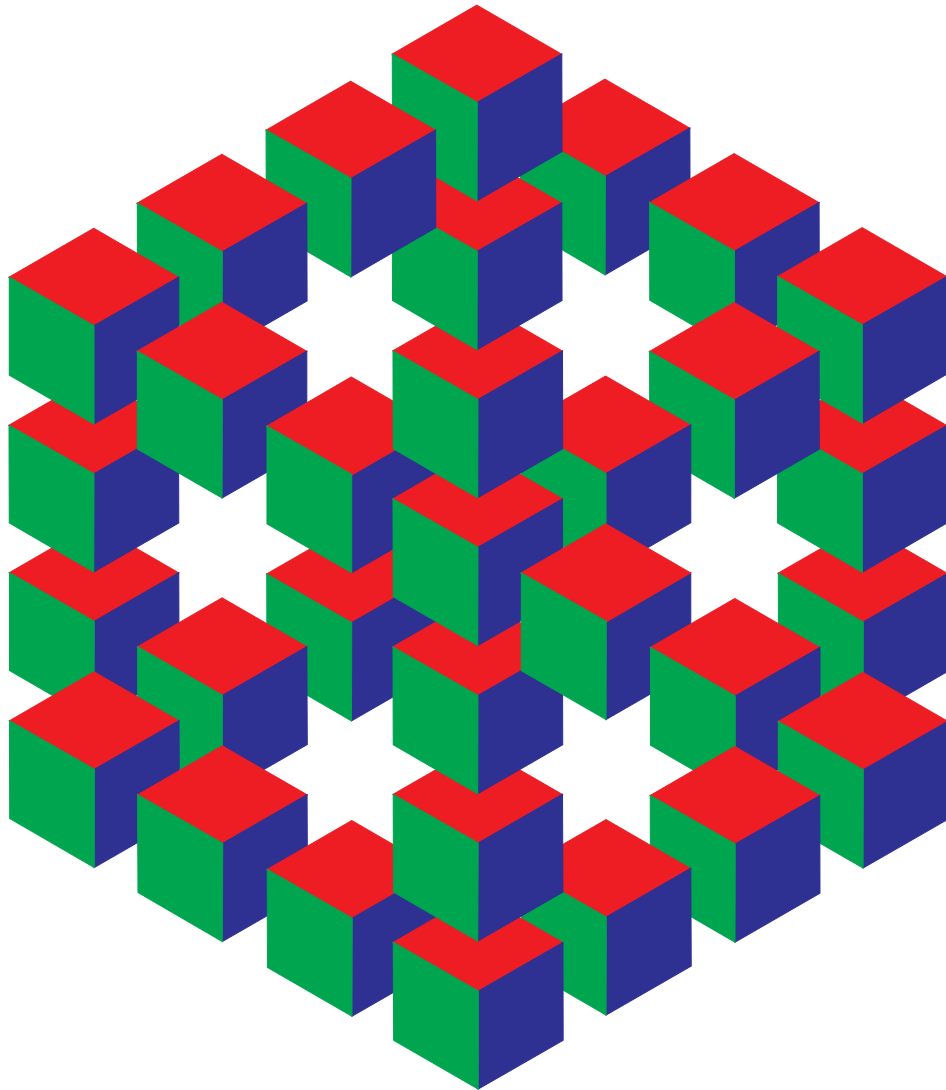


Computer Vision II

Gerald Sommer



Lehrstuhl für Kognitive Systeme
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
2007

Inhaltsverzeichnis

4	Stochastische Modelle	1
4.1	Einführung in die Stochastik	3
4.1.1	Stochastische Ereignisse	6
4.1.2	Stochastische Variable	15
4.1.3	Optimale Schätzer	28
4.2	Stochastische Prozesse	38
4.2.1	Stationäre stochastische Prozesse	43
4.2.2	Regional und lokal stationäre Prozesse	50
4.3	Optimale Filter durch Ausgleichsrechnung	55
4.4	Cooccurrence–Matrizen	64
4.4.1	Texturanalyse mittels CM	68
4.4.2	Bildvergleich mittels 2D–Histogramm	71
4.4.3	Textursegmentierung mittels CM	72
4.5	Markovprozesse	73
4.5.1	Eindimensionale Markovprozesse	74
4.5.2	Markovprozesse und Gibbsverteilung	81
4.5.3	Bildverarbeitung mittels Random Walk und Gibbs-Verteilung	85
4.6	Rekursive Systeme und stochastische Prozesse	97
4.6.1	Deterministische rekursive Systeme	97
4.6.2	Synthese und Analyse von ARMA–Prozessen	100
4.6.3	Zustandsgleichungen deterministischer Systeme	106
4.6.4	Zustandsgleichungen stochastischer dynamischer Systeme – Kalmanfilter	112
5	Topologische Grundlagen	115
5.1	Einführung	115
5.1.1	Übersicht und allgemeine Annahmen	115
5.1.2	Interessante Probleme	117
5.2	Nachbarschaftsstrukturen	121
5.2.1	Einführung	121
5.2.2	Komponenten und Graphsuche	125
5.2.3	Ränder und Kerne	129
5.3	Orientierte Nachbarschaftsstrukturen	131
5.3.1	Orientierte Wege und Maschen	131
5.3.2	Eulersche Charakteristik	139
5.3.3	Teilstrukturen und Randmaschen	141

5.4	Homogene Nachbarschaftsstrukturen	145
5.4.1	Netze und Torusnetze	146
5.4.2	Gebiete und Randmaschen in Torusnetzen	151
5.4.3	Bildgebiete	161
5.5	Picksche Formeln	162
6	Kontursuche und Oberflächendetektion	169
6.1	Kontursuche	169
6.1.1	Randmaschensuche-Verfahren	170
6.1.2	Kontursuche-Verfahren	174
6.1.3	Erweiterungen des Kontursuche-Algorithmus	179
6.2	3D-Objekte	185
6.2.1	Zellenkomplexe	185
6.2.2	Inzidenzstrukturen	190
6.2.3	Objekte in N-dimensionalen Inzidenzstrukturen	196
6.2.4	Ähnlichkeit von Objekten	205
6.3	Oberflächendetektions-Verfahren	210
7	Topologische Gestaltstransformationen	215
7.1	Morphologische Operatoren	215
7.1.1	Morphologische Operatoren auf Nachbarschaftsstrukturen	216
7.1.2	Minkowski-Operationen auf Punktmengen	220
7.1.3	Hit-and-Miss-Operator	231
7.2	Distanztransformationen	236
7.3	Rangordnungsoperatoren	242
	Index	253

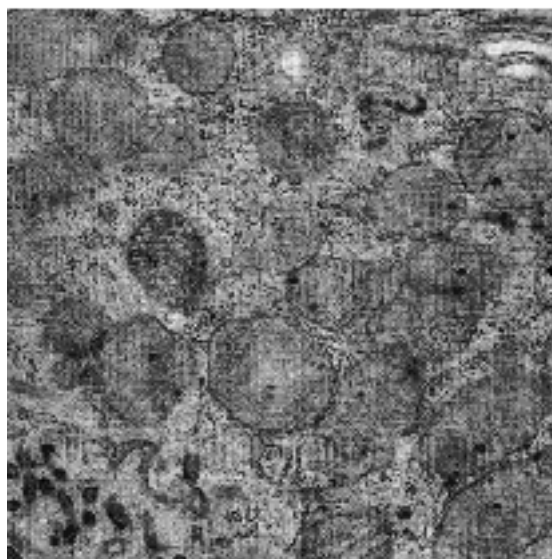
Kapitel 4

Stochastische Modelle

Wir geben hier eine stark an der Anwendung in Computer Vision orientierte Einführung dieses Themas. Eine mathematisch stringendere Einführung findet man bei A. Irle: Wahrscheinlichkeit und Statistik, Teubner-Verlag 2001, ISBN 3-519-02395-4.

Linien, Kanten und Verzweigungen sind geometrisch beschreibbare Strukturelemente. Sie sind insofern *determiniert*, als ihre Zugehörigkeit zu einer Funktionenklasse (z.B. Gerade) vorgegeben ist. Aber deren Parameter wie Position, Orientierung oder lokaler Kontrast (Steilheit des Kantenübergangs) sind unbekannt und in gewissen Grenzen als *zufällig* zu betrachten. Die Extraktion dieser Primitiva der Signalstruktur bedeutet auch Bestimmung dieser Parameter. Demzufolge müssen die Verfahren zur Erkennung derartiger Strukturen Freiheitsgrade haben, die eine u.U. *optimale Parameterschätzung* erlauben.

Die Entscheidung, ob eine detektierte Kante tatsächlich als *echte Kante* bewertet wird, oder ob das Detektionsergebnis tolerierbaren zufälligen Schwankungen der Signalfunktion entspricht, ist mittels *stabilisierender Verfahren (Signifikanztest)* zu fällen.



Andererseits gibt es Bildklassen (z.B. aus der natürlichen Umwelt, medizinische Bil-

der) deren Strukturen sich nicht auf determinierte Primitiva zurückführen lassen. Für derartige Bilder ist es auch nicht sinnvoll, nach Primitiva zu suchen. Vielmehr macht es Sinn, folgende Fragen zu beantworten:

1. Zu welcher von endlich vielen *Klassen* ist eine Region zuzuordnen?
 - **Klassifikation** von Regionen mittels Merkmalen
2. Welches *Modell* gestattet, die Regionen zu beschreiben?
 - **Parameteridentifikation** oder Modellierung von Regionen
3. Wo sind sinnvollerweise *Grenzen* zwischen unterscheidbaren Regionen zu legen?
 - **Regionensegmentierung**

Die Eigenschaft der Homogenität in diesem stochastischen Sinn bezeichnet man als *Textur*. Dabei kann die Ausdehnung der Regionen im Grenzfall das gesamte Bild erfassen oder nur lokalen Nachbarschaften eines Bildpunktes entsprechen. Einem einzelnen Bildpunkt kann zwar eine Textureigenschaft zugewiesen werden, diese ergibt sich aber nur aus der Wechselwirkung der Grauwerte vieler Bildpunkte. Demzufolge ist *Textur aufzufassen als eine Eigenschaft, welche die Organisationsprinzipien der Grauwerte in regionaler Ausdehnung widerspiegelt*. Natürlich können Texturen auch aus den Beziehungen determinierter Primitiva entstehen.

- **Aufgabe 1** (Klassifikation) erfordert die Abbildung des Signals auf einen Satz von Merkmalen und die Entscheidung der Klassenzugehörigkeit mit Methoden der *Mustererkennung*.
- **Aufgabe 2** (Parameter-/Modell-Identifikation) erfordert das Verfügen über ein generisches Modell, das an die Bildstruktur anzupassen ist oder eine Menge von Modellen, aus der eines auszuwählen ist. Besitzt man dieses Modell und kennt man dessen Parameter, so ist es auch möglich, künstliche Texturen zu synthetisieren, die die gleichen statistischen Eigenschaften besitzen wie die analysierten Texturen. *Analyse durch Synthese* ist in diesem Zusammenhang ein gängiges Verfahren. Die Modelle stellen in unserem Kontext stochastische Prozesse dar.
- **Aufgabe 3** (Regionensegmentierung) gehört zu den am meisten problematischen Aufgaben der Bildanalyse. Es wird die Möglichkeit der Klassifikation und Modellidentifikation vorausgesetzt. Lokal ist zu entscheiden, ob die Signifikanz der Merkmale erfordert, ein spezielles Modell als zutreffend fortzuschreiben oder ob ein Modellwechsel zu erfolgen hat. Im letzteren Fall ist eine *Regionengrenze* detektiert worden. Da diese Entscheidung nur auf der Grundlage weitreichender Wechselwirkungen von Grauwerten gefällt werden kann, ist die exakte Lokalisation der Regionengrenze schwierig. *Hierarchische Strategien* (Bildpyramiden) helfen nur in beschränkten Grenzen, da sichergestellt werden muß, daß bei Reduzierung des Einzugsbereiches der Analyse nicht die Wechselwirkungseigenschaften der Textur verloren gehen.

Während in der Beobachtungsgleichung

$$\begin{aligned} f &= s * h_s + n \\ &= h_p\{p\} * h_s + n \end{aligned}$$

explizit nur das Bildrauschen n als stochastische Größe auftritt, die sich als Störung dem Signal f aufprägt, geht die Analyse der beschriebenen Bildklassen von der statistischen Natur des Signals s selbst aus. Wegen $s = h_p\{p\}$ hat diese Stochastik ihre Ursache eventuell im abgebildeten Prozeß p . Prinzipiell kann jedes Bild unter dem Blickwinkel stochastischer Signalmodellierung betrachtet werden. Ob man dies explizit tut, hängt von der zu lösenden Aufgabe ab. Oft ist die stochastische Signalmodellierung auch *versteckt*. So erfordert zum Beispiel die *Regression einer Geraden* an eine Reihe von Konturpunkten die Annahme eines Modells über die erwartete Streuung der Konturpunkte vom Verlauf der Geraden. Nur wenn dieses Modell auch stimmt, kann man von einer *erwartungstreuen Schätzung* der Regressionsparameter ausgehen.

In diesem Kapitel werden die Begriffe *stochastisches Ereignis*, *stochastische Variable* und *stochastischer Prozeß* eingeführt und für die Signalanalyse relevante Grundlagen der Stochastik gelegt. Die Anwendung dieser Grundlagen erfolgt beispielhaft an den Problemkreisen Entwurf optimaler LSI-Operatoren unter stochastischen Gesichtspunkten und Analyse von Texturen.

Die vorgestellten Grundlagen der Stochastik sind *insgesamt von Bedeutung für*:

- unterschiedliche Probleme der Bildverarbeitung (Faltung, Segmentierung)
- Mustererkennung im Merkmalsraum
- Szenenanalyse als regularisiertes inverses Problem
- stochastisch optimierte Neuronale Netze.

4.1 Einführung in die Stochastik

Mit dem folgenden Beispiel sei ein konkretes Szenario aus der Praxis der Bildverarbeitung gegeben, das in abgewandelter Form häufig auftritt und insofern typisch ist.

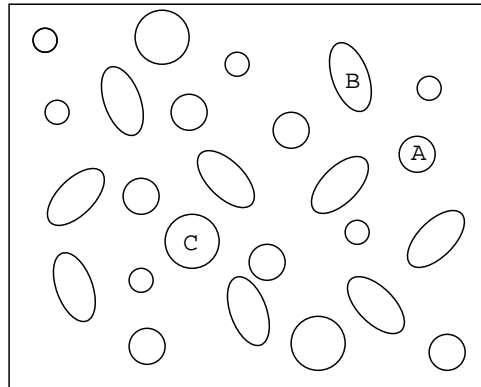
Szenario Mikroskopbildanalyse

Ein Bild der Mikroskopbildanalyse sei zu segmentieren. Das Bild enthalte Zellen vom Gestalttyp Ellipse von verschiedener Gestalt, Größe und Verteilung.

Annahme: Es existieren die Zelltypen A , B , C , die vom Untergrund U zu unterscheiden sind.

Also seien Regionen zu identifizieren, die diesen Typen zuzuordnenen sind. Dies erfordert eine Segmentierung in Regionen vom Typ A , B , C (und U). Als Zusatzaufgabe sei eine Ballunganalyse von Zellen des Typs C gefordert. Wenn also Zellen vom Typ C auftreten, sei zu entscheiden, ob diese homogen verteilt auftreten oder in Clustern.

Annahme: dunkle Objekte auf hellem Untergrund



Problemebenen

- 1.Ebene: Für jeden Bildpunkt ist zu entscheiden, ob er Element des Untergrundes oder eines der Objekte ist (Segmentierung).
 - 2.Ebene: Untergrundpunkte seien uninteressant. Für jeden Objektpunkt ist zu entscheiden, zu welchem Zelltyp er gehört (Klassifizierung).
 - 3.Ebene: Es ist eine Hypothese bezüglich regionaler Clusterbildung der Zellen vom Typ C zu testen (Szenenbeschreibung).
- Achtung: Treten neben Zellen vom Typ A , B , C noch Artefakte auf, die ebenfalls dem Segmentierungskriterium entsprechen, so kann die Segmentierung nur über Klassifizierung gelöst werden.

Dies ist die Standardsituation!

