadurch wird ein erstes vektorielles Signal im euklidischen Raum erzeugt:

$$\mathbf{x} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x}(m, n) = m \cdot \mathbf{e}_x + n \cdot \mathbf{e}_y + x(m, n) \cdot \mathbf{e}_z \quad (3.9)$$

Ähnlich der Beschreibung des eindimensionalen geometrischen Signals soll hier die Idee eines orthogonalen Vektors wieder aufgegriffen werden. Im Falle eines kontinuierlichen Monge-Patch wäre ein solcher Vektor tatsächlich in jedem Ort der Höhenkarte definiert. Dies ist jedoch für den hier vorliegenden diskreten Fall nicht gegeben. Die Problematik soll im Folgenden kurz verdeutlicht werden.

Zur Entwicklung des zweidimensionalen Teager-Filters wurde im vorangegangenen Abschnitt 3.2 bereits die Methode der orientierten Überlagerung eindimensionaler Konzepte beschrieben und ausführlich verwendet. Der zur eindimensionalen Konstruktion des geometrischen Signals analoge Ansatz würde somit auf zwei Differenzoperatoren, etwa Δ_x und Δ_y , basieren. Abbildung 3.5 zeigt das Resultat dieses Verfahrens, bei dem zunächst die eindimensionalen geometrischen Signale separat in horizontaler und vertikaler Orientierung berechnet und die Ergebnisse anschließend überlagert wurden.

Das Eingangssignal des gewählten Beispiels enthält insbesondere Ecken in verschiedenen Orientierungen. Die an diesen Orten berechneten Orientierungsvektoren verdeutli-

chen das Problem dieses ersten Ansatzes. Die Resultate weisen dort keine einheitliche Charakteristik auf. Weiterhin werden sie dem Zusammentreffen zweier Kanten nicht gerecht, da in einigen Fällen die Präsenz einer der Kanten nicht durch den Orientierungsvektor repräsentiert, sondern vielmehr ignoriert wird.

Die Ursache ist nachvollziehbar. Bei Betrachtung der Wirkungsweise der zwei Differenzoperatoren an einem festen, aber beliebigen Aufpunkt wird ersichtlich, dass lediglich der rechte sowie der untere Nachbar in die Berechnung des Orientierungsvektors einbezogen werden. Der diagonal versetzte Nachbar rechts unterhalb des Aufpunkts hat dagegen keinen Einfluss auf das Ergebnis.

Es ist also festzuhalten, dass der Ansatz der direkten Verallgemeinerung des eindimensionalen geometrischen Signals keine zufriedenstellenden Ergebnisse für den zweidimensionalen Fall erzielen kann. Auf Grund dieser Resultate ist der Ansatz als Grundlage für den Entwurf eines sich gleichmäßig verhaltenden Filters ungeeignet. Nachfolgend wird daher ein Orientierungsvektor für zweidimensionale Signale entwickelt, der diese Problematik behebt. Um einen solchen gleichmäßigen Orientierungsvektor zu berechnen, wird ein Verfahren beschrieben, dass vier benachbarte Datenpunkte integriert. Während der nachfolgenden Herleitung dient die Abbildung 3.6 der Veranschaulichung einzelner Entwicklungsschritte.

Einleitend wird zunächst erneut das reellwertige Signal betrachtet. In einem beliebigen, aber festen Aufpunkt $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ integriert das Verfahren nun den Wert des Signals in diesem Aufpunkt mit dem Wert des rechten, unteren und diagonalen Nachbarn. Es wird der Mittelwert w dieser vier Datenpunkte gebildet:

$$w = \frac{1}{4}(x(m, n) + x(m + 1, n) + x(m, n + 1) + x(m + 1, n + 1)) \quad (3.10)$$

Ein Mittelwert kann ebenso in der zuvor beschriebenen Höhenkarte (3.9) bestimmt werden. Es ergibt sich dann der vektorielle Mittelpunkt \mathbf{w} , der sich im dreidimensionalen Raum der Höhenkarte im Zentrum der vier vektoriellen Datenpunkte befindet:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{1}{4}(\mathbf{x}(m, n) + \mathbf{x}(m + 1, n) + \mathbf{x}(m, n + 1) + \mathbf{x}(m + 1, n + 1)) \\ &= (m + \frac{1}{2}) \cdot \mathbf{e}_x + (n + \frac{1}{2}) \cdot \mathbf{e}_y + w \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nun können vier Richtungsvektoren \mathbf{d}_i angegeben werden, die jeweils von diesem Mittelpunkt \mathbf{w} auf die umliegenden vektoriellen Datenpunkte der Höhenkarte ausgerichtet

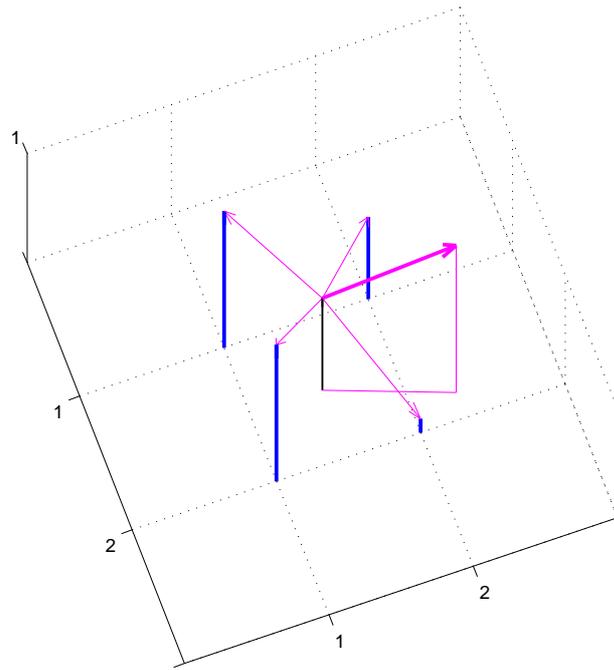


Abbildung 3.6: Konstruktion des gleichmäßigen Orientierungsvektors, in Magenta hervorgehoben. Die Grundlage bilden die Richtungsvektoren d_1 bis d_4 , ebenfalls in Magenta dargestellt, die vier miteinander benachbarte Datenpunkte in Relation zu deren Mittelwert setzen.

sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{d}_1(m, n) &= \mathbf{x}(m, n) - \mathbf{w} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}_y + (x(m, n) - w) \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_2(m, n) &= \mathbf{x}(m + 1, n) - \mathbf{w} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}_y + (x(m + 1, n) - w) \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_3(m, n) &= \mathbf{x}(m, n + 1) - \mathbf{w} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}_y + (x(m, n + 1) - w) \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_4(m, n) &= \mathbf{x}(m + 1, n + 1) - \mathbf{w} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}_y + (x(m + 1, n + 1) - w) \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.15)$$

Die jeweiligen Koeffizienten der Basisvektoren \mathbf{e}_x und \mathbf{e}_y lassen erkennen, dass diese Vektoren \mathbf{d}_i bezüglich der xy -Ebene in eine vom Signal unabhängige Richtung zeigen. Werden die Vektoren also auf diese Ebene projiziert, das heißt der Anteil der \mathbf{e}_z Komponente zu Null gesetzt, kann ein jeweils orthogonaler Vektor angegeben werden, der ebenfalls in der xy -Ebene liegt. Mit Hilfe des so konstruierten orthogonalen Vektors in der xy -Ebene und des jeweils ursprünglich zugeordneten Richtungsvektors \mathbf{d}_i wird eine Ebene im Raum aufgespannt. Mittels des Kreuzprodukts wird der dazugehörige Normalenvektor \mathbf{N}_i gebildet:

$$\mathbf{N}_i : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{N}_1 \equiv \mathbf{d}_1 \times (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) \quad (3.16)$$

$$\mathbf{N}_2 \equiv \mathbf{d}_2 \times (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{N}_3 \equiv \mathbf{d}_3 \times (-\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{N}_4 \equiv \mathbf{d}_4 \times (-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \quad (3.19)$$

Die nun berechneten Normalenvektoren \mathbf{N}_i beschreiben das Verhältnis jeweils eines der vier benachbarten Datenpunkte zu deren Mittelwert. Der Höhenunterschied der Datenpunkte, beziehungsweise der Intensitätsunterschied bezogen auf das ursprüngliche Signal, wird dabei gleich durch zwei Größen vermittelt. Zum einen ist dies die Ausrichtung der Normalenvektoren, da ein größerer Intensitätsunterschied im Signal dazu führt, dass die Richtungsvektoren \mathbf{d}_i einen größeren Koeffizienten in der \mathbf{e}_z Komponente aufweisen. Entsprechend stärker neigt sich der Normalenvektor. Zum anderen erhöht sich damit aber auch der Betrag der Vektoren, der sich, da keine Normalisierung stattfindet,

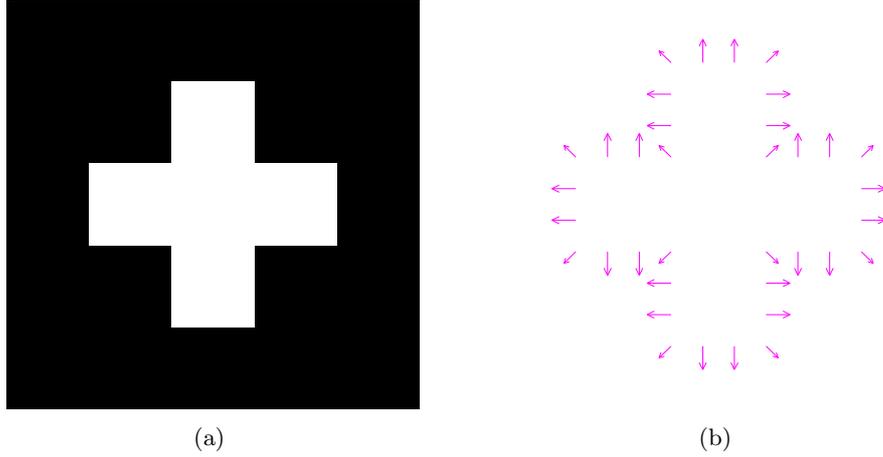


Abbildung 3.7: Beispiel für die Berechnung der Orientierungsvektoren des hier entwickelten zweidimensionalen geometrischen Signals: (a) Eingangssignal und (b) Orientierungsvektoren mit insbesondere in den Ecken gleichmäßigem Verhalten. Orientierungsvektoren in Bereichen homogener Intensität des Eingangssignals sind orthogonal zur Bildebene ausgerichtet und nicht dargestellt.

ebenfalls auf die Normalenvektoren überträgt.

Es ist aber auch zu betonen, dass ein gleichmäßiges Anheben von vier derart verbundenen Datenpunkten keine Auswirkung auf die Normalenvektoren hat. Da die zugrundeliegenden Richtungsvektoren \mathbf{d}_i auf dem Mittelwert \mathbf{w} basieren, wird jede absolute Verschiebung kompensiert. Lediglich das relative Verhältnis der vier Datenpunkte untereinander beeinflusst das Resultat der Normalenvektoren. In Kapitel 4 werden die Auswirkungen dieser Eigenschaft auf das Filterverhalten deutlich.