Lösungsweg:

- 1.Ebene: Konturfolgeverfahren berechnen die einhüllende Kontur eines Objekts (intensitätsbasiert, gradientenbasiert)
Vorwissen: Schwellwerte
- 2.Ebene: Gestaltsanalyse der Kontur
Vorwissen: Beschreibung der Gestalt mittels Merkmalen oder Parametern

- 3.Ebene: Voronoi-Zerlegung des Bildträgers in Regionen, die Zellen vom Typ C enthalten und Analyse der Voronoi-Zerlegung
 Vorwissen: Schwerpunktkoordinaten von C -Zellen (aus 1. und 2.Ebene berechenbar)

Stochastische Bezüge:

- 1.Ebene: Signifikanz der Entscheidung

Konturpunkt - kein Konturpunkt bzw.
 Objektpunkt - kein Objektpunkt

- 2.Ebene: Klassenbildende Häufigkeitsentscheidung der gestaltbeschreibenden Merkmale oder Modellparameter
 Annahme: Modell ist Ellipse

→ Parameter: großer/kleiner Durchmesser bzw.
 großer Durchmesser und Exzentrizität

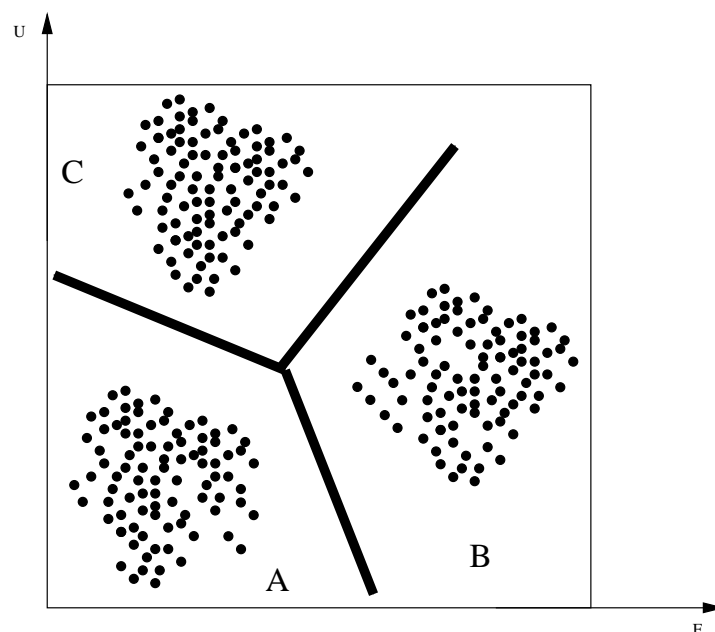
→ Merkmale: Umfang U und Formfaktor F :

$$F = \frac{1}{4\pi} \frac{U^2}{A} \quad \text{mit } A \text{ als Fläche}$$

Der Formfaktor ist ein Maß für die Abweichung von der Kreisform:

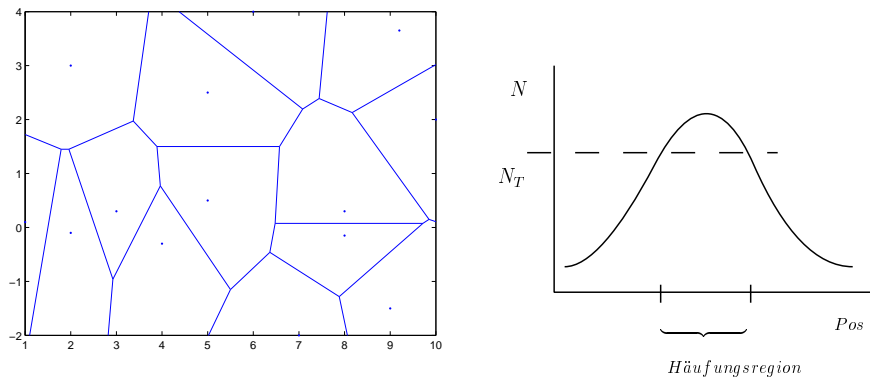
$$F_{\text{Kreis}} = \frac{4}{4\pi} \frac{(\pi d)^2}{\pi d^2} = 1$$

für $U = \pi d = 2\pi r$ und $A = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2$



- 3.Ebene: Räumliche Statistik der Verteilung der Schwerpunkte der Zellen vom Typ C bzw. der Verteilung der Flächen von Voronoi-Zellen. Die Grenzen der

Voronoi-Zellen ergeben sich aus den Mittel-Senkrechten über den Verbindungslinien zwischen den Schwerpunktkoordinaten der Zellen.



Stochastische Ereignisse:

finden im Rahmen der modellierten Problemstellung statt.

Problem 1: Der Problemraum Ω ist zerlegbar in die Ereignisse ψ und $\bar{\psi}$:

- ψ_K : ein Bildpunkt ist Konturpunkt (Kanteninformation)
- ψ_O : ein Bildpunkt ist Objektpunkt (Regioneninformation)
- $\bar{\psi}_K$: ein Bildpunkt ist kein Konturpunkt
- $\bar{\psi}_O$: ein Bildpunkt ist kein Objektpunkt

Stochastische Variable:

sind Abbildungen der Problemstellung (des Problemraumes) auf meßbare Eigenschaften.

Problem 1: Meßbar sind Grauwerte oder Grauwertgradienten:

- Regioneninformation: $\psi_O \rightarrow f_{mn} > t_1$
- Kanteninformation: $\psi_K \rightarrow \nabla f_{mn} > t_2$

4.1.1 Stochastische Ereignisse

Definition (Zufallsexperiment):

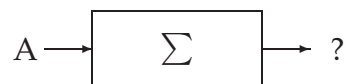
Ein Zufallsexperiment ist ein beliebig oft wiederholbarer Vorgang, dessen Ausgang nicht exakt vorhergesagt werden kann.



Definition (stochastisches Ereignis):

Ein stochastisches Ereignis ψ ist das Ergebnis eines Zufallsexperimentes. ■

In den Ingenieurwissenschaften ist es beliebt, mit dem Begriff des Systems zu operieren. Ein stochastisches System wird als Quelle der Zufälligkeit angesehen. Ein stochastisches System (Σ) besitzt die Eigenschaft, daß seine Antwort auf eine gleich bleibende Eingabe zu nicht vorhersagbaren Ergebnissen führt.



Im Sinn der Durchführung eines Zufallsexperimentes kann ein stochastisches System eine Abstraktion darstellen für:

- ein Meßgerät (Kamera), das die Meßdaten stört (Rauschen)
- einen Würfelautomat, dessen Bewegungen nicht determiniert sind
- das System Mensch-Umgebung in der Erwartungshaltung, Gesichter wahrzunehmen.

Definition (sicheres Ereignis, Stichprobenraum):

Die leere Menge \emptyset bildet das *unmögliche Ereignis*. Die Menge aller möglichen Ereignisse Ω heißt das *sichere Ereignis*, weil es im Ergebnis jeder Wiederholung eines zufälligen Versuches eintritt. Ω heißt auch *Stichprobenraum*. ■

Für zufällige Ereignisse gelten die Mengenrelationen (\cup, \cap, \setminus). Im Ergebnis dieser Relationen entstehen neue zufällige Ereignisse:

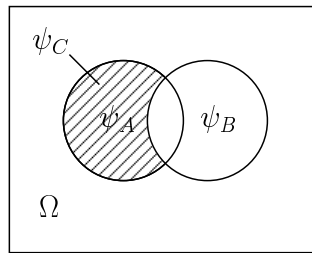
- Vereinigung der Ereignisse: $\psi_C = \psi_A \cup \psi_B$
Beispiel: Würfeln gerader Zahlen

$$\begin{aligned}\psi_A &: 2 \text{ oder } 4, \\ \psi_B &: 2 \text{ oder } 6, \\ \psi_C &: \text{gerade Zahl}\end{aligned}$$

- Durchschnitt der Ereignisse: $\psi_C = \psi_A \cap \psi_B$
Beispiel: Würfeln gerader Zahlen

$$\psi_C \text{ repräsentiert die Zahl } 2$$

- Differenz der Ereignisse: $\psi_C = \psi_A \setminus \psi_B$
falls $\psi_A \cap \psi_B = \emptyset$, dann $\psi_C = \psi_A$



- Komplement der Ereignisse: $\overline{\psi_A} = \Omega \setminus \psi_A$
Hieraus folgt für die Differenz

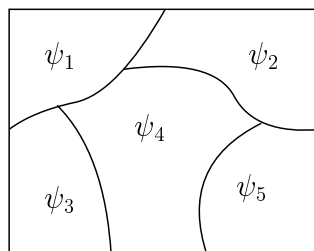
$$\psi_C = \psi_A \setminus \psi_B = \psi_A \cap \overline{\psi_B}$$

- De Morgansche Regel

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n \psi_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{\psi_i} \quad \text{und} \quad \overline{\bigcup_{i=1}^n \psi_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{\psi_i}$$

Definition (vollständiges System unvereinbarer Ereignisse):

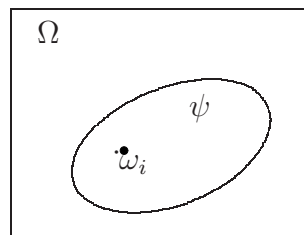
Zwei Ereignisse ψ_i und ψ_j heißen *unvereinbar* (oder disjunkt), falls $\psi_i \cap \psi_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
 Ω heißt vollständiges System unvereinbarer Ereignisse, falls Ω partitionierbar ist:
 $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \psi_i$ und $\forall_{i \neq j} \psi_i \cap \psi_j = \emptyset$.



Diese Partitionierung des Stichprobenraumes entspricht dem Idealfall in der Entscheidungstheorie: Entscheidungen lassen sich eindeutig fällen, weil die stochastischen Ereignisse disjunkt definiert sind und weil sie im Experiment nicht verfälscht werden (Zufälligkeit des Szenarios wird nicht überlagert durch Zufälligkeiten im Meßvorgang).

In der Praxis ist dieser Idealfall kaum anzutreffen! Das heißt, die stochastischen Variablen zeigen nicht das Verhalten, den Stichprobenraum disjunkt zu partitionieren.

Die Zerlegung des Stichprobenraumes hängt von der Zweckmäßigkeit im Rahmen der Aufgabenstellung ab. Sie ist problembezogen und insofern willkürlich.

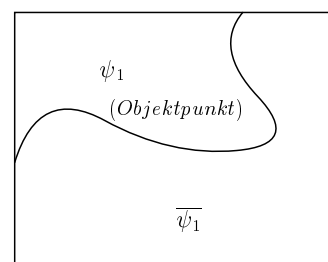
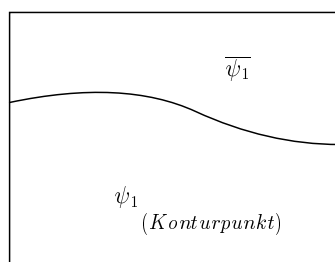


Beispiel: Mikroskopbildanalyse

1.Ebene: $\Omega = \psi_1 \cup \overline{\psi_1}$, d.h. Zweiklassenproblem: $\Omega = \psi_1 \cup \psi_2$ mit $\psi_2 = \overline{\psi_1}$

Konturpunkt: ψ_1 kein Konturpunkt: $\psi_2 = \overline{\psi_1}$

Objektpunkt: ψ_1 kein Objektpunkt: $\psi_2 = \overline{\psi_1}$



2.Ebene: $\Omega = \psi_U \cup \psi_A \cup \psi_B \cup \psi_C$

3.Ebene: $\Omega = \psi_C^+ \cup \psi_C^-$

Clusterbildende Zellen vom Typ C: ψ_C^+

$\psi_C^- \equiv \overline{\psi_C^+}$

Definition (Elementarereignisse):

Ω sei ein vollständiges System unvereinbarer Ereignisse mit $\Omega = \bigcup \omega_i$, und die ω_i seien nicht mehr verkleinerbar.

Die einzelnen Elemente $\omega_i \in \Omega$ heißen Elementarereignisse (Ergebnisse) . Ist ω_i eingetreten, so sagt man " ψ ist eingetreten", falls $\omega_i \in \psi$.

Stochastische Ereignisse sind als die Vereinigungsmenge aller Elementarereignisse aufzufassen. Sie stellen eine Äquivalenzklasse der Elementarereignisse dar.

Beispiel: Eine Zelle vom Typ A hat individuelle Ausprägungen der Charakterisierungen (Merkmale, Parameter) des Typs A (im Merkmalsraum: Lage in dem Cluster, das den Typ A erfaßt).

Einschub (Äquivalenzklasse, Äquivalenzrelation):

Offensichtlich entsprechen die Konzepte für Stichprobenraum Ω , stochastisches Ereignis ψ und Elementarereignis ω den Relationenkonzepten der Mengenlehre.

Definition (Relation):

Eine Relation R in einer Menge M ist eine Menge von geordneten Paaren von Elementen von M , d.h. es ist $R \subseteq M \times M$. Ist $(a, b) \in R$, so bezeichnet die Schreibweise aRb , daß die Relation R auf das geordnete Paar (a, b) zutrifft. ■

Relationen werden durch ihre Eigenschaften definiert. Wir lernen in Kapitel 5 einige spezielle Relationen kennen.

Definition (Äquivalenzrelation):

Eine Äquivalenzrelation in einer Menge M ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation:

R ist **reflexiv**: für alle $x \in M$ gilt xRx

R ist **symmetrisch**: für alle $x, y \in M$ gilt: wenn xRy , so yRx

R ist **transitiv**: für alle $x, y, z \in M$ gilt: aus xRy und yRz folgt xRz ■

Ist R eine Äquivalenzrelation in einer Menge M und gilt aRb für Elemente $a, b \in M$, so nennt man a, b äquivalent bzgl. R oder äquivalent modulo R und schreibt dafür $a \sim_R b$ bzw. $a \cong b \pmod{R}$.

Jede Äquivalenzrelation R in einer Menge M führt zu einer Zerlegung (Klasseneinteilung) von M , bei der zwei Elemente von M genau dann zur selben **Äquivalenzklasse** gehören, wenn sie in der Relation R zueinander stehen.

Die $a \in M$ enthaltende Äquivalenzklasse von M bezüglich R wird mit $[a]_R$ bezeichnet.

Eine **Zerlegung einer Menge** M ist eine Familie K von nichtleeren Teilmengen von M , für die gilt:

1. Je zwei verschiedene Elemente von K sind disjunkt.
2. Jedes Element von M gehört zu einem Element von K .

Die Elemente von K werden **Klassen** der Zerlegung von M genannt.

Ist K eine Klasseneinteilung (Zerlegung) von M , so gehört jedes Element $a \in M$ zu genau einem Element von K .

Der folgende Hauptsatz der Äquivalenzrelationen ist als Grundlage zur mathematischen Fassung des **Abstraktionsprozesses** zu verstehen.

Definition (Hauptsatz der Äquivalenzrelationen):

Für jede Äquivalenzrelation R in einer Menge M ist die Menge

$$K = \{[a]_R \mid a \in M\} \text{ aller Äquivalenzklassen } [a]_R = \{x \in M \mid aRx\}$$

von Elementen von M eine Zerlegung von M . Umgekehrt gibt es zu jeder Zerlegung K von M eine Äquivalenzrelation R in M , nämlich die Relation $R = \{(a, b) \mid \text{es gibt ein } X \in K \text{ mit } a, b \in X\}$, deren Äquivalenzklassen die Klassen der Zerlegung K sind.

■

Die Menge aller Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation R in einer Menge M nennt man auch den **Quotienten von M nach R** und schreibt M/R .

Offensichtlich werden im Beispiel Mikroskopbildanalyse unterschiedliche Äquivalenzrelationen verwendet, die zu verschiedenen Zerlegungen von Ω führen:

Ebene 1: Konturpunkt bzw. Objektpunkt

Ebene 2: Gestalt und Größe

Ebene 3: Clusterbildung

Definition (Ereignisfeld \mathbb{A}):

Das Ereignisfeld \mathbb{A} ist die Menge aller möglichen Ereignisse des Stichprobenraums Ω :

1. $\emptyset, \psi_i, \Omega \in \mathbb{A}$
2. $\psi_j, \psi_k \in \mathbb{A} \Rightarrow \psi_j \cup \psi_k \in \mathbb{A}$ und $\psi_j \cap \psi_k \in \mathbb{A}$
3. $\psi_j \in \mathbb{A} \Rightarrow \bar{\psi}_j \in \mathbb{A}$ wobei $\bar{\psi}_j = \Omega \setminus \psi_j$

■

Falls Ω diskret und endlich ist, gilt $\mathbb{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. \mathcal{P} ist die Potenzmenge des Stichprobenraumes. Das Paar (Ω, \mathbb{A}) charakterisiert ein Zufallsexperiment vollständig.

Definition (Wahrscheinlichkeit):

Die Wahrscheinlichkeit $P(\psi_j)$ ist eine reelle Zahl $0 \leq P(\psi_j) \leq 1$, die jedem Element ψ_j des Ereignisfeldes \mathbb{A} eindeutig zugeordnet werden kann.

Es gilt also:

1. P ist nicht negativ: $P(\psi) \geq 0 \forall \psi \in \Omega$
2. P ist normiert: $P(\Omega) = 1$
3. P ist additiv: $P(\psi_j \cup \psi_k) = P(\psi_j) + P(\psi_k)$ falls $\psi_j \cap \psi_k = \emptyset$

■

Falls $\psi_j \cap \psi_k \neq \emptyset$: $P(\psi_j \cup \psi_k) = P(\psi_j) + P(\psi_k) - P(\psi_j \cap \psi_k)$

Was über $P(\psi_j \cap \psi_k)$ ausgesagt werden kann, lernen wir in der Folge.

Daraus folgt:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\psi_j \cap \psi_k) = 0$ für $\psi_j \cap \psi_k = \emptyset$
3. $P(\bar{\psi}_j) = 1 - P(\psi_j)$

Ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit $P(\psi_j)$ ergibt sich im Grenzfall großer Versuchszahlen n aus der *relativen Häufigkeit*

$$P(\psi_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\psi_j) \quad \text{mit} \quad h_n(\psi_j) = \frac{k_n(\psi_j)}{n}$$

des Ereignisses, wobei n die Anzahl der möglichen Versuchsausgänge und $k_n(\psi_j)$ die Anzahl der für das Ereignis ψ_j günstigen Versuchsausgänge darstellt (Gesetz der großen Zahlen). Dies ist eine Erfahrungstatsache, aber nicht beweisbar.

Definition (Wahrscheinlichkeitsraum):

Das Tripel (Ω, \mathbb{A}, P) heißt Wahrscheinlichkeitsraum.

■

Definition (Verbundwahrscheinlichkeit):

Die Wahrscheinlichkeit $P(\psi_j, \psi_k)$, daß ψ_j und ψ_k zusammen eintreten, heißt Verbundwahrscheinlichkeit $P(\psi_j \cap \psi_k)$.