Die Konstruktion der vier Normalenvektoren \mathbf{N}_i wurde nun ausführlich erklärt. So ist schließlich die Berechnung des angestrebten gleichmäßigen Orientierungsvektors möglich, der sich durch den einfachen Mittelwert der Normalenvektoren ergibt. Dieser Orientierungsvektor wird in die Algebra \mathcal{G}_3 eingebettet und bildet so schließlich das zweidimensionale geometrische Signal \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{G}_3, \quad \mathbf{n} \mapsto \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \mathbf{N}_k(\mathbf{n}) \quad \mathbf{e}_x \equiv \sigma_1, \quad \mathbf{e}_y \equiv \sigma_2, \quad \mathbf{e}_z \equiv \sigma_3 \quad (3.20)$$

Abbildung 3.7 zeigt das nun konsistente Verhalten der Konstruktion bezüglich unterschiedlich orientierter Ecken. Der Orientierungsvektor des geometrischen Signals repräsentiert in jedem Fall eine angemessene Information bezüglich der Intensitätsverhältnisse innerhalb des Eingangssignals.

3.4 Der multivektorielle Teager-Filter

Im vorherigen Abschnitt wurde das zweidimensionale geometrische Signal entwickelt. Dies war durch das Vorgehen in Kapitel 2 motiviert, in dem der reellwertige Teager-Filter auf ein eindimensionales geometrisches Signal angewendet wurde. Die Methode wurde dort explizit in zwei Schritte unterteilt. Zum einen handelte es sich dabei um die Vorverarbeitung des reellwertigen Signals zur Berechnung der geometrischen Einbettung. Dieser Schritt kann als ein Operator \mathbf{X} bezeichnet werden, der die spezielle Konstruktion durchführt. Zum anderen wurde dann der klassische Teager-Filter auf diese Einbettung angewendet, der hier als ein Operator auf Basis eines rein reellwertigen Filters mit T bezeichnet sei. Das Ergebnis dieser zweistufigen Methode ist ein multivektorielles Ausgangssignal, das kurz als \mathbf{Y} notiert werden kann:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{n}) = T[\mathbf{X}[x(\mathbf{n})]] \quad (3.21)$$

Es ist hervorzuheben, dass der Teager-Filter selbst zwar mit Hilfe der multivektoriellen Faltungsoperation auf das geometrische Signal angewendet werden kann, die Berechnung dieses Signals jedoch auf eine eher informelle und konstruktive Weise erfolgte. Bezüglich der signaltheoretischen Betrachtungen wurde die Verfügbarkeit des geometrischen Signals bisher vorausgesetzt und nicht in die formale Signalverarbeitung integriert.

Für den zweidimensionalen Fall soll es nun das Ziel sein, die zwei beschriebenen Einzelschritte zu einem Operator \mathbf{T} zusammenzuführen, so dass das Ergebnis \mathbf{Y} durch die direkte Anwendung eines multivektoriellen Volterra-Filters auf das reellwertige Eingangssignal berechnet werden kann:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{n}) = (T[\mathbf{X}])[x(\mathbf{n})] = \mathbf{T}[x(\mathbf{n})] \quad (3.22)$$

3.4.1 Der Kern des geometrischen Signals

Zunächst muss die geometrisch motivierte Konstruktion der Orientierungsvektoren in eine Darstellung überführt werden, die für eine mathematische und signaltheoretische Betrachtungsweise geeignet ist. Dies soll ein vektorieller Kern sein, der bei Faltung mit dem reellwertigen Eingangssignal das geometrische Signal erzeugt.

Es ist festzustellen, dass ein Großteil der in Abschnitt 3.3 zur Konstruktion des geometrischen Signals aufgestellten Formeln auf Konstanten basiert. Die einzelnen Normalenvektoren (3.16) bis (3.19) werden beispielsweise durch das Kreuzprodukt zwischen einem

in nur einer Komponente signalabhängigen und einem konstanten Vektor bestimmt. Dieses Kreuzprodukt kann explizit ausgerechnet werden:

$$\mathbf{N}_1(m, n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ x(m, n) - w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(m, n) - w \\ x(m, n) - w \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Jeder der vier verwendeten Normalenvektoren kann auf diese Weise explizit angegeben werden. Dadurch wird eine kompakte vektorielle Darstellung erreicht:

$$\mathbf{N}_2(m, n) = \begin{bmatrix} -x(m+1, n) + w \\ x(m+1, n) - w \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{N}_3(m, n) = \begin{bmatrix} x(m, n+1) - w \\ -x(m, n+1) + w \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{N}_4(m, n) = \begin{bmatrix} -x(m+1, n+1) + w \\ -x(m+1, n+1) + w \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Das zweidimensionale geometrische Signal (3.20) wurde als der einfache Mittelwert dieser Normalenvektoren definiert. Bei der Darstellung der gemittelten Normalenvektoren durch die kompakten Formulierungen (3.23) bis (3.26) wird deutlich, dass der Mittelwert w der ursprünglichen Bildpunkte an dieser Stelle entfällt:

$$\mathbf{X}(m, n) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x(m, n) - x(m+1, n) + x(m, n+1) - x(m+1, n+1) \\ x(m, n) + x(m+1, n) - x(m, n+1) - x(m+1, n+1) \\ 4 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Durch diese Formulierung hat die Konstruktion des geometrischen Signals bereits deutlich an Komplexität verloren. Es wird weiterhin erkennbar, dass die folgende Verlagerung des Operatorfensters keine Auswirkungen auf die Funktionsweise hat: Um der Bestimmung eines für die Faltungsoperation geeigneten Filterkerns näher zu kommen, soll der Aufpunkt nicht mehr wie bisher den linken oberen der vier Datenpunkte bezeichnen, sondern vielmehr den rechten unteren. Die Verschiebung aller Ortsangaben m und n in (3.27) um -1 erreicht genau dies und führt zu einer funktional gleichwertigen Definition

des geometrischen Signals:

$$\mathbf{X}(m, n) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x(m-1, n-1) - x(m, n-1) + x(m-1, n) - x(m, n) \\ x(m-1, n-1) + x(m, n-1) - x(m-1, n) - x(m, n) \\ 4 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Anhand dieser Darstellung ist die konstante Komponente des Signals leicht zu erkennen. Diese kann bereits jetzt als ein Volterra-Kern der Ordnung Null separiert werden:

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (3.29)$$

Nach der Abtrennung des konstanten Terms können die Summanden des geometrischen Signals (3.28) weiter separiert werden, so dass die skalaren Anteile des reellwertigen Signals und zugeordnete konstante, vektorielle Faktoren deutlich werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(m, n) &= \mathbf{h}_0 + x(m-1, n-1) \underbrace{\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T}_{\mathbf{h}_1(1,1)} \\ &\quad + x(m, n-1) \underbrace{\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T}_{\mathbf{h}_1(0,1)} \\ &\quad + x(m-1, n) \underbrace{\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T}_{\mathbf{h}_1(1,0)} \\ &\quad + x(m, n) \underbrace{\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T}_{\mathbf{h}_1(0,0)} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die Konstanten $\mathbf{h}_1(k, l)$ dienen nun der Aufstellung des vektoriellen Faltungskerns. Die jeweiligen Werte können aus den einzelnen Zeilen von (3.30) abgelesen und in einer Matrix vektorieller Elemente der Algebra \mathcal{G}_3 zusammengefasst werden:

$$\mathbf{h}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1(0,0) & \mathbf{h}_1(1,0) \\ \mathbf{h}_1(0,1) & \mathbf{h}_1(1,1) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Die Berechnung des geometrischen Signals kann somit als ein Volterra-Filter formuliert

werden, der sich aus dem konstanten Kern \mathbf{h}_0 sowie dem linearen Kern \mathbf{h}_1 zusammensetzt:

$$\mathbf{X}(\mathbf{n}) = \mathbf{h}_0 + \sum_i \mathbf{h}_1(\mathbf{i}) x(\mathbf{n} - \mathbf{i}) \quad (3.32)$$

Dies ist ein sehr wichtiges Zwischenergebnis. Die konstruktive Beschreibung des geometrischen Signals wurde in eine mathematische Darstellung überführt, die nun einer in der Signaltheorie üblichen Formulierung entspricht. Dadurch wird die Verknüpfung des geometrischen Signals mit signalverarbeitenden Filtern, die ebenfalls durch ihre Faltungskerne definiert sind, erheblich erleichtert. Insbesondere ist es nun möglich, unabhängig von einem Eingangssignal den Faltungskern des geometrischen Signals mit dem Kern eines beliebigen Filters derart zu verknüpfen, dass wiederum ein neuer, kombinierter Faltungskern daraus hervorgeht. So können aus klassischen Operatoren neue, multivektorielle Filter entstehen. Diese Methode soll im Folgenden auf den Teager-Filter angewendet werden.

3.4.2 Der multivektorielle Teager-Filter

Die nun in Form eines Volterra-Filters vorliegende Beschreibung des geometrischen Signals soll mit dem quadratischen Kern des Teager-Filter verknüpft werden. In Abschnitt 3.2 wurde bereits ausführlich das Merkmal des zweidimensionalen Teager-Filters diskutiert, auf der orientierten Anwendung des eindimensionalen Konzepts zu basieren. Durch die nun bevorstehende Kombination mit der geometrischen Algebra und der Verwendung des antikommutativen geometrischen Produkts wird neben der Orientierung auch die Richtung des Filters eine Rolle spielen. So wird es etwa im horizontalen Fall Auswirkungen haben, ob der linke mit dem rechten Nachbarn multipliziert wird, oder aber der rechte mit dem linken. Für eine möglichst allgemeine Betrachtung wird daher die Achse sowie die spezifische Richtung der Wirkungsweise des Filters durch einen Vektor \mathbf{d} angegeben:

$$\mathbf{d} = x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y, \quad x, y \in \{-1, 0, 1\} \quad (3.33)$$

Sei also \mathbf{d} im Folgenden beliebig gemäß (3.33), aber fest gewählt. Es sei beachtet, dass dadurch konsequent nur eine einzelne Richtung betrachtet wird und nicht wie im Falle des vollständigen zweidimensionalen Teager-Filters die Überlagerung mehrerer orientierter Basisfilter. Diese Vorgehensweise erleichtert die folgenden Rechnungen und schränkt dabei die Möglichkeiten des Filterentwurfs nicht ein. Das Überlagerungsprinzip kann später auf den gerichteten multivektoriellen Filter gleichermaßen angewendet werden.