■

Definition (bedingte Wahrscheinlichkeit):

Die Wahrscheinlichkeit von ψ_j unter der Bedingung, daß ψ_k bereits eingetreten ist, heißt die bedingte Wahrscheinlichkeit von ψ_j unter der Bedingung ψ_k :

$$P(\psi_j|\psi_k) = \frac{P(\psi_j, \psi_k)}{P(\psi_k)} \quad \text{für} \quad P(\psi_k) > 0$$

$P(\psi_k)$ heißt *a priori Wahrscheinlichkeit*. ■

Hieraus folgt die *Multiplikationsregel*

$$P(\psi_j \cap \psi_k) = P(\psi_j|\psi_k)P(\psi_k) = P(\psi_k|\psi_j)P(\psi_j)$$

Definition (totale Wahrscheinlichkeit):

Bilden die Ereignisse $\psi_k, k = 1, 2, \dots, n$ im Ereignisfeld \mathbb{A} ein vollständiges System von Ereignissen, dann erhält man für ein Ereignis $\psi_j \in \mathbb{A}$ die totale Wahrscheinlichkeit $P(\psi_j)$ mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(\psi_j|\psi_k), k = 1, \dots, n$ zu

$$P(\psi_j) = \sum_{k=1}^n P(\psi_j|\psi_k)P(\psi_k)$$
■

Beweis für die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit:

Sei $\Omega = \bigcup_{k=1}^n \psi_k, \psi_i \cap \psi_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \psi_j &= \psi_j \cap \Omega \\ &= \psi_j \cap (\psi_1 \cup \psi_2 \cup \dots \cup \psi_n) \\ &= (\psi_j \cap \psi_1) \cup (\psi_j \cap \psi_2) \cup \dots \cup (\psi_j \cap \psi_n) \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} P(\psi_j) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n (\psi_j \cap \psi_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n P(\psi_j \cap \psi_k) \\ &= \sum_{k=1}^n P(\psi_j | \psi_k) P(\psi_k) \quad (\text{wegen Multiplikationsregel}) \end{aligned}$$

Beispiel: Ebene 2 Mikroskopbildanalyse

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(\psi_0)$ dafür, auf Objekte der Fläche $A \leq A_0$ zu treffen, wenn folgende Wahrscheinlichkeiten das Szenario beschreiben (a priori-Wahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten):

$$P(\psi_A) = 0.1 \quad P(\psi_0 | \psi_A) = 0.8 \quad \text{d.h.} \quad P(\psi_0 \cap \psi_A) = 0.08$$

$$P(\psi_B) = 0.3 \quad P(\psi_0 | \psi_B) = 0.2 \quad \text{d.h.} \quad P(\psi_0 \cap \psi_B) = 0.06$$

$$P(\psi_C) = 0.2 \quad P(\psi_0 | \psi_C) = 0.4 \quad \text{d.h.} \quad P(\psi_0 \cap \psi_C) = 0.08$$

$$P(\psi_U) = 0.4 \quad P(\psi_0 | \psi_U) = 0.0 \quad \text{d.h.} \quad P(\psi_0 \cap \psi_U) = 0$$

Hieraus folgt $P(\psi_0) = 0.22$. ■

Unter gleichen Voraussetzungen mit $P(\psi_0) > 0$ liefern die Multiplikationsregel und die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit die *Formel von Bayes*:

$$P(\psi_i | \psi_0) = \frac{P(\psi_0 | \psi_i)P(\psi_i)}{\sum_{k=1}^n P(\psi_0 | \psi_k)P(\psi_k)}$$

Die Bedeutung der Bayes-Formel liegt darin, sogenannte Bayes-optimale Schätzer zu entwerfen (Abschnitt 4.1.3).

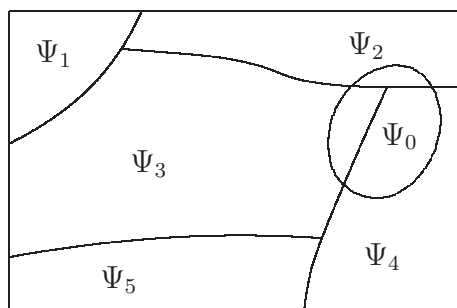
Definition (statistische Unabhängigkeit):

Zwei Ereignisse ψ_j, ψ_k heißen statistisch unabhängig, falls

$$P(\psi_j \cap \psi_k) = P(\psi_j)P(\psi_k)$$

gilt. Ist $P(\psi_k) > 0$, so ist dies äquivalent zu

$$P(\psi_j | \psi_k) = P(\psi_j)$$
■

Beispiel:

Hier ist ψ_0 statistisch unabhängig von ψ_1 und ψ_5 . Daraus folgt

$$P(\psi_0|\psi_1) = P(\psi_0|\psi_5) = P(\psi_0)$$

4.1.2 Stochastische Variable

Definition (Stochastische Variable):

Eine Abbildung X des Stichprobenraumes Ω auf die reellen Zahlen:

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

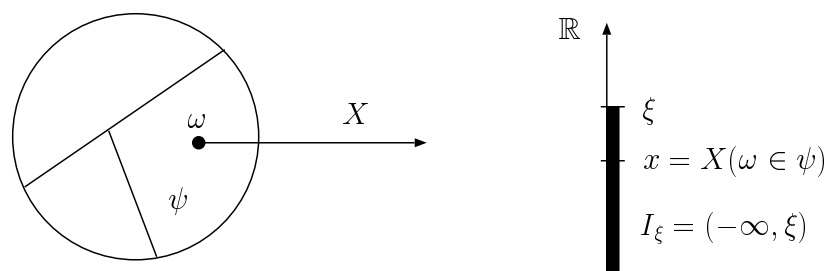
heißt reelle stochastische Variable, Zufallsvariable oder Zufallsgröße .

■

Voraussetzung: Eineindeutigkeit von X (Existenz von X^{-1}). In der Signalverarbeitung: $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ oder $X : \Omega \mapsto \mathbb{N}$. Diese Abbildung ordnet jedem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ eine (meßbare) Zahl $x = X(\omega)$ zu.

$x = X(\omega)$ heißt Realisierung des Elementarereignisses (der stochastischen Variablen) $\omega(\psi)$.

Damit wird erreicht, daß jedes Ereignis $\psi \in \mathbb{A}$ durch ein (reelles) Intervall repräsentiert wird. Das Intervall I_ξ hat die Ausdehnung $I_\xi = (-\infty, \xi)$. Von praktischer Bedeutung sind alle möglichen offenen, halboffenen und geschlossenen Intervalle (*Borel-Mengen*), die durch Mengenoperationen aus den Intervallen I_ξ erhalten werden können. *Damit wird \mathbb{R} zu einem Stichprobenraum.* Da dem Ereignis ψ eine eindeutige Wahrscheinlichkeit $P(\psi)$ zugeordnet ist, kann auch eine entsprechende Wahrscheinlichkeit auf das Intervall I_ξ abgebildet werden.



Definition (Verteilungsfunktion):

Die Funktion

$$F_X(\xi) = P(X < \xi) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) < \xi\})$$

heißt Verteilungsfunktion oder Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X .

■

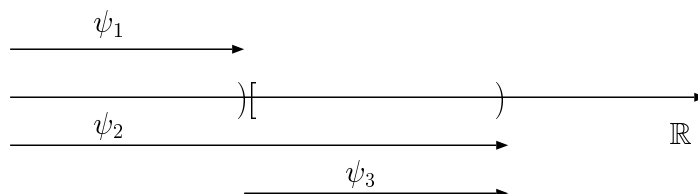
Der Wert der Verteilungsfunktion F_X an der Stelle ξ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die Zufallsvariable X einen Wert annimmt, der kleiner als ξ ist. Beliebige Wahrscheinlichkeiten der Form $P(\xi_1 \leq X < \xi_2)$ lassen sich bestimmen.

Beispiel:

$$P(\xi_1 \leq X < \xi_2) = P(X < \xi_2) - P(X < \xi_1) = F_X(\xi_2) - F_X(\xi_1)$$

mit

$$\psi_1 : X < \xi_1 \quad \psi_2 : X < \xi_2 \quad \psi_3 : \xi_1 \leq X < \xi_2$$



Ferner gilt für F :

1. F ist monoton nichtfallend: $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow F_X(\xi_1) \leq F_X(\xi_2)$
2. $\lim_{\xi \rightarrow \infty} F_X(\xi) = 1$
3. $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} F_X(\xi) = 0$

Definition (Dichtefunktion):

Eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion oder kurz Dichtefunktion f_X einer stetigen Zufallsgröße X realisiert eine (integrierbare) Abbildung $f_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, so daß die Verteilung $F_X(\xi) = P(X < \xi)$ für alle reellen ξ darstellbar ist durch

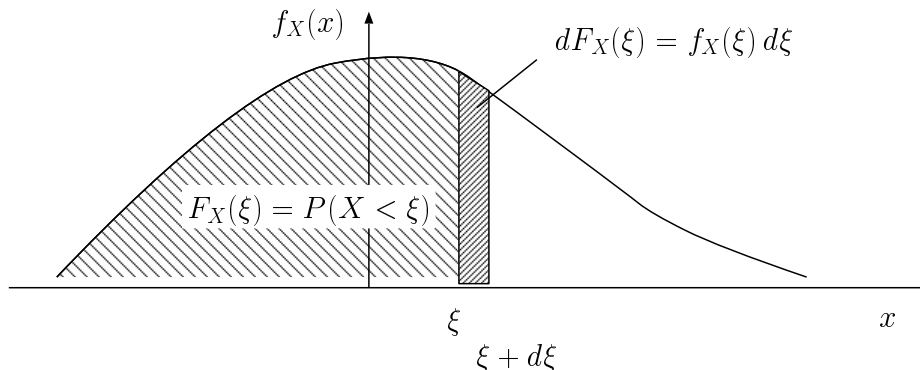
$$F_X(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f_X(x) dx$$



Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

geometrische Deutung:



Die Dichtefunktion ist also selbst keine Wahrscheinlichkeitsfunktion, aber

$$P(\xi \leq X < \xi + d\xi) = dF_X(\xi) = f_X(\xi)d\xi$$

ist das Wahrscheinlichkeitselement für das Auftreten eines Elementarereignisses ω mit der Realisierung der stochastischen Variablen $x = X(\omega)$ im Intervall $\xi \leq x < \xi + d\xi$.

In der Praxis sind stochastische Variable oft diskrete Zufallsgrößen (z.B. wenn sie im Ergebnis einer Messung vorliegen).

Beispiel: Bildverarbeitung

- Dichtefunktion: Histogramm der Grauwerte
- Verteilungsfunktion: kumulatives Histogramm

■

Ist X eine diskrete Zufallsgröße, dann ist ihr Wertebereich eine endliche oder höchstens abzählbare Menge.

Für eine diskrete Zufallsvariable übernehmen die Einzelwahrscheinlichkeiten p_i an den Positionen x_i , $i = 1, 2, \dots$ die Rolle der Dichtefunktion im Fall stetiger Zufallsvariablen.

Definition (Einzelwahrscheinlichkeiten):

Ist X eine diskrete Zufallsgröße mit den Werten x_1, x_2, \dots , so heißen die

$$p_i = P(X = x_i) \quad , i = 1, 2, \dots$$

Einzelwahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße X .

Die Einzelwahrscheinlichkeiten haben folgende Eigenschaften:

1. $0 \leq p_i \leq 1$
2. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

■

Die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen X ist definiert durch

$$F_X(\xi) = \sum_{\substack{i \\ x_i < \xi}} p_i.$$

Bei vorgegebener Verteilungsfunktion erhält man die Einzelwahrscheinlichkeiten aus der Beziehung

$$p_i = P(X = x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} F_X(x_i + h) - F_X(x_i)$$

für $i=1, 2, \dots$

Definition (Erwartungswert):

Der Erwartungswert einer stochastischen Variablen $E\{\cdot\}$ entsteht durch Bildung des Mittelwertes über den Realisierungen einer Zufallsgröße X :

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad \text{falls } X \text{ stetig}$$

$$E\{X\} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P(X = x_i) \quad \text{falls } X \text{ diskret}$$

■

Die Werte der Dichtefunktion bzw. die Einzelwahrscheinlichkeiten stellen hier Gewichte der Realisierungen dar.

Der Erwartungswert verhält sich linear, d.h. es gilt:

$$E\{aX_1 + bX_2\} = aE\{X_1\} + bE\{X_2\}$$

Außerdem ist der Erwartungswert-Operator involutorisch:

$$E\{E\{X\}\} = E\{X\}.$$

Der Erwartungswert bezüglich einer Funktion $h(X)$ lautet

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x) dx \quad \text{falls } X \text{ stetig}$$

$$E\{g(X)\} = \sum_{i=0}^{\infty} h(x_i) P(X = x_i) \quad \text{falls } X \text{ diskret}$$

Ist beispielsweise die x_i die Grauwertfunktion g_{mn} am Punkt (m, n) , so kann die Funktion h für den Gradienten ∇g_{mn} stehen.

Zufallsgrößen können durch die Berechnung ihrer Momente als Kennwerte weitreichend charakterisiert werden.

Definition (Moment k -ter Ordnung):

Ist X eine beliebige Zufallsvariable, so ist

$$m_X^{(k)} = E\{X^k\}$$

das (gewöhnliche) Moment k -ter Ordnung definiert als:

$$m_X^{(k)} = E\{X^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx \quad \text{falls } X \text{ stetig}$$

$$m_X^{(k)} = E\{X^k\} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^k P(X = x_i) \quad \text{falls } X \text{ diskret}$$

■

Das Moment erster Ordnung m_X nennt man den linearen Mittelwert.

Definition (zentrales Moment k -ter Ordnung):

Das zentrale Moment k -ter Ordnung wird definiert durch

$$\mu_X^{(k)} = E\{(X - E\{X\})^k\}$$

■

Das zentrale Moment 2. Ordnung $\mu_X^{(2)} = E\{(X - E\{X\})^2\}$ heißt *Varianz* der Zufallsgröße X und wird i.allg. mit $\text{VAR}\{X\}$ bzw. σ_X^2 bezeichnet. $\sigma_X = \sqrt{\text{VAR}\{X\}}$ ist die *Standardabweichung* oder *Streuung*. Die Varianz beschreibt die Breite der Dichtefunktion.

Die gewöhnlichen und die zentralen Momente lassen sich ineinander überführen.

Beispiel: $k=2$ Da der Erwartungswertoperator linear und involutorisch ist, erhält man

$$\begin{aligned} \mu_X^{(2)} &= E\{(X - E\{X\})^2\} \\ &= E\{X^2 - 2m_X^{(1)}X + m_X^{(1)2}\} \\ &= E\{X^2\} - 2m_X^{(1)}E\{X\} + m_X^{(1)2} \\ &= m_X^{(2)} - 2m_X^{(1)2} + m_X^{(1)2} \\ &= m_X^{(2)} - m_X^{(1)2} \end{aligned}$$

■

Spezielle Momente erlauben Rückschlüsse auf die Form der Dichtefunktion.

Definition (Schiefe):

Die Schiefe der Zufallsgröße X ist das auf die dritte Potenz der Standardabweichung bezogene zentrale Moment 3. Ordnung:

$$S = \frac{\mu_X^{(3)}}{\left(\sqrt{\mu_X^{(2)}}\right)^3}$$

■

Definition (Wölbung, Exzeß):

Die Wölbung/der Exzeß der Zufallsgröße X wird gebildet durch

$$W = \frac{\mu_X^{(4)}}{\left(\sqrt{\mu_X^{(2)}}\right)^4} - 3$$

■

Die Schiefe ist ein Maß für die Abweichung der Symmetrie einer Dichtefunktion, bezogen auf den Mittelwert.

Der Exzeß ist ein Maß für die Steilheit/Flachheit einer Dichtefunktion.

Die Normalverteilung ist eine symmetrische Funktion mit verschwindendem Exzeß.

Wichtige diskrete Verteilungsfunktionen:

1. *Binomialverteilung* (n unabhängige Versuche, $\Omega = \psi \cup \bar{\psi}$, $P(\psi) = p$)

Parameter: $n = 1, 2, \dots$; $0 < p < 1$

Beispiel: n mal Münze werfen: $p = 0.5$

Einzelwahrscheinlichkeiten: Sei k die Anzahl günstiger Ausgänge des Versuches

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n$$

$$E\{X\} = np, \quad \text{VAR}\{X\} = np(1-p)$$

2. *Poissonverteilung* ($n \rightarrow \infty$, $p_n \rightarrow 0$, $np_n \rightarrow \lambda > 0$ für $p_n = P(\psi)$)

Parameter: $\lambda > 0$

Beispiel: radioaktiver Zerfall, λ ist die Zerfallskonstante

Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E\{X\} = \lambda, \quad \text{VAR}\{X\} = \lambda$$

3. Gleichverteilung

Parameter: $n = 1, 2, \dots$

Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

$$E\{X\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{VAR}\{X\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$

Beispiel: Stochastische Abtastung eines Binärbildes

Es werden an einem (binären) Mikroskopbild 20 zufällige Versuche ausgeführt, auf eine Zelle zu treffen. Jeder Versuch trifft mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 0.8$. Sei X_{20} die Anzahl der zufälligen Treffer bei 20 Versuchen ($n = 20$).

Wir wollen vier Aufgaben lösen.

1. Mittlere Anzahl der Treffer.

Der Erwartungswert ist

$$E\{X\} = \sum_{k=0}^n k P(X = k) = np$$

Also

$$E\{X_{20}\} = 20 \cdot 0.8 = 16$$

2. Wahrscheinlichkeit dafür, daß genau fünf Treffer eintreten.

Hierfür benötigen wir die Einzelwahrscheinlichkeit $P(X = k)$.

$$P(X_{20} = 5) = \binom{20}{5} 0.8^5 0.2^{15}$$

3. Wahrscheinlichkeit dafür, daß höchstens zehn Treffer gelingen.

Hierfür benötigen wir die Verteilungsfunktion.

$$F_X(t) = P(X < t) = \sum_{0 \leq k < t} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X_{20} \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} P(X_{20} = k) = \sum_{k=0}^{10} \binom{20}{k} 0.8^k 0.2^{20-k}$$

4. Wahrscheinlichkeit dafür, daß wenigstens ein Treffer gelingt.
Hierfür wird ebenfalls die Verteilungsfunktion benötigt.

$$P(X_{20} \geq 1) = \sum_{k=1}^{20} P(X_{20} = k) = \sum_{k=1}^{20} \binom{20}{k} 0.8^k 0.2^{20-k}$$

bzw. unter Beachtung der Wahrscheinlichkeit, daß kein Treffer erfolgt

$$P(X_{20} \geq 1) = 1 - P(X_{20} = 0) = 1 - 0.2^{20}$$

■

Wichtige stetige Verteilungsfunktionen:

1. Gleichverteilung

Parameter: a, b mit $a < b$

$$F_X(\xi; a, b) = P(X < \xi) = \frac{\xi - a}{b - a} \quad \text{für } a < \xi \leq b$$

$$f_X(x, a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$E\{X\} = \frac{a+b}{2}, \quad \text{VAR}\{X\} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Beispiel: Berechnung von $E\{X\}$ und $\text{VAR}\{X\}$

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = \int_a^b t \frac{1}{b-a} dt = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{VAR}\{X\} = E\{X^2\} - [E\{X\}]^2 = \int_a^b t^2 \frac{1}{b-a} dt - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. Exponentialverteilung (zufällige Dauer zeitabhängiger Vorgänge)

Parameter: $\lambda > 0$ Abklingkonstante

$$F_X(\xi; \lambda) = P(X < \xi) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda\xi} & \text{für } \xi > 0 \\ 0 & \text{für } \xi \leq 0 \end{cases}$$

$$f_X(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

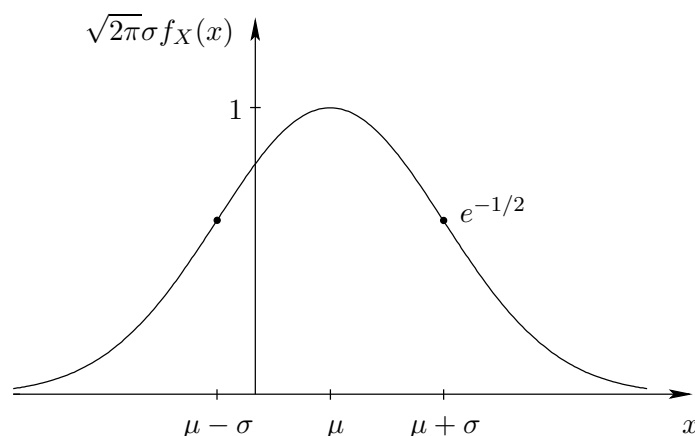
$$E\{X\} = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{VAR}\{X\} = \frac{1}{\lambda^2}$$

3. Normalverteilung (Gaußverteilung)

Parameter: $-\infty < \mu < +\infty, 0 < \sigma$

$$F_X(\xi; \mu, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{\xi} f_X(x; \mu, \sigma^2) dx$$

$$f_X(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$



Dann heißt X $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt.

Der Parameter μ fällt mit dem Mittelwert $m_X^{(1)}$ zusammen. Der Parameter σ entspricht der Streuung der Normalverteilung.

$$E\{X\} = \mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\text{VAR}\{X\} = \sigma_X^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Wieviele Daten liegen in Bereichen der Breite $2k\sigma$ bei Normalverteilung?

Für $P(|X - \mu| \leq k\sigma) = P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma)$ gilt:

k	P
1	0.68269
2	0.95450
3	0.99730

Zufallsgrößen, die durch Überlagerung einer großen Zahl von Einflüssen entstehen, sind i.allg. normalverteilt. Dies ist eine Folge aus dem *zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung*.

Zentraler Grenzwertsatz:

Ist $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten (Gleichverteilung) Zufallsgrößen mit $E\{X_i\} = m^{(1)} < \infty$ und $\text{VAR}\{X_i\} = d^2 < \infty$, so gilt für jedes reelle ξ_1 und ξ_2 mit $\xi_2 > \xi_1$ und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\xi_1 \leq \frac{S_n - nm^{(1)}}{\sqrt{n}d} < \xi_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Die Folge der Verteilungen der standardisierten Zufallsgröße

$$\frac{S_n - nm^{(1)}}{\sqrt{nd}}$$

konvergiert gegen eine Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Oder in anderen Worten: Die Zufallsgröße S_n ($n = 1, 2, \dots$) ist asymptotisch normalverteilt mit $E\{S_n\} = nm^{(1)}$ und $\text{VAR}\{S_n\} = nd^2$.

Definition (n-dimensionale Zufallsvariable):

Ist einem Elementarereignis eine mehrdimensionale Zufallsvariable zugeordnet, so gilt:

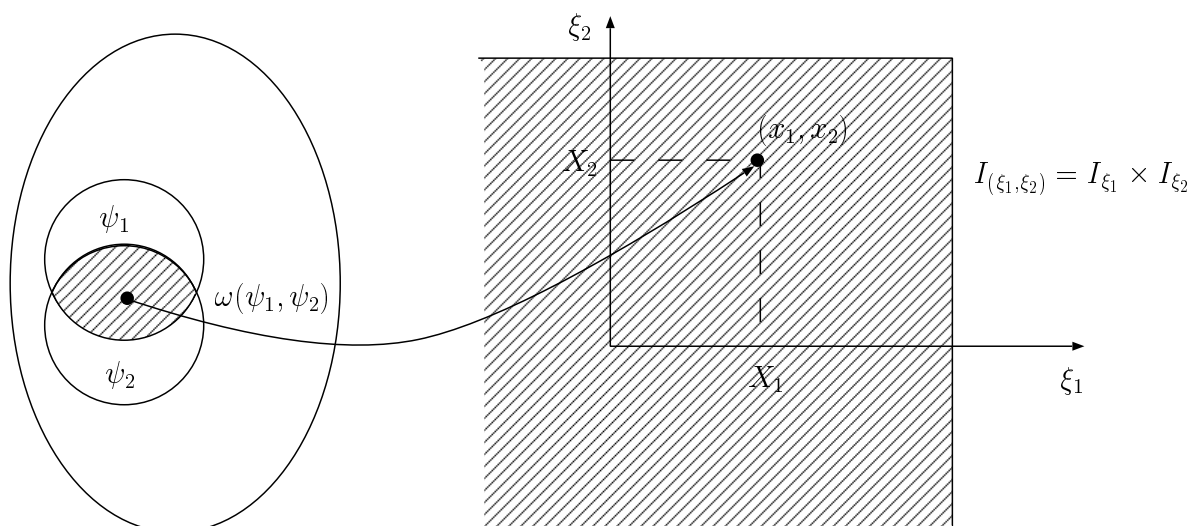
$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega &\longmapsto X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} X_i : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X_i(\omega) = x_i \end{aligned}$$

Man spricht hier von einer *Statistik n-ter Ordnung*.

■



Beispiele:

1. vektorwertige Bildfunktion: $(r, g, b)_{m,n}$
2. 2D-Histogramme: Statistik 2.Ordnung

$g_0 \sim$ Grauwert am Aufpunkt

$g_\tau \sim$ Grauwert am Testpunkt

Definition (Unabhängigkeit):

Die Zufallsvariablen $X_i : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ einer mehrdimensionalen Zufallsgröße

$$X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

heißen *unabhängig*, wenn für jede Wahl $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, gilt

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

■

Die Konzepte der Verteilungs-, Dichtefunktion und Momente sind einfach übertragbar (o.B.d.A. Annahme $n = 2$):

- Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung :

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1$$

- Statistische Unabhängigkeit:

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$

mit $-\infty < x_1, x_2 < \infty$.

- Randdichten:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1$$

- bedingte Dichten:

$$f_{X_1}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

$$f_{X_2}(x_2|x_1) = \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$$

mit $-\infty < x_1, x_2 < \infty$.

- Erwartungswert der Statistik 2. Ordnung

$$m_{X_1, X_2} = E\{X_1, X_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Ferner gilt hier die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*:

$$|E\{X_1, X_2\}| \leq |E\{X_1\}| |E\{X_2\}|$$

Gleichheit tritt ein bei statistischer Unabhängigkeit.

- Kovarianz: ist ein Maß der statistischen Abhängigkeit

$$\begin{aligned} \mu_{X_1, X_2} &= \text{COV}\{X_1, X_2\} = E\{(X_1 - E\{X_1\})(X_2 - E\{X_2\})\} \\ &= E\{X_1, X_2\} - E\{X_1\}E\{X_2\} \end{aligned}$$

- Korrelationskoeffizient:

$$\rho_{X_1, X_2} = \frac{\text{COV}\{X_1, X_2\}}{\sqrt{\text{VAR}\{X_1\}\text{VAR}\{X_2\}}}$$

Aus der CS-Ungleichung folgt: $|\rho| \leq 1$.

X_1, X_2 heißen *unkorreliert*, falls $\rho = 0$. Unabhängige Variablen sind stets unkorreliert, die Umkehrung gilt jedoch nicht im Allgemeinen (nur bei Gaußverteilung).

Unabhängigkeit: $E\{X_1, X_2\} = E\{X_1\}E\{X_2\}$, also $\text{COV}\{X_1, X_2\} = 0$

X_1, X_2 heißen *linear korreliert*, falls $\rho = 1$; sie heißen *antikorreliert*, falls $\rho = -1$. Ist z.B. $X_1 = X_2$, so ist $\rho = 1$, für $X_1 = -X_2$ gilt $\rho = -1$.

Allgemein gilt: X_1, X_2 linear abhängig $\Leftrightarrow X_2 = aX_1 + b \Leftrightarrow \rho^2 = 1$: "Mit Wahrscheinlichkeit 1 besteht zwischen den Variablen eine lineare Beziehung."

- Korrelationsmatrix:

$$R_{X_1, X_2} = \begin{pmatrix} \rho_{X_1, X_1} = 1 & \rho_{X_1, X_2} \\ \rho_{X_2, X_1} & \rho_{X_2, X_2} = 1 \end{pmatrix}$$

und aus den Korrelationskoeffizienten folgt die

- Kovarianzmatrix:

$$C_{X_1, X_2} = \sqrt{\text{VAR}\{X_1\}\text{VAR}\{X_2\}} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{X_1, X_2} \\ \rho_{X_2, X_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{X_1, X_1} & \mu_{X_1, X_2} \\ \mu_{X_2, X_1} & \mu_{X_2, X_2} \end{pmatrix}$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß zwischen den Komponenten einer vektoriellen Variablen eine lineare Beziehung besteht, ist das Verschwinden der Determinante der Kovarianzmatrix:

$$|C_{X_i, X_j}| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i + \beta_i = 0$$

mit

$$|C_{X_1, X_2}| = \mu_{X_1, X_2} \mu_{X_2, X_2} - \mu_{X_1, X_2} \mu_{X_2, X_1}$$

Im unkorrelierten Fall hat die Korrelationsmatrix Diagonalgestalt:

$$R_{X_1, X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition (Orthogonalität von Zufallsvariablen):

Zwei Zufallsvariable heißen orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet:

$$E\{X_1 \cdot X_2\} = 0$$

■

Ein Basissystem von Zufallsvariablen lässt sich mit Hilfe der *Karhunen-Loeve-Transformation (KLT)* orthogonalisieren:

$$C_{X'_1, X'_2} = \sqrt{\text{VAR}\{X_1\}\text{VAR}\{X_2\}} \begin{pmatrix} 1 + \rho_{X_1, X_2} & 0 \\ 0 & 1 - \rho_{X_1, X_2} \end{pmatrix}$$

Auf der Diagonalen der Korrelationsmatrix stehen die Eigenwerte als Hauptachsen-durchmesser eines Ellipsoids (einer Ellipse). Die Hauptachsen liegen in Richtung der Eigenvektoren der stochastischen Variablen X_1, X_2 . Deshalb auch die Bezeichnung Hauptachsentransformation oder Principal Component Analysis (PCA).

Beispiel: Zerlegung der Identität mittels Statistik zweiter Ordnung (siehe Kapitel 3). Abbildung bivariater stochastischer Variable (g_0, g_τ) in stochastisch entkoppelte Variable g_s (Summengrenzwert) und g_d (Differenzengrauwert) als Eigenvektoren der Signalrepräsentation.

■

Beispiel: Normalverteilung für $n=2$:

Dichte:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|C|}} \exp\left[-\frac{1}{2}\Delta C^{-1}\Delta^T\right]$$

mit

$$\Delta = [x_1 - E\{X_1\}, x_2 - E\{X_2\}]$$

Einsetzen ergibt:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2} \left[\frac{(x_1 - \mu_{X_1})^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_{X_2})^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \frac{(x_1 - \mu_{X_1})(x_2 - \mu_{X_2})}{\sigma_1\sigma_2} \right]\right]$$

mit

$$\begin{aligned}\mu_{X_1} &= E\{X_1\}, & \mu_{X_2} &= E\{X_2\}, \\ \sigma_1^2 &= \text{VAR}\{X_1\}, & \sigma_2^2 &= \text{VAR}\{X_2\}\end{aligned}$$

$$\varrho \equiv \varrho_{X_1, X_2} = \frac{\mu_{X_1 X_2}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

■

4.1.3 Optimale Schätzer

Statistische Schätzverfahren erlauben, aus Beobachtungen Aussagen abzuleiten. Diese Aussagen können die Ereignisse betreffen, welche als ursächlich verantwortlich für die Beobachtung angesehen werden. In diesem Fall wird also aus beobachtbaren Zufallsvariablen (X) auf verdeckte Variablen (ψ) geschlossen.

Optimale Schätzer in diesem Sinne maximieren eine Schätzfunktion, die sich aus der Bayes-Formel ableitet.

Eine andere Klasse von Schätzaufgaben betrifft die Bestimmung der Parameter einer Verteilungsfunktion (als bekannt vorausgesetzt) aus Beobachtungen aus dem Stichprobenraum.

In beiden Fällen wird also der Stichprobenraum durch endlich viele Beobachtungen abgetastet. Die Auswahl der Beobachtungen (die gewichtete Abtastfunktion des Stichprobenraumes) sollte geeignet sein, die gewünschten Aussagen entsprechend eines Gütekriteriums abzuleiten.

Optimalkriterien

Seien X eine *Beobachtungsvariable* (beobachtbare Zufallsvariable) und $\psi_j, j \in \{1, 2, \dots, \vartheta\}$ Ereignisse, die nicht direkt beobachtbar sind (*verdeckte Variable*). Es gelte $\psi_i \cap \psi_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Gegeben seien außerdem die a priori Wahrscheinlichkeiten $P(\psi_j)$.

Beispiel: Mikroskopbild

$X \sim$ Menge gestaltbeschreibender Merkmale (Umfang, Formfaktor)

$\psi_j \sim$ Klassen von Zelltypen

■

Frage: Welches der Ereignisse ψ_j ist eingetreten, wenn X beobachtet wird?

Nebenbedingung:

Es erfolgen n Versuche mit den Ergebnissen $x_1 = X(\omega_1), x_2 = X(\omega_2), \dots, x_n = X(\omega_n)$, so daß eine Wahrscheinlichkeit $P(X)$ angegeben werden kann.

Erinnerung: totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(X) = \sum_{j=1}^{\vartheta} P(X|\psi_j)P(\psi_j)$$

wobei $P(X|\psi_j)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ergebnisses X ist, wenn ψ_j vorliegt.

Die Antwort auf unsere Frage erhalten wir, indem wir die bedingte Wahrscheinlichkeit umdrehen: $P(\psi_j|X)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ereignis ψ_j vorlag, wenn das Ergebnis X gemessen wurde.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(\psi_j | X)$ heißt *a posteriori Wahrscheinlichkeit*.

Die *Bayessche Formel*

$$P(\psi_j|X) = \frac{P(X|\psi_j)P(\psi_j)}{P(X)}$$

zeigt, wie sich die a priori Wahrscheinlichkeiten $P(\psi_j)$ in a posteriori Wahrscheinlichkeiten verwandeln, wenn Information durch Messung (stochastische Versuche) gesammelt wird.

Antwort: Es liegt das Ereignis ψ_j vor, dessen a posteriori-Wahrscheinlichkeit unter den Randbedingungen des Experiments maximal wird.

Hiermit können wir nun die *MAP-Strategie* (Strategie der Maximierung der a posteriori Wahrscheinlichkeit) formulieren:

$$k = \operatorname{argmax}_j (P(\psi_j|X)) \rightarrow \psi_k$$

Die Bedeutung der MAP-Strategie ist vielfältig:

1. Bayes-optimaler Schätzer in der Mustererkennung (Klassifikation)
2. Bildanalyse als modellbasierte Lösung des inversen Problems. Hierbei sind etwa:

X	die Grauwerte eines Bildes,
ψ_i	die begrenzte Menge von Objekten (Äquivalenzklassen),
$P(\psi_i)$	das Modell der Szene (a priori Wissen)
$P(X \psi_i)$	die Wahrscheinlichkeit für das Erhalten eines bestimmten Bildes, gegeben eine Szene
$P(X)$	eine Konstante
$P(\psi_i X)$	die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Szene vorlag, wenn ein bestimmtes Bild vorlag

3. stochastisch optimierende Neuronale Netze (Boltzmann-Maschine)

MAP-Kriterium (maximum a posteriori probability): Es erfordert zusätzliches Wissen, das als a priori Wahrscheinlichkeit gegeben ist, so daß sich mit diesem Kriterium ein unterbestimmtes Problem lösen läßt.

Damit haben wir zwei Interpretationen der Bayes-Formel:

$$1. P(\psi_j) \xrightarrow{P(X|\psi_j)} P(\psi_j|X)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines stochastischen Ereignisses wird durch Messungen geschärft.

$$2. P(X|\psi_j) \xrightarrow{P(\psi_j)} P(\psi_j|X)$$

Ein unterbestimmtes, schlecht gestelltes Problem wird durch zusätzliches Wissen regularisiert. Das ist typisch für ein inverses Problem, wie es die Abbildungsgleichung der bedingten Wahrscheinlichkeiten beschreibt.

Umwandlung der Bayesschen Formel: Logarithmische Transformation ist monoton, d.h. eine Maximierung ist auch nach der Transformation möglich:

$$\log P(\psi_j|X) = \log P(X|\psi_j) + \log P(\psi_j) - \log P(X) \rightarrow \max$$

Vorteil dann insbesondere, wenn die Dichtefunktionen der Normalverteilung folgen.

Der Term $\log P(X)$ kann als Konstante für ein gegebenes Szenario vernachlässigt werden.

Hierarchie der Schätzverfahren

Aus der Bayesschen Formel lassen sich auch andere Schätzstrategien ableiten, die sich durch einschränkende Annahmen auszeichnen.

Kriterium	Ausdruck	Annahme
MAP	$P(\psi_j X) \rightarrow \max$	keine Einschränkungen
Bayes-Schätzer	$P(X \psi_j)P(\psi_j) \rightarrow \max$	$P(X) = const$
ML-Schätzer	$P(X \psi_j) \rightarrow \max$	$P(X), P(\psi_j) = const$
MMSE-Schätzer	$\Delta C^{-1} \Delta^T \rightarrow \min$	zusätzlich $\Delta \sim N(0, C)$

Daß der MAP-Strategie keinerlei Annahmen zu Grunde liegen, stimmt streng genommen nicht. Tatsächlich wird das Vorliegen einer *Gibbs-Verteilung/Boltzmann-Verteilung* der Realisierung $x = X(\omega)$ angenommen (siehe 4.5.2).