Zunächst wird nun der bekannte quadratische Volterra-Kern des Teager-Filters für die durch \mathbf{d} bestimmte Achse und Richtung notiert. Dies entspricht einer verallgemeinerten Form der vier ursprünglichen Basisfilter (3.2) bis (3.5):

$$h_2 : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_2(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{l}) - \delta(\mathbf{k} + \mathbf{d})\delta(\mathbf{l} - \mathbf{d}) \quad (3.34)$$

So entsteht ein gerichteter Operator $T_{\mathbf{d}}$, der als Teager-Filter auf das bereits vektoriell eingebettete Signal \mathbf{X} wirkt. Bis hier gleicht die Vorgehensweise also der des eindimensionalen Falls:

$$T_{\mathbf{d}}[\mathbf{X}(\mathbf{n})] = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{l}} h_2(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \mathbf{X}(\mathbf{n} - \mathbf{k}) \mathbf{X}(\mathbf{n} - \mathbf{l}) \quad (3.35)$$

Um den Kern h_2 nun schrittweise mit den Kernen \mathbf{h}_0 und \mathbf{h}_1 des geometrischen Signals zu verknüpfen, wird zunächst eine Hilfsfunktion \mathbf{v} definiert, die für zwei gegebene Parameter \mathbf{m} und \mathbf{n} das geometrische Produkt des Eingangssignals an diesen Positionen berechnet:

$$\mathbf{v} : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{G}_3, \quad \mathbf{v}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \mathbf{X}(\mathbf{m}) \mathbf{X}(\mathbf{n}) \quad (3.36)$$

Durch Einsetzen dieser Funktion in (3.35) kann die Anwendung des gerichteten Teager-Filters in Form einer vierdimensionalen Faltung beschrieben werden, die sich aus der quadratischen Natur des Kerns h_2 sowie der Zweidimensionalität des ursprünglichen Signals ergibt:

$$T_{\mathbf{d}}[\mathbf{X}(\mathbf{n})] = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{l}} h_2(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \mathbf{v}(\mathbf{n} - \mathbf{k}, \mathbf{n} - \mathbf{l}) \quad (3.37)$$

Die Definition (3.32) des geometrischen Signals wird in die Funktion \mathbf{v} eingesetzt und das Produkt ausmultipliziert. Es entstehen dabei vier Terme:

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \mathbf{h}_0^2 \quad (3.38)$$

$$\mathbf{v}_{1a}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{h}_1(\mathbf{i}) \mathbf{h}_0 x(\mathbf{m} - \mathbf{i}) \quad (3.39)$$

$$\mathbf{v}_{1b}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{h}_0 \mathbf{h}_1(\mathbf{i}) x(\mathbf{n} - \mathbf{i}) \quad (3.40)$$

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{h}_1(\mathbf{i}) \mathbf{h}_1(\mathbf{j}) x(\mathbf{m} - \mathbf{i}) x(\mathbf{n} - \mathbf{j}) \quad (3.41)$$

Man beachte dabei, dass die Terme (3.39) und (3.40) sich sowohl in der jeweils exklusiven Verwendung des Arguments \mathbf{m} beziehungsweise \mathbf{n} unterscheiden, als auch in der Reihenfolge der Multiplikation der vektoriellen Faktoren. Die Funktion \mathbf{v} stellt sich nun

als die Summe dieser vier Terme dar:

$$\mathbf{v}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{m}, \mathbf{n}) + \mathbf{v}_{1a}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) + \mathbf{v}_{1b}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) + \mathbf{v}_2(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \quad (3.42)$$

Auf Grund der Linearität der Faltung können nun die Auswirkungen des Operators $T_{\mathbf{d}}$ auf die einzelnen Terme (3.38) bis (3.41) separat untersucht werden. Dabei wird die Eigenschaft genutzt, dass der Faltungskern dieses Operators in nur zwei Fällen verschieden von Null ist:

$$h_2(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = 1 \iff \mathbf{k} \equiv 0 \wedge \mathbf{l} \equiv 0 \quad (3.43)$$

$$h_2(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = -1 \iff \mathbf{k} = \mathbf{d} \wedge \mathbf{l} = -\mathbf{d} \quad (3.44)$$

Es wird zuerst die Faltung des Kerns (3.34) des gerichteten Teager-Filters mit dem konstanten Term (3.38) der Hilfsfunktion \mathbf{v} untersucht. Dass sich diese Operation zu Null summiert, zeigt, dass im Endergebnis kein konstanter, signalunabhängiger Beitrag zu erwarten ist:

$$(h_2 * \mathbf{v}_0)(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{l}} h_2(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \cdot \mathbf{h}_0^2 = \mathbf{h}_0^2 - \mathbf{h}_0^2 \equiv 0 \quad (3.45)$$

Es wird nun die Faltung des ersten linearen Terms (3.39) betrachtet. Die Eigenschaften (3.43) sowie (3.44) des reellwertigen Volterra-Kerns ermöglichen das Auflösen der Faltung und das Einsetzen von spezifischen Werten für die Summationsvariablen \mathbf{k} und \mathbf{l} :

$$(h_2 * \mathbf{v}_{1a})(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{l}} h_2(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{h}_1(\mathbf{i}) \mathbf{h}_0 \cdot x((\mathbf{n} - \mathbf{k}) - \mathbf{i}) \quad (3.46)$$

$$= \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{h}_1(\mathbf{i}) \mathbf{h}_0 \cdot x(\mathbf{n} - \mathbf{i}) \quad (3.47)$$

$$- \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{h}_1(\mathbf{i}) \mathbf{h}_0 \cdot x(\mathbf{n} - \mathbf{d} - \mathbf{i}) \quad (3.48)$$

Für die weitere Zusammenfassung dieser Darstellung wird in der Summation (3.48) die Substitution $\mathbf{i} + \mathbf{d} = \mathbf{p}$ vorgenommen. Zusätzlich wird eine an diese Substitution angepasste Hilfsfunktion definiert:

$$\mathbf{h}_{1a} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{G}_3, \quad \mathbf{h}_{1a}(\mathbf{p}) = \mathbf{h}_1(\mathbf{p} - \mathbf{d}) \quad (3.49)$$

Unter der Verwendung einer einheitlichen Summationsvariable können nun die linearen Faltungen (3.47) und (3.48) in einer gemeinsamen Faltung zusammengefasst werden:

$$(h_2 * v_{1a})(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{i}} (\mathbf{h}_1(\mathbf{i}) - \mathbf{h}_{1a}(\mathbf{i})) \mathbf{h}_0 \cdot x(\mathbf{n} - \mathbf{i}) \quad (3.50)$$

In analoger Vorgehensweise wird auch der zweite lineare Term (3.40) umgeformt. Es wird dabei eine entsprechende Substitution $\mathbf{i} - \mathbf{d} = \mathbf{q}$ und eine dazugehörige Hilfsfunktion verwendet. Man beachte den Vorzeichenwechsel im Vergleich zu der ersten Variante (3.49):

$$\mathbf{h}_{1b} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{G}_3, \quad \mathbf{h}_{1b}(\mathbf{q}) = \mathbf{h}_1(\mathbf{q} + \mathbf{d}) \quad (3.51)$$

So ergibt sich auch hier die zusammenfassende Darstellung mittels genau einer linearen Faltung. In diesem Fall wird jedoch die Konstante \mathbf{h}_0 nicht von rechts, sondern von links an den Faltungskern multipliziert:

$$(h_2 * v_{1b})(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{h}_0 (\mathbf{h}_1(\mathbf{i}) - \mathbf{h}_{1b}(\mathbf{i})) \cdot x(\mathbf{n} - \mathbf{i}) \quad (3.52)$$

Aus den zwei so erreichten linearen Faltungen (3.50) und (3.52) ergibt sich durch Überlagerung ein kombinierter Faltungskern. Dieser Kern fasst alle linearen Faltungsoperationen zusammen und beschreibt damit bereits den linearen Faltungskern des multivektoriellen Operators \mathbf{T}_d vollständig:

$$\mathbf{g}_1 : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{G}_3, \quad \mathbf{g}_1(\mathbf{i}) = (\mathbf{h}_1(\mathbf{i}) - \mathbf{h}_{1a}(\mathbf{i})) \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_0 (\mathbf{h}_1(\mathbf{i}) - \mathbf{h}_{1b}(\mathbf{i})) \quad (3.53)$$

Es bietet sich an dieser Stelle an, die im Laufe der Berechnungen durchgeführten Substitutionen rückgängig zu machen. Durch Einsetzen ergibt sich ein Faltungskern, der als eine direkte Funktion gerade derjenigen Kerne angegeben werden kann, die für die Definition (3.32) des geometrischen Signals verwendet wurden:

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{i}) = (\mathbf{h}_1(\mathbf{i}) - \mathbf{h}_1(\mathbf{i} - \mathbf{d})) \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_0 (\mathbf{h}_1(\mathbf{i}) - \mathbf{h}_1(\mathbf{i} + \mathbf{d})) \quad (3.54)$$

Schließlich verbleibt noch die Untersuchung des quadratischen Terms (3.41). Auch hier kann die Faltung des reellwertigen Kerns durch Einsetzen entsprechender Konstanten für

die Summationsvariablen aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} (h_2 * v_2)(\mathbf{n}, \mathbf{n}) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{l}} h_2(\mathbf{k}, \mathbf{l}) \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{h}_1(\mathbf{i}) \mathbf{h}_1(\mathbf{j}) x((\mathbf{n} - \mathbf{k}) - \mathbf{i}) x((\mathbf{n} - \mathbf{l}) - \mathbf{j}) \\ &= \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{h}_1(\mathbf{i}) \mathbf{h}_1(\mathbf{j}) x(\mathbf{n} - \mathbf{i}) x(\mathbf{n} - \mathbf{j}) \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$- \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{h}_1(\mathbf{i}) \mathbf{h}_1(\mathbf{j}) x(\mathbf{n} - \mathbf{d} - \mathbf{i}) x(\mathbf{n} + \mathbf{d} - \mathbf{j}) \quad (3.56)$$

Die bereits eingeführten Substitutionen (3.49) und (3.51) finden nun erneut Anwendung. Dadurch ist es möglich, die Summen (3.55) und (3.56) zusammenzufassen und in einer gemeinsamen vierdimensionalen Faltung darzustellen:

$$(h_2 * v_2)(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} (\mathbf{h}_1(\mathbf{i}) \mathbf{h}_1(\mathbf{j}) - \mathbf{h}_{1a}(\mathbf{i}) \mathbf{h}_{1b}(\mathbf{j})) \cdot x(\mathbf{n} - \mathbf{i}) x(\mathbf{n} - \mathbf{j}) \quad (3.57)$$

Die als Substitution verwendeten Funktionen können auch hier wieder durch ihre eigentlichen Definitionen ersetzt werden. So ergibt sich für den Operator $\mathbf{T}_{\mathbf{d}}$ ein multivektorieller quadratischer Filterkern:

$$\mathbf{g}_2 : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{G}_3, \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = \mathbf{h}_1(\mathbf{i}) \mathbf{h}_1(\mathbf{j}) - \mathbf{h}_1(\mathbf{i} - \mathbf{d}) \mathbf{h}_1(\mathbf{j} + \mathbf{d}) \quad (3.58)$$

So wurde schließlich das Ziel erreicht, die Berechnung des geometrischen Signals und die Anwendung des reellwertigen Teager-Filters darauf in multivektoriellen Faltungskernen zusammenzufassen. Diese bilden den als multivektoriellen Teager-Filter betitelten Operator $\mathbf{T}_{\mathbf{d}}$, einen Volterra-Filter, der sich sowohl aus einem linearen als auch aus einem quadratischen Kern zusammensetzt:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{d}}[x(\mathbf{n})] = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{g}_1(\mathbf{i}) x(\mathbf{n} - \mathbf{i}) + \sum_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{g}_2(\mathbf{i}, \mathbf{j}) x(\mathbf{n} - \mathbf{i}) x(\mathbf{n} - \mathbf{j}) \quad (3.59)$$

$$= \mathbf{G}_1[x(\mathbf{n})] + \mathbf{G}_2[x(\mathbf{n})] \quad (3.60)$$

Die in Kapitel 2.4 eingeführte Kombination eines geometrischen Signals mit dem Teager-Filter wurde somit nicht nur für die zweidimensionale Anwendung erweitert, sondern auch so formuliert, dass ihre vollständige Berechnung durch die einfache Anwendung eines Volterra-Filters auf das reellwertige Eingangssignal möglich ist.

Die weiterführende Untersuchung der Eigenschaften dieses Operators behandelt das nachfolgende Kapitel auf hauptsächlich experimentelle Weise. Dennoch seien hier zwei Merkmale analytischer Gestalt hervorgehoben.

Zum einen wurde festgestellt, dass der multivektorielle Teager-Filter selbst keinen konstanten Bestandteil enthält. Das Vorhandensein seines linearen Bestandteils ist dagegen gerade davon abhängig, dass die Konstruktion des geometrischen Signals wiederum einen solchen konstanten Bestandteil aufweist. Dies macht der lineare Faltungskern (3.54) des multivektoriellen Teager-Filters deutlich. Dieser verschwindet, wenn der konstante Anteil \mathbf{h}_0 des geometrischen Signals zu Null gesetzt wird.

Zum anderen sei hervorgehoben, dass die Berechnung der Kerne des multivektoriellen Teager-Filters vollständig unabhängig von der tatsächlichen Realisierung des geometrischen Signals erfolgte. Tatsächlich wurde die Definition der Kerne \mathbf{h}_0 und \mathbf{h}_1 an keiner Stelle verwendet. Daraus folgt, dass der multivektorielle Teager-Filter auf einfachste Weise an andere geometrische Einbettungen angepasst werden kann. Dies erlaubt einen großen Gestaltungsspielraum. So beschreibt der multivektorielle Teager-Filter genau genommen eine Gruppe von Filtern, deren spezifische Instanzen erst durch die Festlegung auf eine konkret verwendete geometrische Einbettung des Signals entstehen.

In diesem Kapitel wurde bereits zu Anfang ein solches spezifisches geometrisches Signal für zweidimensionale Anwendungen entworfen. Dieses soll im weiteren Verlauf auch verwendet werden. Dadurch entsteht ein spezieller multivektorieller Teager-Filter, der Gegenstand der folgenden Untersuchungen sein wird. Während also die Ergebnisse dieses Kapitels teilweise allgemeiner Natur sind, folgen nun spezielle Betrachtungen.

4 Experimentelle Ergebnisse

4.1 Voraussetzungen

Mit dem vorherigen Kapitel wurde die Herleitung des multivektoriellen Teager-Filters abgeschlossen. Bestandteil des Gesamtentwurfs ist zum einen die hier vorgeschlagene spezielle geometrische Einbettung reellwertiger Signale. Zum anderen wurde der multivektorielle Teager-Filter als Funktion einer beliebigen geometrischen Einbettung eingeführt. Der multivektorielle Teager-Filter stellt damit eine Vorlage für viele mögliche Instanzen multivektorieller Filter dar, die jeweils durch die Wahl einer spezifischen geometrischen Einbettung definiert werden können.

In diesem Kapitel soll nun die zuvor definierte geometrische Einbettung tatsächlich mit der Vorlage des multivektoriellen Teager-Filters verknüpft werden, um die konkrete Wirkungsweise dieser Kombination zu untersuchen. Es sei daran erinnert, dass der so definierte Operator aus einem linearen und einem quadratischen Volterra-Operator besteht. Es werden nun noch einmal die Vorstellungen zusammengefasst, die im Hintergrund dieses Entwurfs standen:

- Die skalare Komponente des Filterantwort dient der Kantendetektion. Diese sollte sich ähnlich dem klassischen Teager-Filter robust gegenüber Signalstörungen verhalten.
- Zusätzlich ist zu erwarten, dass der Filter unabhängig von einer Grundintensität des Signals und nur auf Basis des relativen Verhältnisses zwischen benachbarten Datenpunkten arbeitet.
- Die übrigen Komponenten der Filterantwort enthalten Informationen über die Orientierung der detektierten Kanten.

Die in der Herleitung verwendete Definition des linearen und des quadratischen Filterkerns des multivektoriellen Teager-Filters setzt die Wahl einer gerichteten Achse voraus, für die der Operator realisiert wird. Für die Veranschaulichung der Funktionsweise ist die Wahl beliebig und so wird für die hier präsentierten Beispiele die horizontale Ach-

se in der Richtung von links nach rechts gewählt. Daraus folgt die Spezifikation des Richtungsvektors:

$$\mathbf{d} = \mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Einige der in diesem Kapitel vorkommenden Beispiele wenden allerdings auch das Prinzip der Überlagerung an, um die Ergebnisse einer tatsächlich zweidimensionalen Anwendung zu präsentieren. Ganz ähnlich dem Verfahren im Fall des klassischen zweidimensionalen Teager-Filters wird dabei der für eine variable Orientierung definierte Basisfilter entlang verschiedener Achsen ausgeführt und die jeweiligen Ergebnisse überlagert.

Im Folgenden werden nun die konkreten Eigenschaften und Bestandteile des speziellen multivektoriellen Teager-Filters beschrieben. Dabei kommt eine besondere Bedeutung der Interpretation der bivektoriellen Komponenten zu. Der Einfachheit halber sei im Folgenden mit dem Begriff des multivektoriellen Teager-Filters die spezifische Instanz des Filters in Kombination mit der in Kapitel 3 vorgeschlagenen, speziellen geometrischen Einbettung gemeint.

4.2 Der Kantendetektor im Vergleich

Demonstration

Im klassischen Fall wird der Teager-Filter als ein reiner Kantendetektor verwendet. Der Erhalt dieser Eigenschaft ist daher eine naheliegende Anforderung an den Entwurf der multivektoriellen Variante. Wie auf Grund der Erkenntnisse im Fall des eindimensionalen geometrischen Signals in Kapitel 2 zu erwarten war, enthält der multivektorielle Teager-Filter tatsächlich einen Kantendetektor in der skalaren Komponente. Die Details dieses Aspekts sollen in diesem Abschnitt betrachtet werden.

Abbildung 4.1 visualisiert die Wirkungsweise des multivektoriellen Teager-Filters als Kantendetektor, indem der skalare Anteil der Filterantwort dem exemplarischen Eingangssignal überlagert dargestellt wird. Man beachte, dass hier der horizontal ausgerichtete Operator betrachtet wird, was die selektive Markierung der entsprechenden Kanten erklärt. Dabei begründet der durch die geometrische Einbettung vergrößerte Einzugsbereich des Filters die Integration der Ecken in die Filterantwort.

Es ist hervorzuheben, dass die äußeren und die inneren Kanten identisch ausgeprägte Filterantworten hervorrufen, obwohl die inneren Kanten absolut betrachtet eine höhere Intensität aufweisen. Hier bewährt sich die Idee, den Filter unabhängig von solchen

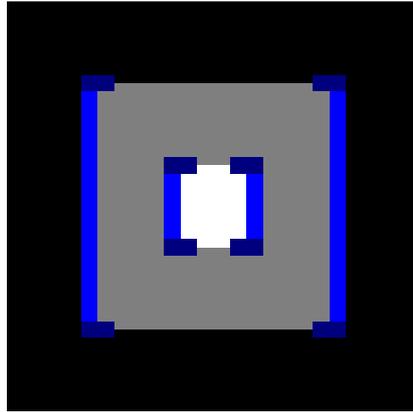


Abbildung 4.1: Der multivektorielle Teager-Filters als Kantendetektor: Eingangssignal in Graustufen, der skalare Anteil der Filterantwort überlagert in Blau dargestellt.

Anhebungen des Signals zu entwerfen und nur auf den relativen Intensitätsunterschieden lokal benachbarter Datenpunkte operieren zu lassen.

Qualität der Klassifikation

Um eine Kante in einem Signal nicht nur für einen menschlichen Betrachter hervorzuheben, sondern auch automatisch weiterzuverarbeiten, ist die Klassifikation der einzelnen Datenpunkte der Filterantwort nötig. Dies geschieht im Allgemeinen durch die Anwendung eines Schwellenwertes, der entscheidet, ab welcher Intensität der Filterantwort in einem Ort von einer Kante ausgegangen wird. Dadurch wird die reellwertige Filterantwort in eine binäre Form überführt, die jeden Punkt des Signals eindeutig klassifiziert.

Natürlich kann es bei dieser automatischen Verarbeitung zu Fehlern kommen, sei es durch lokal uneindeutige Daten oder tatsächliche Fehler im Signal, die sich in der Verarbeitung durch den Filter fortsetzen. Die Einschätzung eines Datenpunkts bezüglich eines Kriteriums wird dann als „falsch positiv“ (FP) beziehungsweise „falsch negativ“ (FN) bezeichnet, wenn ein Merkmal etwa fälschlicherweise als vorhanden klassifiziert wurde, beziehungsweise das tatsächliche Vorhandensein eines solchen Merkmals übersehen wurde. Erfolgte die Klassifikation dagegen korrekt, wird sie je nach Vorhandensein des Merkmals als „richtig positiv“ (TP) oder „richtig negativ“ (TN) bezeichnet.

Aus diesen vier verschiedenen möglichen Einstufungen der Klassifikation eines einzelnen Datenpunkts folgen die Begriffe der Sensitivität und der Spezifität. Die Sensitivität r ergibt sich dabei als der Anteil der als richtig positiv klassifizierten Datenpunkte von

allen tatsächlich vorhandenen positiv zu klassifizierenden Datenpunkten:

$$r = \frac{\#TP}{\#TP + \#FN} \quad (4.2)$$

Die Sensitivität eines Klassifikators beschreibt folglich die Wahrscheinlichkeit, dass ein vorhandenes Merkmal, in dem hier vorliegenden Fall also eine Kante, auch tatsächlich erkannt wird.

Die Spezifität s eines Klassifikators ergibt sich dagegen als der Anteil der als richtig negativ klassifizierten Datenpunkte von allen tatsächlich vorhandenen negativ zu klassifizierenden Datenpunkten:

$$s = \frac{\#TN}{\#TN + \#FP} \quad (4.3)$$

Durch die Spezifität wird also die Wahrscheinlichkeit angegeben, mit der Falschmeldungen ausgeschlossen werden können. Wünschenswert ist für einen guten Klassifikator also sowohl eine hohe Sensitivität als auch eine möglichst hohe Spezifität. Es handelt sich hier jedoch um konkurrierende Qualitätsmerkmale. Bei Erhöhung des Schwellenwertes werden weniger Datenpunkte als positiv klassifiziert, wodurch ab einem gewissen Maß auch die Zahl der richtig positiv klassifizierten Daten abnimmt und die Sensitivität sinkt. Die Spezifität steigt jedoch, da sich die Zahl der richtig negativ klassifizierten Daten durch einen erhöhten Schwellenwert nicht ändert, während die Zahl der falsch positiv klassifizierten zusammen mit den ganz allgemein als positiv klassifizierten Daten abnimmt. Durch das Absenken des Schwellenwertes kehren sich die Verhältnisse entsprechend um.