Bayes-Schätzer: Unter der Annahme $P(X) = const$ führen die Messungen $P(X | \psi_j)$ zu einer Wichtung der a priori Wahrscheinlichkeiten $P(\psi_j)$. Damit wird die in $P(\psi_j)$ enthaltene Unsicherheit (entspricht der Breite der zugehörigen Dichtefunktion) reduziert, die der a posteriori Wahrscheinlichkeit $P(\psi_j | X) \sim P(X | \psi_j)P(\psi_j)$ zugeordnete Dichtefunktion wird geschärft.
 → ausführlich in der Vorlesung Neuroinformatik.

Maximum-Likelihood-Schätzer (ML-Schätzer): Auswahl desjenigen ψ_j , welches $P(X|\psi_j)$ maximiert. Hierbei wird folgende Annahme gemacht: alle Ereignisse kommen mit gleicher Wahrscheinlichkeit vor, die a priori Wahrscheinlichkeit muß also nicht berücksichtigt werden. Damit liefert die ML-Schätzung die gleichen Ergebnisse wie das MMSE-Verfahren, falls die Ereignisse, die zu den Daten X führen, normalverteilt sind.

→ Vorlesung Neuroinformatik

MMSE-Schätzer: „Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers“ oder „Gaußsches Fehlerminimierungsverfahren“. Hierbei wird mit Δ der Vektor der Abweichung zwischen dem Modell und den Daten bezeichnet. Als Modell dient einfach der Erwartungswert $E\{X\}$, so daß $\Delta = X - E\{X\}$. Falls X $N(0, C)$ -verteilt ist, gilt $E\{\Delta\} = 0$. Mit diesen Bezeichnungen gilt dann:

$$\ln P(\psi_j | X) = \ln P(X | \psi_j) + \ln P(\psi_j) - \ln P(X) \rightarrow \max$$

mit

$$\ln P(\psi_j) = \text{const} \text{ und } \ln P(X) = \text{const},$$

also

$$\ln P(X|\psi_j) = \ln P(\Delta) = A - \frac{1}{2}\Delta C^{-1}\Delta^T$$

woraus folgt:

$$\max(\ln P(X | \psi_j)) \Leftrightarrow \min(\Delta C^{-1} \Delta^T)$$

MMSE-Kriterium: Es erfordert mehr Daten als Ereignisse, d.h. es ist möglich, mit diesem Kriterium ein überbestimmtes Problem zu lösen. Es findet z.B. in der Regression Verwendung, sowie für den *Wiener Filter* zur Restauration von gestörten Signalen (siehe auch Kapitel 4.2.1 und 4.3).

Ergänzender Hinweis:

Schätzer: $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Detektor: $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$, denn das Alphabet der möglichen Meßdaten und Ereignisse ist begrenzt.

Beispiel: Verifikation von Keypoint-Hypothesen

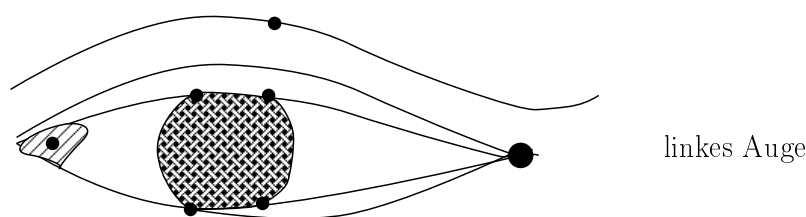
In diesem Beispiel soll die Bayessche Entscheidungsstrategie angewandt werden, um Fehler der Bildanalyse mittels Filterverfahren dadurch zu reduzieren, daß ein neuronaler Klassifikator mit seinem erlernten Wissen über eine hinreichend große Stichprobe die Filterergebnisse bewertet und verbessert.

Szenario: Detailanalyse der Augenregion

Mit steuerbaren Filtern werden unter Kontrolle eines Augenmodells Merkmalsvektoren als Filteroutput berechnet, die Hinweise auf die Detailstruktur der Augenregion geben. Insbesondere interessieren sogenannte Keypoints.

Es werden pro Auge folgende Keypoint-Klassen unterschieden:

- C_1 innere Augenecke
- C_2 äußere Augenecke
- C_3, \dots, C_6 Schnittpunkte der Iris mit oberem bzw. unterem Augenlid
- C_7 Punkt auf der Lidfalte



Problem: Modellgesteuert tasten die Filter das Bild ab und stoppen, wenn sie auf einen Keypoint einer Klasse C_j treffen. Diese Position wird neuronal überprüft, ob sie der Erfahrung aus der Stichprobe folgend auch Träger der Keypoint-Klasse C_j sein kann, wie vom Filter vorgeschlagen.

Die Filter können zwei Fehlinterpretationen treffen:

1. Es wird kein Keypoint gefunden, obwohl vorhanden (falsch-negativ; kann auch vom neuronalen Klassifikator nicht repariert werden).
2. Es wird ein Keypoint-Typ angegeben, der nicht stimmt (falsch-positiv; kann vom neuronalen Klassifikator korrigiert werden).

Klassifikator: DCS-Netz

Das DCS-Netz lernt die Zuordnung des Output-Vektors der Filterantworten zu den Positionen in der Augenregion, bezogen auf jede der sieben Keypoint-Klassen.

Stichprobe:

- 110 Bilder von linken und rechten Augen
- 668 Keypoint-Positionen in diesen Bildern
- 87 Trainingsmenge der Bilder
- 23 Testmenge der Bilder
- 70 Komponenten des Merkmalsvektors

Der falsch-negative Klassifikationsfehler (obwohl Keypoint vorhanden, wird er nicht gefunden) über der Testmenge war minimal (4.9% über alle Keypoint-Klassen) mit 127 Neuronen im DCS-Netz.

Fehlerrate der falsch-negativen Entscheidungen (%):

NN-Größe						
Neurons	23	32	59	87	115	127
Trainingsmenge						
Error (%)	9.7	8.2	5.5	3.4	1.5	0
Testmenge						
Error (%)	8.5	7.8	7.0	6.3	5.6	4.9

Zur Reduzierung der falsch-positiven Entscheidungsfehler wird die Bayes-Strategie angewendet.

Bayesscher Entscheidungsrahmen:

X Zufallsvariable der Position, an der der Filter stoppt und Keypoint-Klasse C_i anzeigt

$P(X = C_i)$ Wahrscheinlichkeit, daß an Position X tatsächlich Klasse C_i vorliegt (richtig positiv)

$P(X \neq C_i)$ Fehlerwahrscheinlichkeit für den Fall, daß an Position X tatsächlich *nicht* Klasse C_i vorliegt (falsch positiv)

Y Zufallsvariable des Outputs des neuronalen Klassifikators

$P(Y = C_i)$ Wahrscheinlichkeit für positive Entscheidungen des Klassifikators (Summe richtiger und falsch positiver Entscheidungen)

$P(Y = C_i | X = C_i)$ Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Klassifikator die richtige Entscheidung des Filters bestätigt (uninteressant)

$P(Y = C_i | X \neq C_i)$ bedingte Wahrscheinlichkeit für falsch-positive Entscheidung des Klassifikators (interessiert hier)

$P(Y \neq C_i | X = C_i)$ bedingte Wahrscheinlichkeit für falsch-negative Entscheidung des Klassifikators (wird nicht verbessert)

$P(X \neq C_i)$ a priori Fehlklassifikations-Wahrscheinlichkeit

$P(X \neq C_i | Y = C_i)$ a posteriori falsch-positive Fehlerwahrscheinlichkeit, daß eine detektierte Bildposition trotz Verifikation nicht der gesuchten Klasse angehört

$$\begin{aligned}
 P(X \neq C_i | Y = C_i) &= \frac{P(Y = C_i | X \neq C_i)P(X \neq C_i)}{P(Y = C_i)} \\
 &= \frac{P(Y = C_i | X \neq C_i)P(X \neq C_i)}{P(Y = C_i | X \neq C_i)P(X \neq C_i) + P(Y = C_i | X = C_i)P(X = C_i)}
 \end{aligned}$$

Der Nenner wird hierbei in die zwei möglichen Fälle aufgelöst, daß der Klassifikator sich für die Klasse C_i entscheidet, wenn der Filter dies ebenfalls tat oder zu einer anderen Entscheidung kommt.

Es gilt $P(X \neq C_i | Y = C_i) < P(X \neq C_i)$, d.h. durch die Verifikation wird die Rate der Fehlentscheidungen reduziert. Die Kombination der Suche von Keypoints mittels spezifischer Filter und nachfolgender Evaluation der Detektionsergebnisse mittels neuronalem Klassifikator zeigt die folgende Tabelle.

Fehlerraten der Entscheidungen (%):

Keypoint Class C_i	$\hat{P}(X \neq C_i)$	$\hat{P}(Y = C_i$ $ X \neq C_i)$	$\hat{P}(Y \neq C_i$ $ X = C_i)$	$\hat{P}(X \neq C_i$ $ Y = C_i)$
Innere Augenecke	14.4	6.7	2.2	1.1
Äußere Augenecke	8.3	11.1	1.0	1.0
Iris/Oberlid	3.2	14.3	0.9	0.5
Iris/Unterlid	4.1	0.0	0.9	0.0
Gesamtfehler	6.5	8.3	1.2	0.2

Das Verfahren reduzierte insgesamt die falsch-positiven Entscheidungen von 6.5 % auf 0.2 %.

Optimale Parameterschätzung

In diesem Abschnitt interessieren wir uns für die Schätzung von Parametern Θ einer bekannten Dichtefunktion $f_X(x; \Theta)$, $-\infty < x < \infty$, im Falle einer stetigen Zufallsvariablen X bzw. einer Menge gegebener Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X = x_i; \Theta)$, $i = 1, 2, \dots$, im Falle einer diskreten Zufallsvariablen X .

Wir werden die *Maximum-Likelihood-Methode* als optimales Punktschätzungsverfahren kennenlernen.

Motivierendes Beispiel:

Mittels Bildverarbeitung soll die Porengröße von Brotscheiben überwacht werden. Die Abweichung der Porengröße von einem Nennmaß sei eine $N(\mu, \sigma)$ -verteilte Zufallsgröße X . Diese ist durch ihre Verteilungsfunktion

$$F_X(\xi) = P(X < \xi) = \Phi(\xi; \mu, \sigma)$$

vollständig bestimmt (Φ ist das Gaußsche Fehlerintegral).

Sind ξ_u bzw. ξ_o die untere bzw. die obere zulässige Maßabweichung der Poren und ist das Nennmaß auf $\mu = 0$ normiert, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Unter- und Überschreiten zulässiger Maßabweichungen gegeben durch

$$\begin{aligned} P(X < \xi_u) + P(X \geq \xi_o) &= 1 - P(\xi_u \leq X < \xi_o) \\ &= 1 - [\Phi(\xi_o; 0, \sigma) - \Phi(\xi_u; 0, \sigma)] \end{aligned}$$

Da der Parameter σ unbekannt ist, muß er aus n unabhängigen Beobachtungen/Messungen geschätzt werden. Die hiermit berechneten Wahrscheinlichkeiten lassen auf die Qualität des Brotes schließen.

Seien $f_X(x; \Theta_1, \dots, \Theta_m)$, $-\infty < x < \infty$, die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße X bzw. $P(X = x_i : \Theta_1, \dots, \Theta_m) = p(x_i, \Theta_1, \dots, \Theta_m)$, $i = 1, 2, \dots, n$ die Einzelwahrscheinlichkeiten einer diskreten Zufallsgröße X . Dann dienen statistische Schätzverfahren dazu, die Parameter $\Theta_1, \dots, \Theta_m$ aus einer aus der Gesamtheit Ω gezogenen Stichprobe Ω_n , $\Omega_n \subset \Omega$ zu schätzen. Diese Schätzungen $\hat{\Theta}_i = \hat{\Theta}_i(\Omega_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\})$, $i = 1, \dots, m$, sind Zufallsgrößen, da sie von der Wahl der Stichprobe abhängen. Man nennt sie auch *Schätzfunktionen*. Ihre Realisierungen $\hat{\vartheta}_i = \hat{\vartheta}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, gewonnen von den konkreten Realisierungen x_1, \dots, x_n der Stichprobe Ω_n , heißen auch *Schätzwerte*. Eine gängige Methode ist die *Punktschätzung*.

Die X_i bzw. x_i deuten an, daß die stochastische Variable X bzw. die Realisierung x von der Auswahl der Stichprobe Ω_n aus der Gesamtheit Ω abhängt.

Definition (Punktschätzung):

Wird ein einziger aus einer Stichprobe genommener Wert mit dem unbekanntem Parameter Θ gleichgesetzt, so spricht man von einer Punktschätzung.

So ist z.B.

$$\hat{\Theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X}$$

eine *Punktschätzfunktion* des Parameters $\Theta = E\{X\}$ der Grundgesamtheit und

$$\hat{\vartheta}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x}$$

ein *Punktschätzwert* des Parameters $\Theta = E\{X\}$. ■

Nachteil: Man erhält keine Aussage über die Genauigkeit einer Punktschätzung (z.B. im Fall kleiner Stichproben).

Alternative: Konfidenzschätzung \sim Schätzung eines Intervalls, in dem $\hat{\vartheta}$ mit einem gewissen Vertrauensniveau zu finden ist.

Zur Schätzung eines Parameters können mehrere Schätzfunktionen dienen (z.B. Mittelwert oder Medianwert). Nach R.A. Fisher (1930) gilt für eine gute Schätzung, daß sie *erwartungstreu* und *konsistent* ist.

Definition (erwartungstreu - unbiased):

Die Punktschätzfunktion $\hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n)$ eines Parameters Θ heißt *erwartungstreu*, falls der Erwartungswert von $\hat{\Theta}$ gleich dem Parameter Θ ist, wenn also gilt $\Theta = E\{\hat{\Theta}\}$. Falls $E\{\hat{\Theta}\}$ vom Stichprobenumfang n abhängt und falls gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{\hat{\Theta}\} = \Theta$, so heißt die Punktschätzfunktion *asymptotisch erwartungstreu*. ■

Erwartungstreue der linearen Regression erfordert Gaußverteilung der Daten.

Beispiel: Das arithmetische Mittel $\hat{\Theta} = \bar{X}$ ist eine erwartungstreue und der Median $\hat{\Theta} = \tilde{X}$ ist eine asymptotisch erwartungstreue Punktschätzfunktion für den Erwartungswert $\Theta = E\{X\}$. ■

Definition (konsistent - passend):

Eine Punktschätzfunktion $\hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n)$ eines Parameters Θ heißt konsistent, wenn $\hat{\Theta}$ mit wachsendem n gegen Θ konvergiert, d.h. wenn für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\Theta}(X_1, \dots, X_n) - \Theta| < \epsilon) = 1.$$

Beispiel: Das arithmetische Mittel und der Median sind konsistente Punktschätzfunktionen für den Erwartungswert $\Theta = E\{X\}$. ■

Definition (Likelihood-Funktion):

Seien x_1, x_2, \dots, x_n konkrete Stichprobenelemente einer Grundgesamtheit, d.h. Realisierungen einer stetigen/diskreten Zufallsvariablen X , so bezeichnen im stetigen Fall

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \Theta)$$

bzw. im diskreten Fall

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta) = \prod_{i=1}^n P(X = x_i; \Theta)$$

die Likelihood-Funktion der Stichprobe. ■

Die Likelihood-Funktion $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \Theta)$ ist für jede konkrete Stichprobe eine Funktion des unbekanntenen Parameters Θ .

Die *Maximum-Likelihood-Methode* der Parameterschätzung besteht darin, als Punktschätzwert $\hat{\vartheta}$ für den unbekanntenen Parameter Θ denjenigen zu ermitteln, für den die Likelihood-Funktion maximal wird. Im diskreten Fall bedeutet das, den Punktschätzwert unter allen möglichen für Θ auszuwählen, für den das Ereignis $\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\}$ die größte Wahrscheinlichkeit besitzt.

Notwendige Bedingung: relatives Maximum

$$\frac{dL}{d\Theta} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d \log L}{d\Theta} = \frac{1}{L} \frac{dL}{d\Theta} = 0$$

(Voraussetzung ist Differenzierbarkeit der Likelihood-Funktion)

ML-Schätzer sind konsistent und wenigstens asymptotisch erwartungstreu.

Beispiel: MLM1

Schätzung der Wahrscheinlichkeit $P(A) = p$ für das Eintreten des Ereignisses A auf Grundlage von 120 unabhängigen Versuchen, in deren Ergebnis 96 mal das Ereignis A eintrat.

Die Zufallsvariable X unterliegt einer Null-Eins-Verteilung:

Hier interessieren nur zwei Versuchsausgänge, das Eintreten des Ereignisses A oder des komplementären Ereignisses \bar{A} , d.h. $\Omega = A \cup \bar{A}$. Dem Ereignis A wird der Wert $X = 1$ zugewiesen und dem Ereignis \bar{A} wird der Wert $X = 0$ zugewiesen. Anders als bei der Binomialverteilung ist die Anzahl n der Versuche kein Parameter der Verteilungsfunktion.

Die Verteilungsfunktion lautet

$$F_X(\xi) = P(X < \xi) = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi \leq 0 \\ p & \text{für } 0 < \xi \leq 1 \\ 1 & \text{für } \xi > 1 \end{cases}$$

$$\Omega = A \cup \bar{A}$$

$$P(X = 1) = p, P(X = 0) = 1 - p$$

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

$$\text{VAR}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Zu schätzen sei der Parameter $\Theta = p$.

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_{120}; p) &= \prod_{i=1}^{120} P(X = x_i) \\ &= [P(X = 1)]^{96} [P(X = 0)]^{120-96} \\ &= p^{96} (1 - p)^{24} \end{aligned}$$

$$\log L = 96 \log p + 24 \log(1 - p)$$

$$\frac{d \log L}{dp} = \frac{96}{p} - \frac{24}{1 - p} = 0$$

Hieraus folgt als Schätzwert

$$\hat{\vartheta} = \hat{p}_R = \frac{96}{120} = 0.8.$$

Allgemein gilt für die Schätzfunktion, wenn das Ereignis A k mal eintritt bei n unabhängigen Versuchen:

$$\hat{\Theta} = \hat{p} = h_n(A) = \frac{k}{n}.$$

Die relative Häufigkeit $h_n(A)$ stellt also die Maximum-Likelihood-Schätzung des Parameters $\Theta = p$ dar. ■

Beispiel: MLM2

Schätzung der Parameter $\Theta_1 = \mu$ und $\Theta_2 = \sigma^2$ einer $N(\mu, \sigma)$ -verteilten stochastischen Variablen X .