Die Optimierung des Schwellenwertes kann mit Hilfe der Neyman-Pearson-Strategie anhand sogenannter ROC-Kurven durchgeführt werden.^[16] Abbildung 4.2 zeigt solche Kurven für drei verschiedene Kantendetektoren, nämlich den linearen Laplace-Filter, den klassischen Teager-Filter und den multivektoriellen Teager-Filter.

Zur Bestimmung der ROC-Kurve eines Klassifikators wird für ein festes zugrundeliegendes Signal der Schwellenwert variiert und dabei kontinuierlich die erzielte Sensitivität r gegen die invertierte Spezifität $1 - s$ aufgetragen. Ein optimaler Schwellenwert liegt dann vor, wenn sich die Kurve dem Punkt $(0, 1)$ annähert und damit maximal von der Hauptdiagonalen entfernt. Eine ROC-Kurve ermöglicht so das Abwägen zwischen Sensitivität und der damit direkt verbundenen Spezifität.

Nach diesem Prinzip können nun die drei hier betrachteten Kantendetektoren beurteilt werden. In dem vorliegenden Fall wurde ein verrauschtes Signal verwendet, da sich die Qualität der drei Filter unter optimalen Bedingungen nicht unterscheidet. Anhand

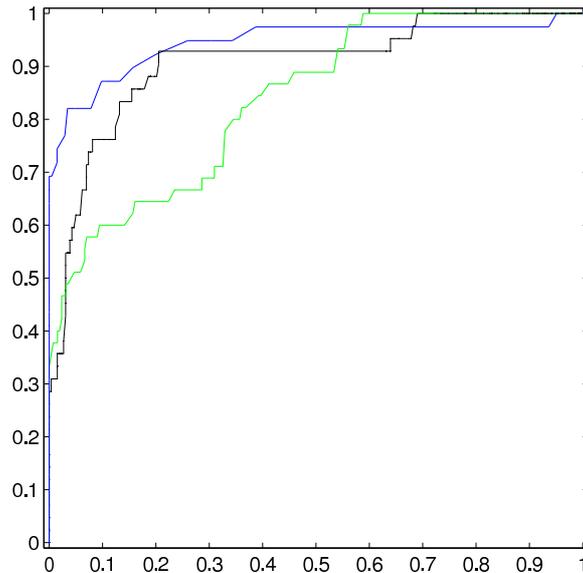


Abbildung 4.2: Typische ROC Kurven verschiedener Kantendetektoren: Der Laplace-Filter in Grün, der klassische Teager-Filter in Schwarz und die skalare Komponente des multivektoriellen Teager-Filters in Blau.

der ROC-Kurven ist erwartungsgemäß zu erkennen, dass der klassische Teager-Filter im Gegensatz zu dem linearen Laplace-Filter das Erreichen einer verhältnismäßig hohen Sensitivität ermöglicht, bevor die Spezifität abnimmt. Es ist aber auch zu erkennen, dass der neu entwickelte multivektorielle Teager-Filter ein noch besseres Verhältnis zwischen Sensitivität und Spezifität bietet. Er zeichnet sich damit als ein sehr zuverlässiger Kantendetektor aus.

Identifikation

Es wird nun der Teil des Kerns des quadratischen Operators untersucht, der den skalaren Anteil der Filterantwort erzeugt und damit für die Kantendetektion verantwortlich ist. Wie im einleitenden Kapitel zu polynomiellen Filtern bereits festgestellt wurde, kann die Impulsantwort des Operators nicht zur Identifizierung des quadratischen Volterra-Kerns verwendet werden. Da jedoch die interne Definition des Filters bekannt ist, kann stattdessen die vierdimensionale Faltung ausgewertet und das Ergebnis durch mehrere Projektionen abgebildet werden.^[17] Dabei wird eins der in sich zweidimensionalen Argumente festgehalten und der so fixierte Teil des Kerns als zweidimensionales Bild visualisiert. Das Ergebnis für den skalaren Anteil des multivektoriellen Teager-Filters

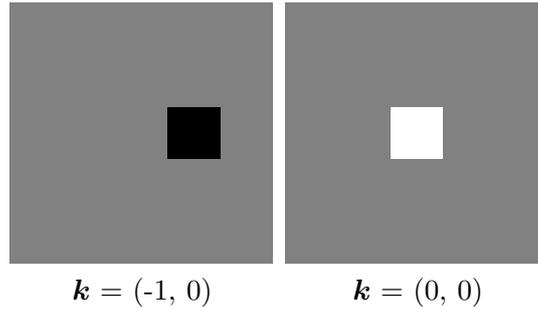


Abbildung 4.3: Identifikation des klassischen Teager-Filters: Zweidimensionale Projektionen des vierdimensionalen Volterra-Kerns $h_2(\mathbf{k}, \mathbf{l})$. Die Intensität der überwiegenen grauen Fläche entspricht Null, dunklere Felder visualisieren negative Werte, hellere entsprechen positiven Werten. Der Ursprung befindet sich im jeweiligen Zentrum der einzelnen Grafiken.

zeigt Abbildung 4.4. Zum Vergleich zeigt Abbildung 4.3 den verhältnismäßig einfachen Kern des Teager-Filters.

4.3 Intrinsisch zweidimensionale Strukturen

Demonstration

Neben dem zuvor betrachteten Kantendetektor enthält der multivektorielle Teager-Filter nun eine Komponente, deren Fehlen bei der Betrachtung des klassischen zweidimensionalen Teager-Filters in Kapitel 3 noch zu einigen Schwierigkeiten führte. Abbildung 4.5 zeigt die nun mögliche Detektion von Ecken im zweidimensionalen Signal durch die bivektorielle Komponente σ_{12} der Filterantwort des quadratischen Operators. Die Filterantwort tritt in diesem Fall genau an den Endpunkten der von der skalaren Komponente detektierten Kanten auf, wie ein Vergleich mit Abbildung 4.1 deutlich macht.

Diese Eigenschaft muss hervorgehoben werden. Der Modellierung sogenannter intrinsisch zweidimensionaler Strukturen kommt in der Signalverarbeitung besondere Bedeutung zu, da klassische Theorien stark auf eindimensionalen Konzepten basieren. Die formale Aufbereitung von tatsächlich zweidimensionalen Entitäten wie etwa Ecken oder gekrümmten Strukturen erweist sich als nicht trivial.

Von den verfügbaren Methoden, die die Detektion intrinsisch zweidimensionaler Strukturen dennoch ermöglichen, sei hier zum Vergleich eine auf dem monogenen Krümmungssignal basierende Variante gewählt.^[18] Diese ermöglicht zusätzlich die Schätzung der lokalen Hauptorientierung und Phase, was durch den multivektoriellen Teager-Filter allein nicht möglich ist. Bezüglich der bloßen Detektion jedoch sind die Ergebnisse kaum

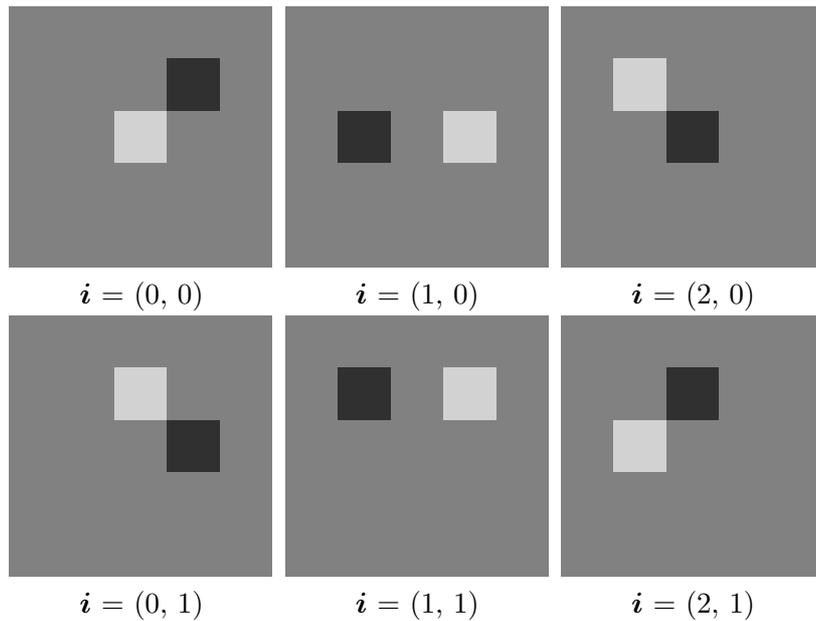


Abbildung 4.4: Identifikation des multivektoriellen Teager-Filters: Zweidimensionale Projektionen des vierdimensionalen Volterra-Kerns $g_2(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, hier der skalare Anteil. Die Intensität der überwiegenden grauen Fläche entspricht Null, dunklere Felder visualisieren negative Werte, hellere entsprechen positiven Werten. Der Ursprung befindet sich im jeweiligen Zentrum der einzelnen Grafiken.

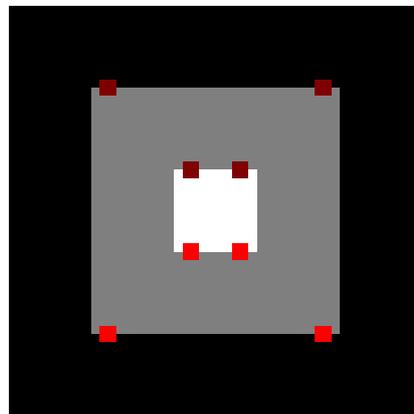


Abbildung 4.5: Der multivektorielle Teager-Filters als Eckendetektor: Eingangssignal in Graustufen, die bivektorielle Komponente des Anteils der Filterantwort überlagert in Rot dargestellt. Bei den dunkleren roten Markierungen handelt es sich um negative Werte, bei den helleren dagegen um positive.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 4.6: Die Detektion intrinsisch zweidimensionaler Strukturen durch die bivectorielle Komponente des multivectoriellen Teager-Filters: (a) Eingangssignal (b), Vergleich einer etablierten Methode^[18] und (c) Ergebnis des multivectoriellen Teager-Filters.

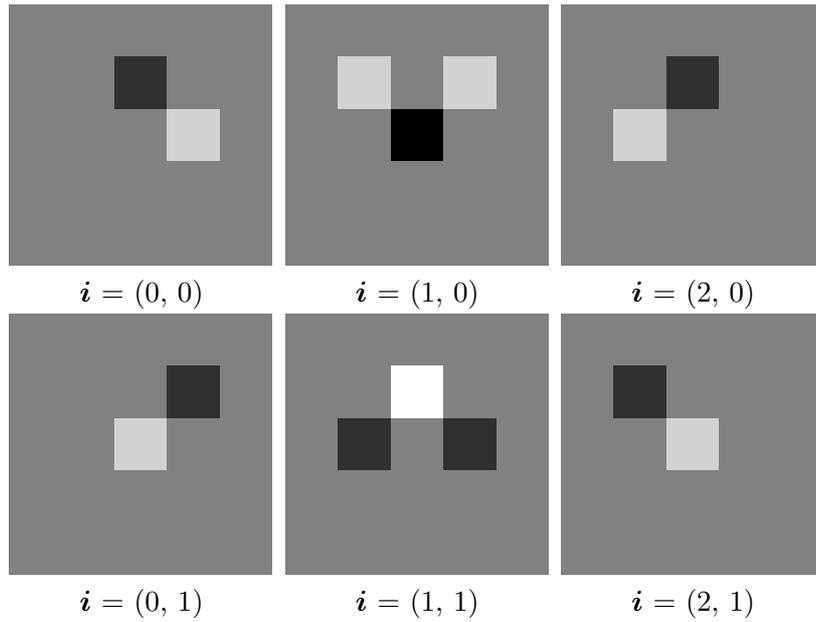


Abbildung 4.7: Identifikation des multivektoriellen Teager-Filters: Zweidimensionale Projektionen des vierdimensionalen Volterra-Kerns $\mathbf{g}_2(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, hier die bivektorielle Komponente $\sigma_{12} \equiv \mathbf{e}_z$. Die Intensität der überwiegenen grauen Fläche entspricht Null, dunklere Felder visualisieren negative Werte, hellere entsprechen positiven Werten. Der Ursprung befindet sich im jeweiligen Zentrum der einzelnen Grafiken.

unterscheidbar, wie der Vergleich in Abbildung 4.6 verdeutlicht. Auf einem sehr experimentellen Weg wurde also in diesem Punkt ein qualitativ gleichwertiges Ergebnis erzielt. Dass gerade die Verknüpfung der für höherdimensionale Erweiterungen konzipierten Volterra-Filter mit der vergleichbar motivierten geometrische Algebra zu einem derartigen Filter führt, ist sehr bemerkenswert.

Identifikation

Es wird nun die bivectorielle Komponente des quadratischen Volterra-Kerns bestimmt. Dazu wird wie im vorherigen Abschnitt bereits erläutert vorgegangen. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

Hier wird eine weitere interessante Eigenschaft ersichtlich. Rein phänomenal wurde bereits festgestellt, dass dieser Bestandteil des multivektoriellen Teager-Filters gerade selektiv auf die Endpunkte der Kanten wirkt, die durch die skalare Komponente detektierten werden. Beim Vergleich des hier dargestellten Kerns mit dem Kern des Kantendetektors in Abbildung 4.4 ist zu erkennen, dass die von Null verschiedenen Bestandteile gerade komplementär zueinander sind und sich ähnlich Puzzle-Teilen zusammenfügen.

4.4 Vektorielle Merkmale

Demonstration

Nachdem nunmehr alle Bestandteile des quadratischen Operators des multivektoriellen Teager-Filters beschrieben wurden, verbleibt noch der lineare Operator zur weiteren Betrachtung. Die Abbildung 4.8(a) stellt die Komponenten σ_{13} und σ_{23} der Antwort des multivektoriellen Teager-Filters auf das dort abgebildete Eingangssignal dar. Anhand dieser und der Abbildung 4.8(b) wird auch die Bedeutung der Wahl der Achse des multivektoriellen Teager-Filters deutlich.

Indem für die gewählte Richtung nicht länger e_x sondern $e_x + e_y$ verwendet wird, verändert sich das selektive Verhalten des Filters. Tatsächlich scheint es sich hier um eine ganz eigene Art von Kantendetektor zu handeln, oder zumindest um einen bezüglich Kanten selektiven Filter. Dieser Bestandteil des multivektoriellen Teager-Filters erzeugt eine Art Umrandung solcher Kanten, die durch die skalare Komponente detektiert werden.

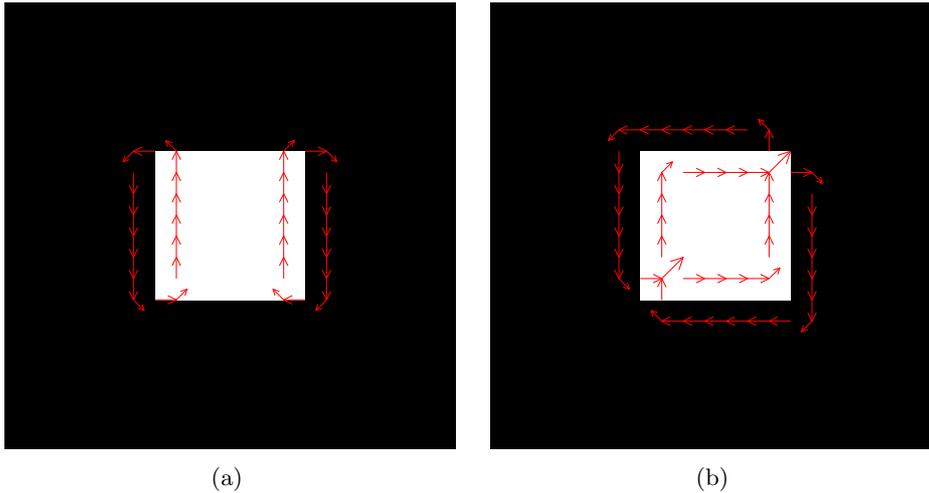


Abbildung 4.8: Generierung verschiedener vektorieller Merkmale durch die Wahl unterschiedlicher Orientierungen für die Definition des multivektoriellen Teager-Filters: (a) Horizontale Ausrichtung des Filters mit $\mathbf{d} = \mathbf{e}_x$ und (b) diagonale Ausrichtung des Filters mit $\mathbf{d} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$.

Verwendung vektorieller Merkmale

Sogenannte Merkmale finden insbesondere in der Verarbeitung von Bildfolgen Anwendung. Es handelt sich dabei um spezifische Strukturen oder Muster, die innerhalb eines Bildes detektiert werden können. Durch die Extraktion von Merkmalen innerhalb einer realen Szene können so etwa Korrespondenzen zwischen Aufnahmen aus verschiedenen Blickwinkeln hergestellt, oder bewegte Objekte verfolgt werden.

Im einführenden Kapitel dieser Arbeit wurde die Fourier-Transformation in geometrischer Algebra vorgestellt. Ebenso kann aber auch die erweiterte Korrelation definiert werden.^[19] So können auch innerhalb von vektoriellen Datensätzen übereinstimmende Bereiche festgestellt werden. Ein Generator vektorieller Merkmale wie der hier vorliegende könnte auf diesem Gebiet interessante Möglichkeiten eröffnen.

Identifikation

Im Falle des linearen Operators ist die Identifikation des Kerns einfacher als für die zuvor betrachteten quadratischen Volterra-Operatoren. Hier kann das einfache Konzept der Impulsantwort verwendet werden. Das Ergebnis für die gewählte Orientierung $\mathbf{d} = \mathbf{e}_x$ ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Es werden zwei entgegengesetzt orientierte Wirbel deutlich, die zu dem oben beschriebenen Verhalten an Kanten führen.

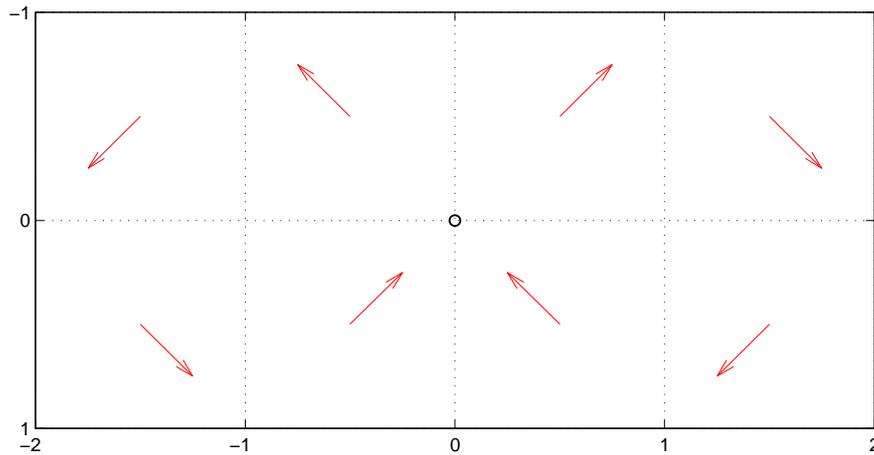


Abbildung 4.9: Die auf den bivectoriellen Basiselementen σ_{13} und σ_{23} basierende Impulsantwort des linearen Operators des multivektoriellen Teager-Filters für die gewählte Orientierung $\mathbf{d} = \mathbf{e}_x$.

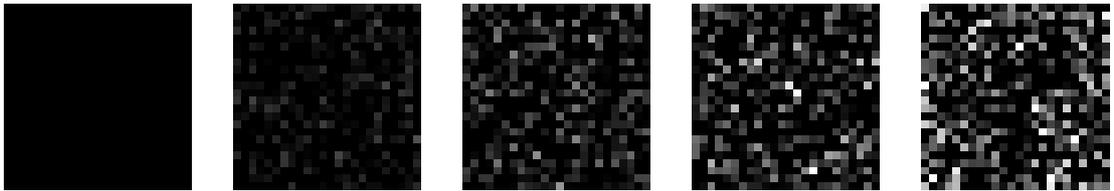


Abbildung 4.10: Testreihe von unterschiedlichen Realisierungen zufälligen Rauschens mit zunehmender Intensität.

4.5 Stabilität des Filters gegenüber Signalstörungen

In den vorangegangenen Abschnitten wurden einzelne Komponenten des multivektoriellen Teager-Filters separiert und ihre Bedeutung im Detail beschrieben. Diese Separierbarkeit ermöglicht es, jeden einzelnen der Bestandteile des multivektoriellen Teager-Filters als einen eigenständigen Filter zu betrachten. Die Zusammenhänge zwischen den Komponenten der Filterantwort und dem linearen und quadratischen Operator des multivektoriellen Teager-Filters sind noch einmal in der Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Der multivektorielle Teager-Filter kann aber auch als eine Einheit betrachtet werden. Das Wissen um die Hintergründe der einzelnen Komponenten ermöglicht dann ein tieferes Verständnis, wenn für den gesamten Filter relevante Eigenschaften untersucht werden. In diesem Abschnitt soll die Stabilität des gesamten multivektoriellen Teager-Filters gegenüber Signalstörungen betrachtet werden.

Bisher wurde diese Stabilität stets als bedeutender Vorteil des Teager-Filters betont. Dies bezog sich jedoch hauptsächlich im reellwertigen Fall auf den durch einen rein quadratischen Volterra-Kern definierten Kantendetektor. Auch in diesem Kapitel wurde bisher nur die skalare Komponente der Filterantwort auf diese Eigenschaft untersucht. Dies soll nun für den vollständigen multivektoriellen Teager-Filter nachgeholt werden. Die genauere Kenntnis der einzelnen Komponenten wird ein besseres Verständnis der nachfolgenden Resultate ermöglichen.

Für diese empirische Beobachtung wird ein zunächst vollkommen störungsfreies Testbild verwendet und die Antwort des klassischen und des multivektoriellen Teager-Filters darauf berechnet. Diese Antworten werden für sich genommen als die korrekte Ausgabe des jeweiligen Filters anerkannt und als Grundwahrheit für den weiteren Vergleich definiert. Es wird dann ein Rauschen über das Bild gelegt und der Anteil dieser Signalstörung in kleinen Abstufungen erhöht, wie etwa in Abbildung 4.10 exemplarisch dargestellt. In jedem Schritt wird die Antwort der beiden Filter auf das zunehmend verrauschte Signal erneut berechnet und der mittlere quadratische Fehler im Bezug auf die jeweiligen Grundwahrheiten über alle Bildpunkte ermittelt. Die Auftragung dieses Fehlers gegen die Intensität des Rauschens ist in Abbildung 4.11 dargestellt. Der Graph enthält eine Kurve für den Fehler des klassischen Teager-Filters und weitere Kurven für jede der Komponenten des multivektoriellen Filters, deren Beitrag zur Filterantwort nicht prinzipiell gleich Null ist.