Die Likelihood ergibt sich aus dem Produkt von n eindimensionalen Gaußverteilungen.

$$L(x_1, \dots, x_n; \Theta_1 = \mu, \Theta_2 = \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0 \quad (4.2)$$

Aus (4.1): $\sum_{i=1}^n x_i - n\mu = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\vartheta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$

Einsetzen $\hat{\vartheta}_1$ für μ in (4.2):

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2 n \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\vartheta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Die entsprechenden Punktschätzfunktionen sind also

$$\hat{\Theta}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\hat{\Theta}_2 = \text{VAR}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

■

4.2 Stochastische Prozesse

In diesem Kapitel erfolgt eine Erweiterung des vorangegangenen Kapitels auf die Situation, wie sie in der Bildverarbeitung und der Bildanalyse vorliegt:

- Messungen erfolgen in Raum und/oder Zeit!
- Meßwerte sind auf einen Träger aufgeprägt, werden also durch eine Abtastfunktion aufgespannt. Der Träger kann neben Raum/Zeit auch irgendeine physikalische Größe repräsentieren (Feldstärke, Beleuchtungsstärke,...).

Die Theorie stochastischer Prozesse befaßt sich mit der Beschreibung zufälliger Variabler in Abhängigkeit von einem *Parameter*: $X(t)$. Hierbei steht $t \in T$ z.B. für die Zeit, aber auch möglicherweise für die Angabe des Ortes oder für eine andere physikalische Größe.

Definition (stochastischer Prozeß):

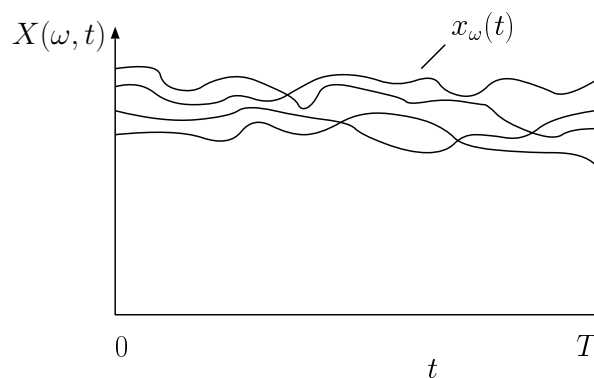
Ein stochastischer Prozeß ist eine Abbildung $X : \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}$ bzw. $T \subset \mathbb{N}$, die für jeden festen, nicht zufälligen Parameter $t \in T$ eine Zufallsgröße X_t und für jedes feste $\omega \in \Omega$ eine gewöhnliche reelle Funktion $x(t)$ darstellt. ■

Demzufolge hat ein stochastischer Prozeß zwei verschiedene Möglichkeiten der Projektion:

1. *zufällige Funktion*

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^{|T|} \\ \omega &\longmapsto X(\omega, t) = x_\omega(t) \end{aligned}$$

Jedem Elementarereignis ω ist damit eine reelle Funktion $x_\omega(t)$ zugeordnet. Diese Funktion $x_\omega(t)$ heißt *Realisierung eines stochastischen Prozesses*. Der Prozeß wird hiernach durch die Gesamtheit seiner (unendlich vielen) Realisierungen $x_\omega(t)$ beschrieben.



Beispiel: Grauwertverlauf über 'homogener' Fläche, gemessen

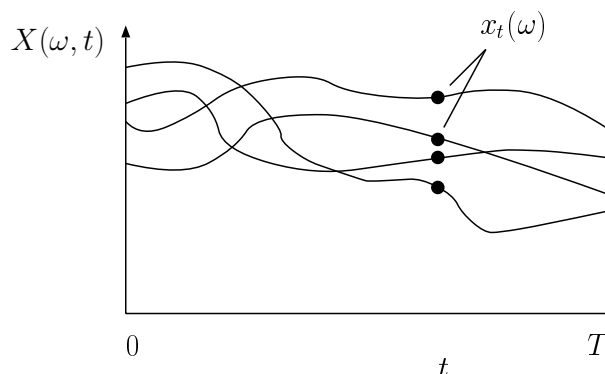
- auf verschiedenen Zeilen
- auf gleicher Zeile in unterschiedlichen Bildern einer Bildfolge

Entstammen alle Funktionen einem Prozeß, so sind ihre Verläufe zur Prozeßcharakterisierung als gleichartig anzusehen. ■

2. Zufallsvariable

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^{|\Omega|} \\ \omega &\longmapsto X(\omega, t) = x_t(\omega) \end{aligned}$$

Jedem Parameter $t \in T$ ist eine Zufallsgröße $X_t \in \mathbb{R}^{|\Omega|}$ mit den Werten $X_t(\omega) = x_t \in \mathbb{R}$ zugeordnet. An einer festen Koordinate $t \in T$ erzeugt ein zufälliger Prozeß eine Zufallsgröße.



Beispiel: *Grauwert oder Farbwert im gleichen Bildpunkt in aufeinanderfolgenden Bildern einer Bildfolge*

Beide Projektionen eines stochastischen Prozesses sollten gleichwertig für die Prozeßanalyse sein. In der Praxis treten hierbei aber oft Probleme auf.

Ist T mehrdimensional, so heißt die Realisierung $x_\omega(t)$ des stochastischen Prozesses auch *Ereignisfeld* (random field). Ist T eine endliche Menge, $|T| = n$, so erzeugt der Prozeß einen Zufallsvektor, z.B. als regelmäßig abgetastete Funktion in einem Intervall des Trägers.

Einem durch $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ repräsentierten Zufallsvektor wird eine Verteilungsfunktion zugeordnet.

Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned} F_X(\xi, t) &= F_X(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2; \dots; \xi_n, t_n) \\ &= P(X_{t_1} \leq \xi_1, \dots, X_{t_n} \leq \xi_n) \\ &= P(x(t_1) \leq \xi_1, \dots, x(t_n) \leq \xi_n) \end{aligned}$$

- Die n -dim. Verteilungsfunktion F_X eines stochastischen Prozesses X entspricht der n -dim. Verteilungsfunktion der aus dem Prozeß herausgenommenen n -dim. Zufallsgröße $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.
- Da die Lage der Parameterschnitte $t_i \in T$ ($i = 1, 2, \dots, n$) und die Anzahl n selbst beliebig gewählt werden können, hat ein stochastischer Prozeß unendlich viele mehrdimensionale Verteilungsfunktionen.

Bemerkungen:

1. Alle Aussagen über Zufallsgrößen lassen sich auf stochastische Prozesse übertragen.
2. I. allg. muß die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion vom Parameter beachtet werden. Dies ist charakteristisch für einen *nicht stationären Prozeß*.
3. I. allg. ist es nicht möglich, die Verteilungsfunktion eines stochastischen Prozesses vollständig zu bestimmen. Oftmals genügt bereits die Bestimmung endlich vieler Momente.
4. Die Momente eines nicht stationären Prozesses hängen vom Parameter t ab.
5. Werden sie aus der Realisierung eines Elementarereignisses geschätzt, d.h. aus $x_\omega(t)$, spricht man von *parametrischer Schätzung*. Erfolgt die Schätzung aus Realisierungen mehrerer Elementarereignisse, also aus $x_t(\omega)$, spricht man von *Ensemble-Schätzung*.
Im Falle eines nicht stationären Prozesses sind Ensemble-Schätzungen abhängig von der Wahl des Parameterwertes. Momente sind also als Funktionen von Parametern zu verstehen. Dieselbe Abhängigkeit existiert in diesem Fall auch bei lokalen Schätzungen von der Wahl des Parameterintervalls.

Beispiel: Ensemble-Schätzung

Für eine Statistik zweiter Ordnung sind folgende Größen von Interesse.

1. Mittelwertfunktion

$$m_X(t) = E\{X_t\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, t) dx \quad , \quad t \in T$$

2. Varianzfunktion

$$\sigma_X^2(t) = E\left\{(X_t - E\{X_t\})^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(t))^2 f_X(x, t) dx$$

Eine Statistik zweiter Ordnung beschreibt die Beziehungen zwischen zwei stochastischen Variablen eines stochastischen Prozesses. ■

Für beliebige Werte t_1 und t_2 wird der Zusammenhang zwischen $X(t_1)$ und $X(t_2)$ durch die *Kovarianzfunktion*

$$\text{COV}\{X(t_1), X(t_2)\} = E\{(X(t_1) - E\{X(t_1)\})(X(t_2) - E\{X(t_2)\})\}$$

oder durch die wie folgt definierte *Autokorrelationsfunktion* ausgedrückt.

Definition (Autokorrelationsfunktion):

Durchlaufen t_1 und t_2 unabhängig voneinander alle Werte der Parametermenge T , so stellt die Funktion

$$k_X(t_1, t_2) = E \{X(t_1), X(t_2)\}$$

die *Autokorrelationsfunktion* (AKF) des Prozesses X dar. ■

Schlußfolgerungen:

- Bei Existenz der 2D-Dichtefunktion $f_X(x_1, t_1; x_2, t_2)$ gilt:

$$k_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$$

- Autokorrelationskoeffizient:

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{k_X(t_1, t_2) - E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\}}{\sqrt{\sigma_X^2(t_1)\sigma_X^2(t_2)}}$$

- AKF ist bez. t_1, t_2 symmetrisch:

$$k_X(t_1, t_2) = k_X(t_2, t_1) \quad t_1, t_2 \in T$$

- Für $t_1 = t_2 = t$ gilt

$$k_X(t_1, t_2) = E \{X^2(t)\} = m_X^{(2)}(t) = \sigma_X^2(t) + m_X^2(t)$$

- Zwei Prozesse, die sich durch eine nicht zufällige Funktion unterscheiden, haben die gleiche Autokorrelationsfunktion, z.B. $X(t)$ und $Y(t) = X(t) - \alpha t$.
- Zwei Prozesse X und Y , die einen *Vektorprozeß* (X, Y) bilden, sind durch die *Kreuzkorrelationsfunktion*

$$k_{XY}(t_1, t_2) = E \{X(t_1), Y(t_2)\}$$

miteinander verbunden ($t_1 \in T_X, t_2 \in T_Y$).

- *Statistisch unabhängige Prozesse* :

$$f_{XY}(x, t_1; y, t_2) = f_X(x, t_1)f_Y(y, t_2) \quad \forall t_1 \in T_X, t_2 \in T_Y$$

- *Unkorrelierte stochastische Prozesse*:

$$E \{X(t_1), Y(t_2)\} = E \{X(t_1)\} E \{Y(t_2)\} \quad \forall t_1 \in T_X, t_2 \in T_Y$$

- *Orthogonale stochastische Prozesse*:

$$E \{X(t_1), Y(t_2)\} = 0 \quad \forall t_1 \in T_X, t_2 \in T_Y$$

Statistisch unabhängige Prozesse sind stets unkorreliert, der Umkehrschluß gilt jedoch nicht.

4.2.1 Stationäre stochastische Prozesse

Das Hauptproblem des Modelles stochastischer Prozesse liegt in ihrer möglichen *Nichtstationarität*. Um die hieraus resultierenden Probleme zu begrenzen, gibt es zwei Möglichkeiten:

1. *Lokale Prozeßanalyse*: Für ein $t^* \in T$ werden die Prozeßparameter der Zufallsvariablen $X_{t^*}(\omega)$ geschätzt (Ensemble-Schätzung).

Frage: An welcher Position t^* soll die Analyse erfolgen?

Voraussetzung: Der Prozeß ist unverändert konstant über alle Realisierungen x_t .

2. *Globale Prozeßanalyse*: Für eine Realisierung x_{ω^*} eines Elementarereignisses $\omega^* \in \Omega$ erfolgt die Schätzung der Prozeßparameter der Zufallsvariablen $X_{\omega^*}(t)$ (parametrische Schätzung).

Frage: Ist es gerechtfertigt, die Prozeßparameter aus nur einer Realisierung zu schätzen?

Voraussetzung: Der Prozeß ist unverändert konstant über die Elementarereignisse ω .

Oft liegt die Wahrheit in der Mitte!

Definition (stationär):

Ein stochastischer Prozeß an beliebigen Parameterwerten $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, n beliebig, heißt genau dann *stationär*, wenn sich die Verteilungsfunktion bei einer Verschiebung um ein beliebiges τ nicht ändert:

$$F_X(\xi_1, t_1 + \tau; \xi_2, t_2 + \tau; \dots; \xi_n, t_n + \tau) = F_X(\xi_1, t_1; \xi_2, t_2; \dots; \xi_n, t_n)$$

■

Ein beliebiger n -dimensionaler Schnitt durch einen stationären zufälligen Prozeß darf beliebig verschoben werden, ohne daß sich die Verteilungsfunktion ändert, wenn nur die Abstände der Parameter erhalten bleiben.

Konsequenz für die Dichtefunktion:

$n=1$:

$$f_X(x, t + \tau) = f_X(x, t) \xrightarrow{\tau=-t} f_X(x, t) = f_X(x, 0)$$

D.h. Parameterunabhängigkeit der Dichtefunktion, woraus folgt:

$$m_X(t) = m_X(0)$$

n=2:

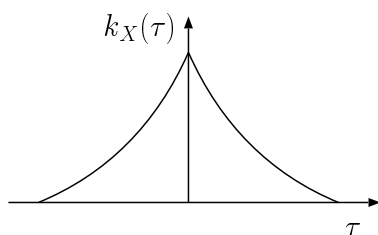
$$f(x_1, t_1; x_2, t_2) = f(x_1, 0; x_2, t_2 - t_1) \quad \text{mit } \tau = -t_1$$

D.h. die 2D-Dichte hängt nur von der Differenz $t_2 - t_1$ ab; die Autokorrelationsfunktion hängt ebenfalls nur von dieser Differenz ab:

$$k_X(t_1, t_2) = k_X(t_2 - t_1) \stackrel{!}{=} k_X(\tau)$$

Bemerkung zur Autokorrelationsfunktion:

1. symmetrische Funktion: $k_X(\tau) = k_X(-\tau)$
2. $k_X(0) \geq k_X(\tau)$



Definition (schwach stationär):

Ein Prozeß heißt schwach stationär, wenn gilt:

1. $E\{X_t\} = m_X(t) = m_X(0) = m_X$
2. $E\{X_{t_1}, X_{t_2}\} = k_X(t_2 - t_1) = k_X(\tau)$
3. $E\{X_t^2\} < \infty$

■

Die ersten beiden Momente genügen zur vollständigen Charakterisierung eines schwach stationären Prozesses.

Sei ein Aufpunkt im Parameterraum mit der relativen Position Null (0) angezeigt und ein um den Vektor τ verschobener Testpunkt im Parameterraum mit der relativen Position τ angezeigt. Dann erhält man

Autokorrelationskoeffizient eines schwach stationären Prozesses:

$$\rho(\tau) = \frac{k_X(\tau) - m_X^2}{\sigma^2(0)} = \frac{\sigma^2(\tau)}{\sigma^2(0)}$$

wobei mit $\sigma^2(\tau)$ die Kovarianz und mit $\sigma^2(0)$ die Varianz gemeint ist.

Unter der zusätzlichen Annahme, daß der schwach stationäre Prozeß außerdem diskret und periodisch im Parameterraum sei, d.h. $\tau \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$, $\rho(\tau) = \rho(\tau + M) = \rho(\tau - M)$, gilt

Autokovarianzmatrix (diskreter period. Prozeß):

$$C_\tau = \sigma^2(0) \underbrace{\begin{bmatrix} \rho(0) = 1 & \rho(M - 1) & \rho(M - 2) & \dots & \rho(1) \\ \rho(1) & \rho(0) = 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho(M - 1) & \dots & \dots & \dots & \rho(0) = 1 \end{bmatrix}}_{\text{Autokorrelationsmatrix } R_\tau}$$

Die Autokovarianzmatrix/Autokorrelationsmatrix eines schwach stationären diskreten Zufallsprozesses hat *Toeplitzform* (wie auch die Matrix des Faltungsoperators für LSI-Operatoren!). Hierunter verstehen wir eine quadratische Matrix mit gleichen Elementen auf allen Diagonalen. Die Einträge a_{ij} hängen nur von der Differenz $(i - j)$ ab.

Deshalb ist die Fouriertheorie auch anwendbar auf Realisierungen derartiger Prozesse. Das heißt, die Autokovarianzmatrix läßt sich durch die Fouriertransformation diagonalisieren. Verschiebungsinvarianz linearer Operatoren und schwache Stationarität der Daten entsprechen einander!

- Die Fouriertransformierte der *Autokorrelationsfunktion* ist gleich dem *Leistungsspektrum* der Realisierung eines schwach stationären Prozesses:

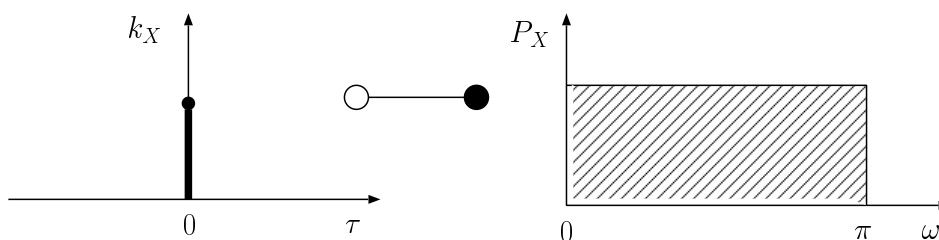
$$P_X(\omega) = |F(\omega)|^2 = \mathcal{F}\{k_X(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} k_X(\tau) d\tau$$

beziehungsweise

$$k_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{P_X(\omega)\},$$

wobei $\omega = 2\pi u$ die Kreisfrequenz bedeutet.

- Ein (unkorrelierter) weißer Rauschprozeß hat ein Leistungsspektrum, das unabhängig von der Frequenz ist ($P_X(\omega) = const$) und demzufolge eine impulsförmige AKF ($k_X(\tau) = \sigma(0)\delta(\tau)$).