Es ist erkennbar, dass der Fehler im skalaren Anteil des multivektoriellen Teager-Filters knapp unter dem des klassischen Teager-Filters liegt. Daraus kann geschlossen werden, dass die geometrische Einbettung bezüglich der Rauschempfindlichkeit des Filters keinen Qualitätsverlust verursacht. Vielmehr wurde die Empfindlichkeit gegenüber Signalstörungen in dieser Komponente sogar gesenkt. Als eine Ursache ist die implizite Mittelung zu nennen, die bei der Berechnung des geometrischen Signals erfolgt.

Einen besonders niedrigen Fehler weist die bivektorielle Komponente σ_{12} der Filterantwort auf, die wie der skalare Anteil durch den quadratischen Operator des multivektoriellen Teager-Filters erzeugt wird. Die jeweiligen Fehler der zwei bivektoriellen Kompo-

Komponente	Erzeugender Operator	Bedeutung	Dimensionalität
1	\mathbf{G}_2	Kantendetektor	i1D
σ_{12}	\mathbf{G}_2	Krümmungsdetektor	i2D
σ_{13}, σ_{23}	\mathbf{G}_1	Vektorielle Merkmale	–

Tabelle 4.1: Die Komponenten der Filterantwort des speziellen multivektoriellen Teager-Filters und ihre Bedeutung.

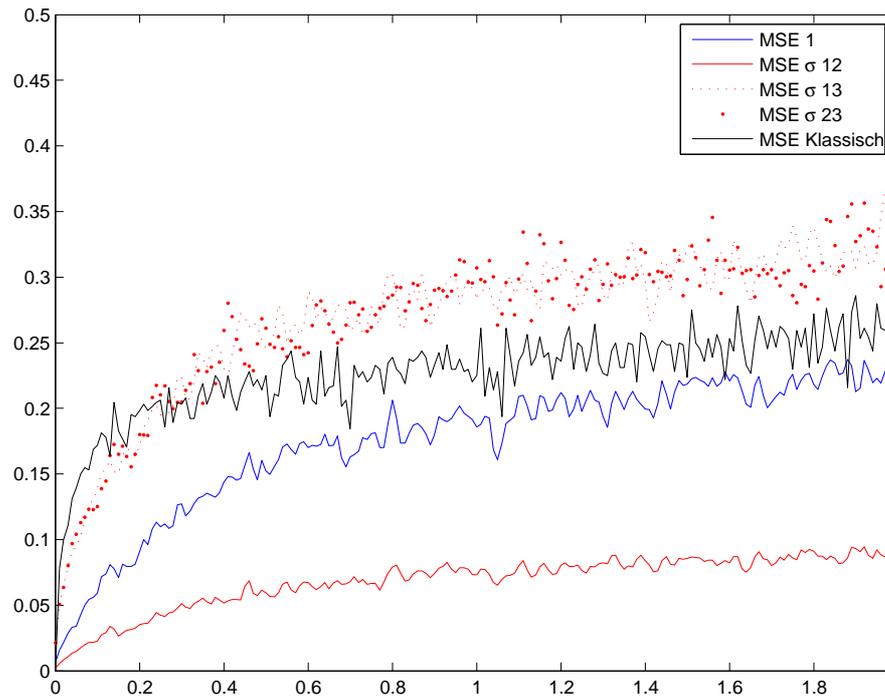


Abbildung 4.11: Zunahme des mittleren quadratischen Fehlers der zwei Teager-Filter bei steigender Intensität des Rauschens: Der Fehler im skalaren Anteil des multivektoriellen Teager-Filters ist in Blau dargestellt, der Fehler in der bivektoriellen Komponente σ_{12} in Rot und in den Komponenten σ_{23} und σ_{31} ebenfalls in Rot, gepunktet. Der Fehler des klassischen Teager-Filters ist in Schwarz dargestellt.

ten, die durch den linearen Operator erzeugt werden, steigen dagegen erwartungsgemäß am schnellsten an.

Eine weitere interessante Feststellung ist in diesem Zusammenhang, dass der klassische Teager-Filter im Bereich eines nur geringfügigen Rauschens sogar noch empfindlicher reagiert als die Komponenten des linearen Anteils des multivektoriellen Teager-Filters. Dieser Effekt geht erst durch einen weiteren Anstieg des Rauschens verloren.

Im Allgemeinen bestätigt dieses Ergebnis aber noch einmal den Vorteil der quadratischen gegenüber den linearen Filtern bei der Forderung nach stabiler Anwendbarkeit auf verrauschte Signale. Die bivektorielle Komponente des quadratischen Operators zeigt sogar, dass ein deutlich über die Möglichkeiten des klassischen Teager-Filters hinausgehendes Potential besteht.

5 Schlusswort

Zusammenfassung

Am Anfang dieser Arbeit stand die Aufgabe, Anwendungen von quadratischen Filtern im Rahmen der geometrischen Algebra zu entwickeln. Die Wahl dieser Kombination war dadurch motiviert, dass jedes dieser beiden Konzepte eine Verallgemeinerung von klassischen signaltheoretischen Grundlagen darstellt. Die quadratischen Filter sind dabei eine verhältnismäßig effizient implementierbare Untermenge der polynomiellen Volterra-Filter. Sie bilden eine qualitative Erweiterung der in der Signalverarbeitung typischen linearen Filter. Vergleichbares kann über die geometrische Algebra gesagt werden. Als ein mächtiger Rahmen hyperkomplexer Zahlensysteme ermöglicht dieses mathematische Konstrukt unter anderem die Formulierung der komplexen Zahlen, der Quaternionen und geometrisch motivierter Vektormathematik in einem einheitlichen Format. Die Möglichkeit, neuartige Erkenntnisse zu gewinnen, war also ausreichend motiviert.

Die Möglichkeiten einer konkreten Realisierung vor diesem mächtigen Hintergrund sind allerdings zahlreich. Erste Betrachtungen wurden daher zuerst in dem theoretischen Umfeld kontinuierlicher, eindimensionaler Signale durchgeführt. Es wurde eine spezielle geometrische Einbettung des Signals vorgeschlagen, die auf der Berechnung eines zum Signal orthogonalen Vektors beruht. Die Formulierung dieses geometrischen Signals erfolgte bereits mit Hilfe der geometrischen Algebra, die in Form der multivektoriellen Faltung eine wichtige Voraussetzung für die Verarbeitung vektorieller Signale bietet.

Für die weitere Verarbeitung dieses konstruierten Signals wurde der Energieoperator gewählt. Für diesen existiert eine diskrete Approximation in Form des quadratischen Teager-Filters. Dieser Zusammenhang sollte später die Möglichkeit schaffen, die im Kontinuierlichen gewonnenen Erkenntnisse auch auf praktische Anwendungen zu übertragen. Es stellte sich dann heraus, dass die Ergebnisse der Anwendung des Energieoperators auf das konstruierte geometrische Signal Gemeinsamkeiten mit dem analytischen Signal aufweisen. Dies ließ den Schluss zu, dass die vorgeschlagene Methode, die durch die Verknüpfung der geometrischen Einbettung mit dem Energieoperator ein neuartiges Verfahren ergab, tatsächlich erweiterte Informationen aus einem reellwertigen Signal gewinnen konnte.

Nachdem die Anwendbarkeit der Methode im Diskreten anhand eindimensionaler Betrachtungen verifiziert wurde, erfolgte die Formulierung für zweidimensionale diskrete Signale. Hier wurde eine sehr spezielle geometrische Einbettung vorgeschlagen, um den Entwurf neuartiger Filter zu ermöglichen. Nachdem die notwendigen Berechnungen zur Transformation eines reellwertigen Signals in seine geometrische Einbettung in die Form eines Faltungskerns überführt wurden, konnte dieser mit dem Kern des quadratischen Teager-Filters verknüpft werden.

Daraus ergab sich ein neuartiger Operator und es wurde festgestellt, dass sich dieser unabhängig von einer spezifischen geometrischen Einbettung gestaltet. Es ist folglich eine Gruppe von Operatoren entstanden, die auf dem Prinzip des Teager-Filters basierend arbeiten und durch die Verknüpfung mit verschiedenen geometrischen Einbettungen zahlreiche Möglichkeiten der weiterführenden Gestaltung bieten.

Abschließend wurde die hier vorgeschlagene Einbettung experimentell mit dem so betitelten multivektoriellen Teager-Filter verknüpft, wodurch ein konkreter Operator entstand. Dieser zeichnet sich durch zahlreiche interessante Bestandteile aus, von denen insbesondere ein Detektor intrinsisch zweidimensionaler Signale hervorzuheben ist. Dieser Detektor ist ein sehr interessanter Hinweis darauf, dass sich noch zahlreiche Möglichkeiten hinter dem umfangreichen Aufbau der polynomiellen Filter und der geometrischen Algebra verbergen.

Ausblick

Die Kombination von quadratischen Filtern mit einem in geometrischer Algebra eingebetteten Signal hat sich als sehr erfolgreich herausgestellt. Es wurde eine Grundlage für den weiteren Filterentwurf nach diesem Prinzip geschaffen. Aber auch schon die Ansätze, die sich aus dem hier konkretisierten Filter ergeben, verdienen eine detaillierte Untersuchung.

Da wäre zum einen der Detektor intrinsisch zweidimensionaler Signale, der auf natürliche Weise aus dem experimentellen Filterentwurf hervorging. Hier verdeutlichte sich die höherdimensionale Bedeutung der verwendeten Grundlagen von quadratischen Filtern und geometrischer Algebra. Der Zusammenhang mit dem monogenen Krümmungssignal sollte näher untersucht werden, um die eventuellen Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu ermitteln und die Verfahren deutlicher gegeneinander abzugrenzen.

Eine anderer Aspekt ist die hier durchgängige Betrachtung der Filter im Ortsraum. Die geometrische Algebra stellt eine Fourier-Transformation für multivektorielle Signale zur Verfügung, die hier durchaus Anwendung finden kann. Hier ergeben sich möglicherweise Wege, die einzelnen Filter, die sich in dieser Arbeit als Bestandteile des speziellen multi-

vektoriellen Teager-Filters ergeben haben, eingehender als durch die bloße Identifikation eines Faltungskerns zu charakterisieren.

Es bleibt zu sagen, dass der hier verfolgte Ansatz zwar gut fundiert ist und sehr interessante Ergebnisse erzielte, die erste Idee dazu jedoch nur eine von zahlreichen experimentellen Proben war. Entsprechend viele andere Versuche gab es, die nicht den Weg in diese Arbeit geschafft haben. Aus dieser Erfahrung heraus entsteht der Gedanke an eine viel theoretischere und von Anfang an allgemeinere Herangehensweise. So mag diese Arbeit zeigen, welche Art von Ergebnissen die Einbettung quadratischer Filter in geometrischer Algebra liefern kann, und Motivation für die Entwicklung einer umfassenderen Theorie sein.

A Aspekte der Implementierung

Vorbereitung

Motivation

Das Angebot an Programmen, die die Arbeit mit geometrischen Algebren unterstützen, ist sehr begrenzt. Viele Implementierungen konzentrieren sich auf spezielle Anwendungsgebiete und dabei insbesondere auf die Geometrie im dreidimensionalen Raum.^[20, 21] Für den Spezialfall der multivektoriellen Signalverarbeitung schien es bisher keine bereitstehenden Lösungen zu geben. Es war daher angebracht, die benötigten Hilfsmittel selbst zu implementieren.

Bei der Wahl der Programmiersprache sprach vieles für MATLAB. Zum einen enthält diese Scriptsprache von sich aus bereits die Möglichkeit der expliziten Verwendung von Vektoren und Matrizen, was eine sehr geeignete Grundlage für die Implementierung geometrischer Algebra darstellt. Zum anderen erlaubt die umfangreiche Entwicklungsumgebung die Konzentration auf das Wesentliche und ermöglicht so ein produktives Arbeiten. Es stehen zahlreiche Visualisierungswerkzeuge zur Verfügung, deren zusätzliche Implementierung somit entfällt. Die Speicherverwaltung wird weiterhin von dem dahinterliegenden System übernommen, so dass sich der Programmierer auf anwendungsspezifische Probleme seiner Arbeit konzentrieren kann.

Die Implementierungen der im Folgenden vorgestellten Programme sind insofern ein wichtiger Bestandteil dieser Arbeit, als dass mit Hilfe dieser Software ein spontanes Ausprobieren verschiedenster Ideen möglich war und aufwendige manuelle Rechnungen vermieden werden konnten. Der Quelltext liegt dem Lehrstuhl für Kognitive Systeme auf CD-ROM vor.

Anforderungen an die Software

Die Software soll hauptsächlich das flexible Experimentieren mit multivektoriellen Volterra-Filtern bis zur zweiten Ordnung erleichtern. Dabei ist nicht die Effizienz, sondern die möglichst einfache Handhabung, der wichtigste Aspekt der Implementierung.

Vorbereitung

Aus Gründen der in diesem Fall deutlich erleichterten Implementierbarkeit existiert ein zusätzliches Hilfsprogramm, das in der Programmiersprache Perl entwickelt wurde. Es erzeugt nach der Vorgabe eines Dateipfads und einer völlig beliebigen Signatur den Quelltext einer MATLAB Funktion `ga_mult`, die das geometrische Produkt der entsprechenden Algebra berechnet und legt dieses Script in dem angegebenen Dateipfad ab. Der folgende Aufruf führt eine solche Aktion für eine homogen positive Signatur aus:

```
~> perl makefn.pl mytests/ +1 +1 +1
```

Durch Ablegen dieser Funktion im momentanen Arbeitsverzeichnis oder in einem in der Pfadvariablen enthaltenen Speicherort können die weiteren hier vorgestellten Funktionen darauf zugreifen. Die Implementierung setzt die Verfügbarkeit einer solchen Funktion im Folgenden voraus. Es obliegt der Verantwortung des Benutzers, der Funktion ausschließlich dimensional konforme Multivektoren zu übergeben.

Die globale Präsenz dieser Multiplikation hat zwar den Nachteil, dass nur eine Form des geometrischen Produkts zu einem Zeitpunkt verfügbar sein kann, das Umschalten ist jedoch denkbar einfach. Dazu wird die Funktion einfach mit einer neuen Definition überschrieben.

Implementierung

Repräsentation von multivektoriellen Daten

Die in MATLAB verwendete Scriptsprache erlaubt die direkte Spezifikation von Vektoren. Diese Funktion wird hier für die Multivektoren etwas zweckentfremdet. Dabei wird im Sinne einer lesbaren Notation die Tatsache ausgenutzt, dass MATLAB redundante Klammern ignoriert. So wird ein Vektor \mathbf{X} der Algebra \mathcal{G}_3 etwa wie folgt formuliert:

```
x = [ 0 [ 1 2 3 ] [ 1 2 3 ] 0 ];
```

Die Unterteilung in Skalar, Vektor, Bivektor und Pseudoskalar wird dem menschlichen Leser dadurch sofort klar.

Da MATLAB keine Vektoren oder gar Matrizen unterstützt, deren Elemente erneut Vektoren sind, muss für die Repräsentation eines Signals von Multivektoren das Konzept des *cell arrays* verwendet werden. Dieses erlaubt die indizierte Speicherung beliebiger Objekte, ist jedoch syntaktisch nicht mit der Matrizen- oder Vektordarstellung von

MATLAB kompatibel. Der folgende Aufruf würde dem zweidimensionalen Signal \mathbf{X} am Ort¹ (1, 2) den Multivektor $\sigma_1 + 2 \cdot \sigma_2 + 3 \cdot I_2$ zuweisen:

```
X{ 2, 1 } = [ 0 [ 1 2 ] 3 ];
```

Es existieren zwei Hilfsfunktion, um zwischen skalaren und multivektoriellen Daten zu wechseln. Dies ist zum Beispiel dann nützlich, wenn größere Mengen von bestehenden skalaren Daten in die multivektorielle Darstellung überführt werden müssen. Im folgenden Aufruf kann \mathbf{a} ein einzelner Skalar, ein Vektor oder eine Matrix sein. Es wird dann ein multivektorielles Signal entsprechender Dimension erzeugt:

```
X = scalar2ga( a );
```

Für die umgekehrte Konvertierung kann ein optionaler Parameter übergeben werden, der den Index einer spezifischen Komponente der Multivektoren auswählt, deren Inhalt dem Skalar zugewiesen werden soll. Wird dieser Parameter ausgelassen, so erfolgt standardmäßig die Verwendung der skalaren Komponente:

```
a = ga2scalar( X, 2 );
```

Im Kontext dieser Arbeit wurde ein geometrisches Signal für ein- und zweidimensionale Signale vorgeschlagen. Die Berechnung für einen reellwertigen Vektor von diskreten Datenpunkten erfolgt über den folgenden Aufruf:

```
X = ga_embed( x );
```

Definition und Anwendung eines Volterra-Filters

Volterra-Kerne der Ordnungen Null bis Zwei werden nach einem einheitlichen Prinzip definiert. Es wird eine Struktur angelegt, deren einzige geforderte Eigenschaft die Ordnung des Kerns beschreibt:

```
H.order = 1;
```

Momentan erlaubte Werte für dieses Feld sind 0, 1 und 2. Für den Fall der Ordnung Null erfolgt die Definition des Operators über eine einfache Konstante:

```
H.h0 = 23.5;
```

¹Damit wird der MATLAB Konvention gefolgt, Koordinaten in der dem Leser möglicherweise ungewöhnlich erscheinenden Reihenfolge (y, x) anzugeben.

Für lineare oder quadratische Terme muss sowohl die Größe des Trägers im Sinne seiner Ausdehnung vom Nullpunkt aus angegeben werden, als auch eine Funktionsreferenz, die die Werte des Kerns implementiert:

```
H.support = 2;  
H.fn = @my_teager_implementation;
```

Die Anwendung einer Reihe von Volterra-Operatoren erfolgt durch die Funktion `ga_volterra`, die als erstes Argument die Repräsentation eines skalaren oder multivektoriellen Signals erfordert und eine beliebige Anzahl von weiteren Argumenten erlaubt, die den zuvor beschriebenen Spezifikationen eines Volterra-Kerns genügen. Weder die Anzahl noch die Reihenfolge der Operatoren spielt eine Rolle, da ihre Ergebnisse am Ende additiv überlagert werden:

```
Y = ga_volterra(x, H0, H1, H2);
```

Literaturverzeichnis

- [1] B. Jähne. *Digitale Bildverarbeitung*. 5., überarbeitete und erweiterte Auflage, Springer, 2002.
- [2] G. L. Sicuranza. Quadratic filters for signal processing. *Proceedings of the IEEE*, 80(8):1263–1285, 1992.
- [3] I. Pitas and A. N. Venetsanopoulos. *Nonlinear Digital Filters*, chapter 8. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [4] G. Krieger. *Nichtlineare Informationsverarbeitung in biologischen und technischen Sehsystemen: eine Analyse mit Volterra-Reihen und Statistiken höherer Ordnung*. Shaker Verlag, 2000.
- [5] J. Ebling and G. Scheuermann. Clifford fourier transform on vector fields. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 11(4):469–479, 2004.
- [6] E. M. S. Hitzer and B. Mawardi. Clifford fourier transform on multivector fields and uncertainty principles for dimensions $n = 2 \pmod{4}$ and $n = 3 \pmod{4}$. *Proceedings of 7th International Conference on Clifford Algebras and their Applications*, 2005.
- [7] G. Ramponi. *Polynomial and Rational Operators for Image Processing and Analysis*, chapter 7. In [22], 2001.
- [8] S. Thurnhofer. *Two-Dimensional Teager Filters*, chapter 6. In [22], 2001.
- [9] K. G. Larkin, M. A. Oldfield, and D. J. Bone. Demodulation and phase estimation of two-dimensional patterns. *Australian patent AU 2001100005 A1*, 2001.
- [10] M. Felsberg and G. Granslund. POI detection using channel clustering and the 2d energy tensor. *26. DAGM Symposium Mustererkennung*, 2004.
- [11] M. Felsberg and E. Jonsson. Energy tensors: Quadratic phase invariant image operators. *DAGM 2005*, 3663, 2005.
- [12] G. Sommer. *Skript zur Vorlesung „Computer Vision I“*. Lehrstuhl für Kognitive Systeme, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2004.

- [13] A. Restrepo, L. F. Zuluaga, H. Ortiz, and V. Ojeda. Analytical properties of teager's filter. *Proceedings of the 1997 International Conference on Image Processing*, 1:397–400, 1997.
- [14] N. Otsu. A threshold selection method from gray-level histograms. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 9(1):62–66, 1979.
- [15] E. W. Weisstein. Monge patch. MathWorld – A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/MongePatch.html>, Abruf am 14. November 2007.
- [16] G. Sommer. *Skript zur Vorlesung „Einführung in die Neuroinformatik“*. Lehrstuhl für Kognitive Systeme, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2008.
- [17] G. Krieger and C. Zetsche. Nonlinear image operators for the evaluation of local intrinsic dimensionality. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(6), 1996.
- [18] D. Zang. *Dissertation: Signal Modeling for Two-Dimensional Image Structures and Scale-Space Based Image Analysis*. Lehrstuhl für Kognitive Systeme, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2007.
- [19] J. Ebling and G. Scheuermann. Pattern matching on vector fields using gabor filter. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 11(4), 2005.
- [20] S. Mann, L. Dorst, and T. Bouma. *Research Report CS-99-27: 2The Making of a Geometric Algebra Package in Matlab*. Computer Science Department, University of Waterloo, 1999.
- [21] L. Dorst, D. Fontije, and S. Mann. *Geometric Algebra for Computer Science*. Morgan Kaufmann, 2007.
- [22] G. L. Sicuranza and S. K. Mitra. *Nonlinear Image Processing*. Academic Press, 2001.