LSI-Operatoren auf schwach stationären Ereignisfeldern :

Annahme: Ein LSI-Operator $h(t)$ wirke auf einen Prozeß $X(t)$ und erzeuge einen Prozeß $Y(t)$. Dann gilt im Frequenzraum

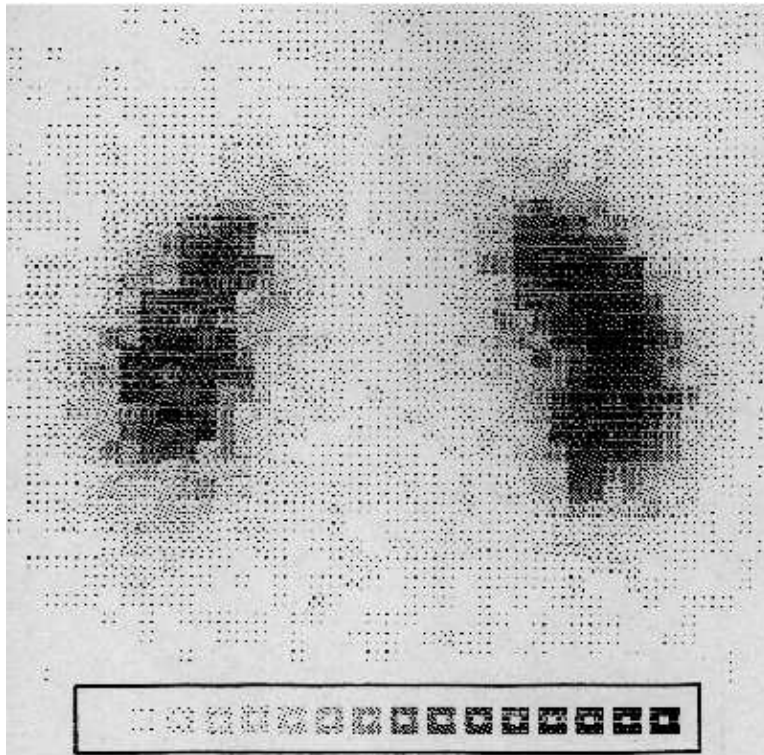


Abbildung 4.1: Verrauschtes und verschmiertes Nierenzintigramm.

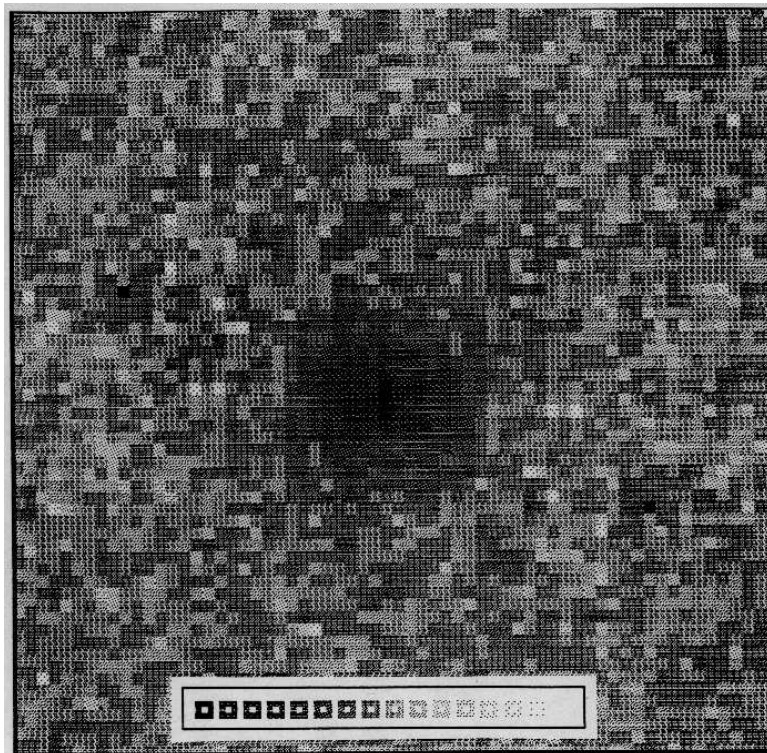


Abbildung 4.2: Fourierleistungsspektrum des Nierenzintigramms.

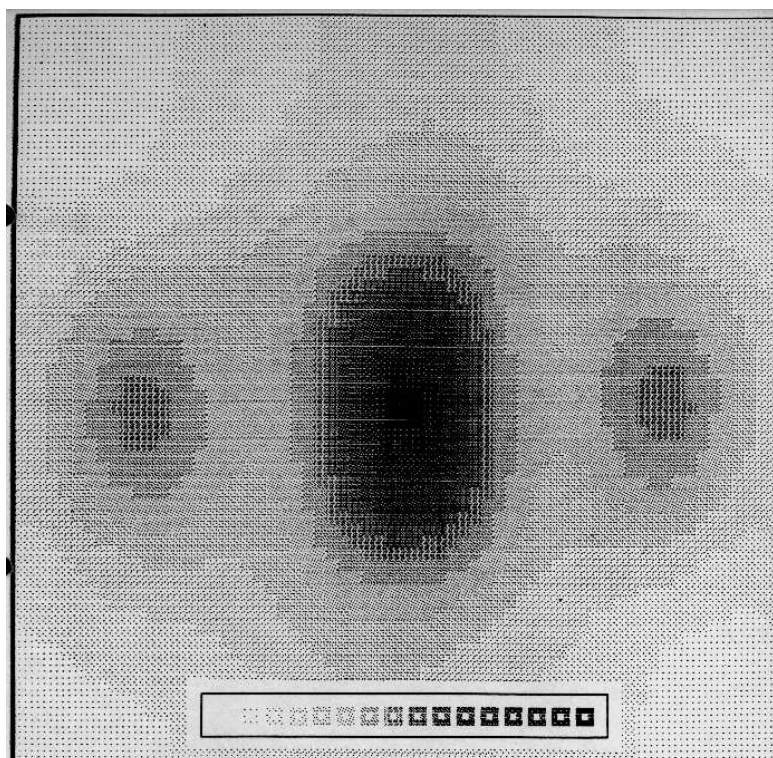


Abbildung 4.3: Autokorrelationsbild des Nierenzintigramms.

$$P_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 P_X(\omega)$$

LSI-Operatoren sind auf schwach stationäre Ereignisfelder anwendbar, wobei das *Faltungstheorem* bezüglich quadratischer Formen gilt.

Außerdem gilt

$$m_Y = |H(0)|m_X$$

Anwendungen:

Alle Bildsignale sind als Realisierungen stochastischer Prozesse aufzufassen. Filteroperationen (LSI-Filter) erfordern die Annahme der *homogenen schwachen Stationarität*.

Wiener-Theorie: Entwurf optimaler Schätzer nach dem MMSE-Kriterium zur Rekonstruktion (Restauration) der Objektfunktion.

Wienerfilter: Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers zwischen geschätzter Objektfunktion \hat{X} und modellierter Objektfunktion X . Der Operator h_s sei hier sowohl für eine deterministische Störung (Verschmierung) als auch für eine stochastische Störung (Rauschen) verantwortlich.

$$X \xrightarrow{h_s} Y \xrightarrow{h_s^{-1}} \hat{X}$$

Aufgabe: Finde eine Funktion h , die auf $Y(t)$ angewandt, $X(t)$ bezüglich des mittleren quadratischen Fehlers optimal annähert:

$$E \left\{ (X - \hat{X})^2 \right\} \longrightarrow \min$$



Abbildung 4.4: Wiener-Filterung eines Knochenszintigrammes.
unten: global stationäres Filter; mitte: lokal adaptives Filter; oben: Original

Wissen: homogen stationäre AKF des Rauschens N und des Signals X .

Lösung (im Frequenzraum): ω ist hier die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi u$.

$$H_W(\omega) = \frac{1}{MTF(\omega)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{P_N(\omega)}{P_X(\omega)}}$$

$$H_W(\omega) = H_I(\omega) \cdot H_{Kond}(\omega)$$

$MTF = |\mathcal{F}\{PSF\}|$ Modulationsübertragungsfunktion als Betrag der Fourier-transformierten der Punktverbreiterungsfunktion

H_I inverses Filter: Grenzwert für vernachlässigbares Rauschen;

H_{Kond} Konditionierungsfiler (vermittelt zwischen eigentlicher Signalstruktur und Rauschstruktur in den Daten)

Probleme sind hier die Stationarität von N und X ; außerdem läßt sich nur ein statistisches Modell herstellen.

Lösung des Problems ist die lokale Adaption durch eine Filterbank.

Im Grenzfall starken Rauschens geht das Wiener-Filter in das *Template-Matching-Filter* über: $H_W \sim H_T$.

Template-Matching-Filter (Maskenanpassungsfiler):

Annahmen: Die zu detektierende Struktur $x \in X$ sei bekannt und als Impulsantwort eines Filters h_x (die Maske des Signals) modelliert. Die Signaldaten seien durch unkorreliertes (weißes) Rauschen N gestört.

Aufgabe: Optimale Detektion der modellierten Struktur x aus der Menge aller möglichen Modelle X durch Kreuzkorrelation des Signales y aus der Menge aller möglichen Signale Y mit der Maske h_x mit dem Ziel der Maximierung des Quotienten aus integraler Signalleistung P_X und integraler Rauschleistung P_N über der Maske der Ausdehnung $\{K \times K\}$. Die Frequenzübertragungsfunktion des Filters lautet (ω ist wieder die Kreisfrequenz)

$$H_T(\omega) = |const| \frac{|H_X(\omega)|}{P_N(\omega)}$$

Da im Falle eines weißen Rauschens gilt $P_N(\omega) = const$, ist

$$H_T(\omega) \sim |H_X(\omega)|.$$

Die bei der Kreuzkorrelation zwischen dem deterministischen Strukturmodell und dem gestörten Signal zu maximierende Filterantwort besitzt Abhängigkeiten von Amplitude und Phase der Maske. Um Invarianz bzgl. Änderungen der Amplitude der gesuchten Struktur zu erreichen (z.B. bei unterschiedlicher Beleuchtung), wäre Filterung

mit einem Phasenfiter gewünscht. Dies leistet ein *Phase-only Matched Filter (POMF)* mit

$$H_{POMF}(\omega) \sim \frac{H_X(\omega)}{|H_X(\omega)|}.$$

4.2.2 Regional und lokal stationäre Prozesse

Wir haben in 4.2 die Ensemble-Schätzungen von Momenten stochastischer Prozesse als lokale Verfahren im Parameterraum eingeführt. Parametrische Schätzung von Momenten stochastischer Prozesse haben wir als global bezeichnet, weil sie Erwartungswerte über alle Parameterwerte $t \in T$ darstellen. Sie wurden bisher nicht definiert. Das soll hier erfolgen und der Zusammenhang zur Ensemble-Schätzung hergestellt werden.

In der Folge werden wir parametrische Schätzung nicht nur global über dem gesamten Signalträger ermitteln, sondern auch in regional und lokal eingeschränkten Umgebungen eines Aufpunktes des Schätzers. Dies erlaubt uns, die Wirkung von LSI-Operatoren der Bildverarbeitung (z.B. solchen, die Mittelwerte berechnen) als Schätzer über gestörten Signalen zu interpretieren.

Ergodischer Prozeß

Annahmen:

- X sei ein stationärer Prozeß
- $x = X(\omega, t)$ sei eine Realisierung des Prozesses
- $f_X(x, t)$ sei die 1D-Dichtefunktion
- $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine beliebige Funktion

Definition (parametrischer Mittelwert):

Der Ausdruck

$$\overline{\varphi[x(t)]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi[x(t)] dt$$

heißt parametrischer (zeitlicher, örtlicher) Mittelwert der Realisierung x bezüglich der Funktion φ . Ist $\varphi[x(t)] = x(t)$, dann heißt $\overline{x(t)}$ der parametrische Mittelwert der Realisierung selbst. ■

Definition (ergodischer Prozeß):

Der stationäre stochastische Prozeß X heißt ergodisch bezüglich φ , falls

$$\overline{\varphi[x(t)]} = E_\varphi \{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_X(x, t) dx$$

$E_\varphi \{X(t)\} = m_{\varphi(x)}$ heißt auch Ensemblemittelwert des stochastischen Prozesses bezüglich φ . ■

Definition (Ergodenhypothese):

Der parametrische Mittelwert \bar{x} und der Ensemblemittelwert m_x der Realisierungen x des Prozesses X stimmen mit der Wahrscheinlichkeit Eins überein. ■

Die Ergohypothese kann entsprechend für $\overline{\varphi(x)}$ und $m_{\varphi(x)}$ formuliert werden. Entsprechende Schätzungen der Varianz liefern: σ_x^2 aus Ensemble und v_x parametrisch.

Für einen ergodischen Prozeß reicht eine einzige Realisierung $x = X(\omega)$, um den Ensemblemittelwert des stochastischen Prozesses durch seinen parametrischen Mittelwert zu schätzen. Eine notwendige Bedingung für die Ergodizität ist allerdings die Stationarität.

An dieser Stelle ist der Begriff der *homogenen Stationarität* über den gesuchten Parametern (kanonische Basis der Realisierung $x(t)$) von Interesse, eine sehr starke Forderung, die nur in Ausnahmefällen gilt. Ein Ausweg ist das Definieren von Regionen, die diese Forderung erfüllen. Dieses Problem begegnet uns i.allg. bei der Kantendetektion, der Bildglättung und der Bildverarbeitung mit lokalen Operatoren.

Verletzung der Ergodenhypothese ist unumgänglich bei Schätzung/Detektion in realen Bildern, wenn die Operatorfenster die Grenzen homogener Populationen von Bildpunkten überschreiten!

Homogene schwach stationäre Bildmodelle

Betrachte ein Bild ohne Objekt– aber mit Texturstruktur. Homogene schwach stationäre Bildmodelle sind für die Klassifizierung der Textur des gesamten Bildes geeignet.

Seien

- (m, n) : Bildpunktkoordinaten
- O : Population der Signalwerte der Objektbildpunkte (Objektfunktion)
- B : Population der Signalwerte der Untergrundbildpunkte (Untergrundfunktion)
- f : Menge aller Signalwerte (Bildfunktion)

In diesem Bildmodell existiert aber *kein Segmentierungsproblem*

Laut Voraussetzung gibt es keinen Unterschied zwischen Objekt–BP und Untergrund–BP. Eine Segmentierung ist also nicht möglich: $f \stackrel{!}{\neq} O \cup B$. Die Bildfunktion f wird vollständig charakterisiert durch

- den mittleren Grauwert: $m_f(m, n) = m_f(0, 0) = const$
- die Autokorrelationsfunktion $k_f(\tau)$

Ansatz zur Vereinfachung des Modells:

- die Bildfunktion f sei das Abbild eines nicht verschmierten aber verrauschten Meßsignals s .
- das ungestörte Meßsignal s besitze eine durch die AKF beschriebene Dynamik

Das heißt,

$$s = m_s + \sqrt{\sigma_s^2} \delta_s$$

und

$$f = s + \sqrt{\sigma_n^2} \delta_n$$

Im Falle der Ergodizität gilt $m_s = \bar{s}$ und $\sigma_s^2 = v_s$.

Außerdem sei hier

- δ_n signalunabhängige Rauschfunktion, unkorreliert, weiß mit Mittelwert Null und Varianz Eins. σ_n^2 ist die Varianz des Rauschens.
- δ_s unkorreliertes weißes Rauschen zur Modellierung der Dynamik (Textur) des Meßsignals mit Mittelwert Null und Varianz Eins. σ_s^2 ist die Varianz des Meßsignals s .

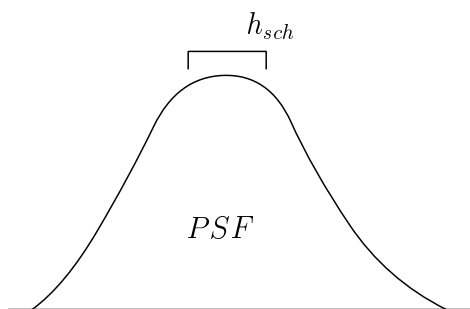
Ohne zusätzliches Wissen sind die Prozesse "Rauschen" und "Textur" nicht zu unterscheiden.

Frequenzraummethoden sind global definiert und damit am besten an das homogen stationäre Bildmodell angepaßt (siehe Wiener-Filter). Es lassen sich aber auch lokale Operatoren zur Schätzung der Parameter des Ereignisfeldes anwenden. Dazu muß die durch die PSF beschriebene Verschmierung des Meßsignals berücksichtigt werden.

Die Anwendung lokaler Operatoren h_{sch} mit Varianz (Breite) σ_{sch}^2 durch Faltung ist nur erlaubt, falls der Prozeß ergodisch ist. Dies trifft auf reale Bilder eigentlich kaum zu.

Die Faltung von h_{sch} mit realem Bild führt dennoch zu keinem Problem mit Ergodenhypothese, wenn

$\sigma_{sch}^2 \ll \sigma_{PSF}^2$, d.h. kleiner Filter



Im homogen schwach stationären Bildmodell sind beide Voraussetzungen gegeben. Aber nur wenige Problemklassen lassen sich über realen Bildern damit hinreichend gut modellieren.

Regional schwach stationäres Bildmodell

Das regional schwach stationäre Bildmodell ist für viele Aufgaben, in denen einzelne Objekte unterschieden werden, realisierbar. Objekte sind über Regionen definiert.

Annahme für das Segmentierungsmodell:

Regionen sind durch scharfe Kanten voneinander getrennt.

Aus dem Segmentierungsmodell folgt

1. **Regionale Stationarität:** stochastisches Modell gilt nur für jeweils eine Region R_i , die stochastisch homogen ist:

$$f = \left(\bigcup_i O_i \right) \cup B$$

$$O_i = m_{o_i} + \sqrt{\sigma_{o_i}^2} \delta_o$$

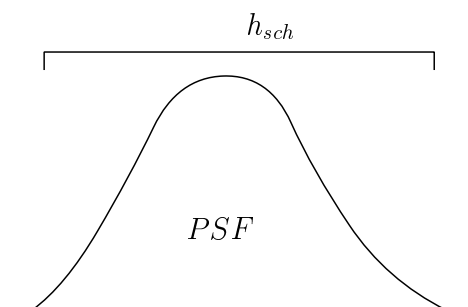
- Ergodenhypothese soll innerhalb einer Region R_i gelten, also $m_{o_i} = \bar{O}_i$ und $\sigma_{o_i}^2 = v_{o_i}$.
 - $\sigma_{o_i}^2$ trägt die *Feinstruktur der Dynamik* (Textur): NV (nichtstationäre Varianz).
 - m_{o_i} trägt die *Grobstruktur der Dynamik* (Topologie): NM (nichtstationärer Mittelwert).
2. Dies bedeutet, daß die Bildfunktion f aufgespaltet ist in
 - *Grauwertprozesse* innerhalb der Regionen R_i
 - *Linienprozesse* zwischen den Regionen R_i .
 3. Der Grauwertprozeß des gesamten Bildes erfordert ein Multiprozessmodell: Ein Linienprozeß blendet einen einzelnen Grauwertprozeß aus, d.h. bevor ein Grauwertprozeß analysiert werden kann, muß sein Linienprozess interpretiert werden: Das Segmentierungsproblem muß also gelöst sein. Es sind auch keine verschiebungsinvarianten Verfahren anwendbar.

Beispiel: Schätzung eines Multiprozesses mittels nicht verschiebungsinvarianter (verschiebungsvarianter) Filter (z.B. zur kantenerhaltenden Bildglättung). Solche Filter bestehen aus zwei Komponenten:

1. nichtlineares Element zur Hypothesenüberprüfung bezüglich der Erkennung einer Populationsgrenze (Linienprozeß)
2. lineares Element zur Schätzung der Modellparameter des Grauwertprozesses.

Voraussetzungen (für erste Komponente):

1. $\sigma_{sch}^2 \gg \sigma_{PSF}^2$: großer Filter, die Filter müssen die Bildstruktur erkennen.
2. $|O| \gg |PSF|$: große Objektstrukturen



Ein derartiges Filter besitzt gegenüber LSI-Filtern eine gewisse "Intelligenz", weil es den Test enthält, in welchem Bereich der Bildfunktion lineare Operationen zugelassen sind.

Beispiel: Halbnachbarschaftsbeziehung der Bildglättung:

Annahmen:

1. Im Einzugsbereich \mathcal{U} des Filters existieren u.U. zwei Populationen von BP.
2. Die beiden Populationen sind durch eine Stufenkante getrennt.

6	7	8	
A	A	A	
5	A	O	B
	A	B	B
4		3	2

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_A^i \cup \mathcal{U}_B^i \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

$\mathcal{U}_A^i, \mathcal{U}_B^i$ sind jeweils zusammenhängende Gebiete.

Die Mittelwerte über den beiden Populationen modulo 8 werden hier mit μ bezeichnet:

$$\mu_B^i = \frac{1}{3} \sum_{j=-1}^1 f(i+j) \pmod{8} \quad \text{und} \quad \mu_A^i = \frac{1}{5} \sum_{j=-2}^2 f(i+4+j) \pmod{8}$$

Interessant ist diejenige Benachbarung der Populationen (mod. 8), die maximal unterschiedliche Mittelwerte aufweist:

$$d_{\max} = \max | \mu_B^i - \mu_A^i | \rightarrow i_{\max} = \arg(d_{\max})$$

Durch Vergleich von d_{\max} mit einer Schwelle s ergibt sich schließlich die Prozedur der (nichtlinearen) Mittelwertberechnung:

$$\mu(m, n) = \begin{cases} \frac{1}{9} \sum_{i=0}^8 f(i) & \text{falls } d_{\max} \leq s \\ \frac{1}{6} (f(0) + 5\mu_A^{i_{\max}}) & \text{falls } d_{\max} > s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Das Filter liefert eine kantenerhaltende (populationstreu) Glättung. Das Markierungsprädikat für den Linienprozeß ist die Schwelle s . Die Populationsgrenzen werden aber nicht explizit gemacht!

■

Lokal schwach stationäres Bildmodell

Lokale Stationarität bedeutet, daß das stochastische Modell nur für die Umgebung \mathcal{U} (den Einzugsbereich) eines Schätzoperators gilt:

$$O(m, n) = m_o(m, n) + \sqrt{\sigma_o^2(m, n)}\delta_o.$$

Jeder Bildpunkt trägt andere Modellparameter, ist also einem anderen stochastischen Prozeß zugeordnet.

Dies ist das Modell der *Nichtstationarität*. Die zur lokalen Schätzung der Modellparameter $m_o(m, n)$ bzw. $\sigma_o^2(m, n)$ verwendeten Operatoren müssen Eigenschaften der *lokalen Adaptivität* besitzen. Sie sind also auch nicht mehr wenigstens regional verschiebungsinvariant (siehe Beispiel zum lokal adaptiven Wienerfilter). Für ihren Einsatz gilt nun:

1. $\sigma_{sch}^2 \approx \sigma_{PSF}^2$
2. $|O_i| \approx |PSF|$.

Dennoch lassen sich auch LSI-Operatoren entwerfen, die bei konstanter Impulsantwort (Verschiebungsinvarianz) bestimmte lokal adaptive Schätzungen erlauben. Man erreicht dies durch geeignete Zerlegung der Identität, z.B.

- lokale stochastische Hauptachsentransformation (3.7.1)
- lokale Taylorreihenentwicklung (4.3)

4.3 Optimale Filter durch Ausgleichsrechnung

Gegeben sei eine Funktion f , etwa durch Meßwerte an gegebenen Stützstellen. Gesucht sei eine Funktion \hat{f} , so daß die Abweichung $\|\hat{f} - f\|$ im Sinne einer Norm $\|\bullet\|$ minimal wird. Seien $\hat{f}_m(a_1, \dots, a_n) = \hat{f}(x_m; a_1, \dots, a_n)$, $m = 1, \dots, M$ ein Modell der Funktion f mit n Parametern und $f(x_m) = f_m$ der Meßwert der Funktion f an der Stelle x_m .

Aufgabe:

Bestimme die Parameter a_1, \dots, a_n der zu schätzenden Funktion \hat{f} so, daß der Fehler

$$\delta_p(a_1, \dots, a_n) = \left(\sum_{m=1}^M |f_m - \hat{f}_m(a_1, \dots, a_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

in \mathbb{R}^M minimal wird.

Dieses Problem wird Ausgleichsrechnung (*Regression*) genannt. Es ist den Approximationsproblemen zuzuordnen. Je nach Wahl der Norm p des Fehlerterms δ_p stellen sich unterschiedliche Lösungsvarianten der Ausgleichsrechnung dar.

L_1 -Approximation (Minkovski-Norm):

$$L_1 : \sum_{m=1}^M |f_m - \hat{f}_m(a_1, \dots, a_n)| \longrightarrow \min$$

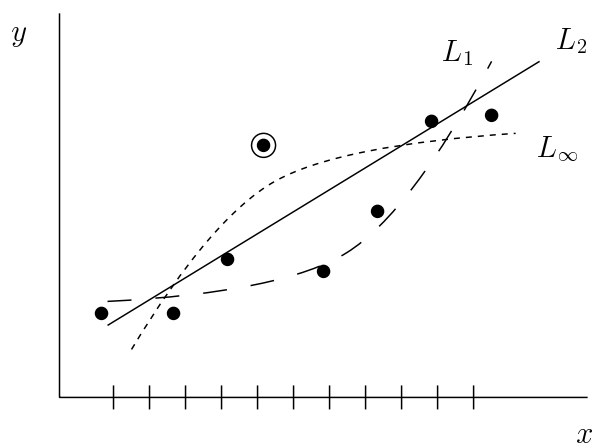
L_2 -Approximation (Euklidische Norm): MMSE-Verfahren

$$L_2 : \left(\sum_{m=1}^M (f_m - \hat{f}_m(a_1, \dots, a_n))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \min$$

L_∞ -Approximation (Tschebyscheff-Norm):

$$L_\infty : \max_{1 \leq m \leq M} |f_m - \hat{f}_m(a_1, \dots, a_n)| \longrightarrow \min$$

Beispiel: Finde die zwischen gegebenen Meßwerten x_i die ausgleichende Funktion $y(x)$.



Die L_1 -Norm läßt den "Ausreißer" unberücksichtigt und unterstützt den Ausgleich der wahrscheinlicheren Meßwerte.

Die L_2 -Norm erzeugt eine Ausgleichgerade, die sich aus der gleichberechtigten Berücksichtigung aller Meßwerte ergibt.

Die L_∞ -Norm bevorzugt den Ausreißer beim Finden der Ausgleichsfunktion.



In der Folge soll eine lokale Taylorreihenentwicklung einer Bildfunktion durch einen Satz von Filtern realisiert werden, die nach dem MMSE-Verfahren eine optimale lokale Anpassung der Impulsantwort an die partielle Ableitung der Grauwertfunktion nutzen.

Aufgabe:

Bestimme zu einer Funktion f eine Approximation \hat{f}_ω durch eine lokale Taylorentwicklung vom Grade ω nach dem MMSE-Verfahren (minimum mean square error), so daß gilt:

$$\hat{f}_\omega = (h^{(0)} + h^{(1)} + \dots + h^{(\omega)}) * f, (\hat{f}_\omega - f)^2 \rightarrow \min$$

mit $h^{(\nu)}$ als Impulsantwort der lokalen partiellen Ableitung bis zur Ordnung ω (LSI-Operatoren), d.h. $\sum_i h^{(i)} \approx \delta$.

Gegeben: Approximationsmodell (2D) als Flächen vom Grad $\mu + \nu \leq \omega$

$$\hat{f}_{k,l} = \sum_{\mu=0}^{\omega} \sum_{\nu=0}^{\omega} c_{\mu\nu} k^\mu l^\nu$$

- (k, l) sind lokale Koordinaten um den Aufpunkt des Modells
- $k^\mu l^\nu$ ist ein (nicht orthogonales) Basissystem zur lokalen Darstellung der Bildfunktion. Das entsprechende orthogonale Basissystem wird durch die *Legendreschen Polynome* gebildet. Die Verwendung eines orthogonalen Basissystems erlaubt, die Ordnung der Anpassung zu erhöhen, ohne das Anpassungsproblem komplett neu lösen zu müssen.
- Einzugsbereich der Operatoren: $\mathcal{U} = \{(k, l) \mid -K \leq k, l \leq K\}$, quadratisch, symmetrisch.
- Bildfunktion: $f = f_{m,n}$ mit $(m, n) \in \{M \times N\}$

Gesucht: $c_{\mu\nu}$, so daß

$$r_\omega^2 = \sum_{(k,l) \in \mathcal{U}} \left(\hat{f}_{k,l} - f_{k,l} \right)^2 \rightarrow \min$$

Die Wahl von ω und \mathcal{U} hängen voneinander ab!

	1D	2D	
$\omega = 1$: Gerade	Ebene	also: K=1
	(2Punkte)	(3Punkte)	

$\omega = 2$: Parabel	Paraboloid	also: K=1, 8-Nachbarschaft
	(3Punkte)	(6Punkte)	

In der Realität ist die Bildfunktion aber verschmiert. Deshalb sollte die Nachbarschaft größer als die PSF sein, um die lokale Bildstruktur erkennen zu können.

MMSE-Verfahren: notwendige Bedingung zur Minimierung des quadratischen Fehlers durch Anpassung der Entwicklungskoeffizienten

$$\frac{\partial r^2}{\partial c_{\mu\nu}} = 2 \sum_k \sum_l \left(\hat{f}_{k,l} - f_{k,l} \right) \frac{\partial \hat{f}}{\partial c_{\mu\nu}} \stackrel{!}{=} 0$$

Beispiel 1: Lokale Approximation von Ebenen:

$$\hat{f}_{k,l} = c_{00} + c_{10}k + c_{01}l$$

wobei c_{10} bzw. c_{01} dem Anstieg in Achsenrichtung (1. Ableitung) und c_{00} dem mittleren Grauwert entsprechen.

Die partiellen Ableitungen des quadratischen Fehlers nach den Entwicklungskoeffizienten liefern

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^2}{\partial c_{00}} &= 2 \sum_k \sum_l \left(\hat{f}_{k,l} - f_{k,l} \right) \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial r^2}{\partial c_{10}} &= 2 \sum_k \sum_l \left(\hat{f}_{k,l} - f_{k,l} \right) \cdot k = 0 \\ \frac{\partial r^2}{\partial c_{01}} &= 2 \sum_k \sum_l \left(\hat{f}_{k,l} - f_{k,l} \right) \cdot l = 0 \end{aligned}$$

Einsetzen des Modells und Umstellen ergibt für die erste Gleichung

$$\sum_k \sum_l (c_{00} + c_{10}k + c_{01}l) = \sum_k \sum_l f_{k,l}$$

Auf die Darstellung der anderen beiden Gleichungen wird verzichtet. Mit der Abkürzung: $\bar{x} = \sum_k \sum_l x_{k,l}$ lauten die Normalgleichungen der Koeffizienten $c_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} c_{00} + c_{10}\bar{k} + c_{01}\bar{l} &= \bar{f} \\ c_{00}\bar{k} + c_{10}\bar{k}^2 + c_{01}\bar{k}\bar{l} &= \bar{k}f \\ c_{00}\bar{l} + c_{10}\bar{k}\bar{l} + c_{01}\bar{l}^2 &= \bar{l}f \end{aligned}$$

Man erhält die Matrixgleichung

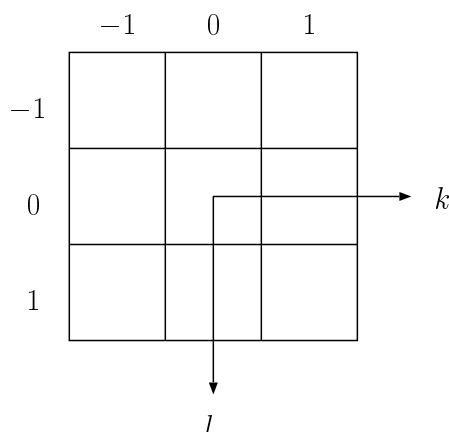
$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{k} & \bar{l} \\ \bar{k} & \bar{k}^2 & \bar{k}\bar{l} \\ \bar{l} & \bar{k}\bar{l} & \bar{l}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{10} \\ c_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f} \\ \bar{k}f \\ \bar{l}f \end{bmatrix}$$

$B \quad \cdot \quad c \quad = \quad \bar{y}$

Das Gleichungssystem ist eindeutig für die gesuchten Koeffizienten $c_{\mu\nu}$ lösbar, wenn die Determinante der Matrix B nicht verschwindet. In diesem Fall erhält man den gesuchten Koeffizientenvektor durch Invertieren der Matrix.

$$c = B^{-1}\bar{y}$$

Vereinfachung von B : symmetrischer Einzugsbereich, d.h. ungerade Potenzen \bar{x} verschwinden.



- $\bar{k} = \bar{l} = \overline{kl} = 0$

$$\overline{kl} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L kl = \sum_k k \sum_l l = 0 \cdot 0$$

- $\bar{k}^2 = \bar{l}^2 = 6$ für $K = L = 1$

$$\bar{k}^2 = \sum_k \sum_l k^2 = \frac{1}{3} K(K+1)(2K+1)(2L+1)$$

- $\bar{1} = 9$ für $K = L = 1$

$$\bar{1} = \sum_k \sum_l 1 = (2K+1)(2L+1)$$

Dies ergibt die einfache Matrixgleichung

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{10} \\ c_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f} \\ \overline{kf} \\ \overline{lf} \end{bmatrix}$$

Wegen der Diagonalstruktur der Matrix erhält man die drei entkoppelten Gleichungen

$$\begin{aligned} 9 c_{00} &= \bar{f} \\ 6 c_{10} &= \overline{kf} \\ 6 c_{01} &= \overline{lf} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der überstrichenen Größen, z.B. in die erste Gleichung, erhält man eine Berechnungsvorschrift zur Ermittlung der Koeffizienten.

$$c_{00} = \frac{1}{9} \sum_k \sum_l f_{k,l} = \frac{1}{9} \sum_k \sum_l 1 \cdot f_{k,l}$$

Die Gleichungen für die $c_{\mu\nu}$ lassen sich als Kreuzkorrelation (Faltung) der Bildfunktion f mit Impulsantwort $h_{\mu\nu}$ schreiben:

$$\begin{aligned} c_{00}(m, n) &= \frac{1}{9} \sum_k \sum_l h_{k,l}^{00} f_{m+k, n+l} \\ c_{10}(m, n) &= \frac{1}{6} \sum_k \sum_l h_{k,l}^{10} f_{m+k, n+l} \\ c_{01}(m, n) &= \frac{1}{6} \sum_k \sum_l h_{k,l}^{01} f_{m+k, n+l} \end{aligned}$$

mit

$$h_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad h_{10} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad h_{01} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Also gilt

$$\hat{f} = \left(\frac{1}{9} h_{00} + \frac{1}{6} h_{10} + \frac{1}{6} h_{01} \right) * f.$$

Beispiel 2: Bestimmung des optimalen Laplace-Filters:

Die gefilterte Bildfunktion enthält Ableitungen zweiter Ordnung.

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Das anzupassende Bildmodell muß also wenigstens von zweiter Ordnung sein.

Quadratisches Modell (in den lokalen Koordinaten (k, l)):

$$\hat{f}_{k,l} = c_{00} + c_{10}k + c_{01}l + c_{20}k^2 + c_{11}kl + c_{02}l^2$$

$$\Delta \hat{f} = 2(c_{20} + c_{02})$$

Die symbolisch verdichteten Normalgleichungen lauten

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{k} & \bar{l} & \bar{k}^2 & \bar{k}\bar{l} & \bar{l}^2 \\ \bar{k} & \bar{k}^2 & \bar{k}\bar{l} & \bar{k}^3 & \bar{k}^2\bar{l} & \bar{k}\bar{l}^2 \\ \bar{l} & \bar{k}\bar{l} & \bar{l}^2 & \bar{k}^2\bar{l} & \bar{k}\bar{l}^2 & \bar{l}^3 \\ \bar{k}^2 & \bar{k}^3 & \bar{k}^2\bar{l} & \bar{k}^4 & \bar{k}^3\bar{l} & \bar{k}^2\bar{l}^2 \\ \bar{k}\bar{l} & \bar{k}^2\bar{l} & \bar{k}\bar{l}^2 & \bar{k}^3\bar{l} & \bar{k}^2\bar{l}^2 & \bar{k}\bar{l}^3 \\ \bar{l}^2 & \bar{k}\bar{l}^2 & \bar{l}^3 & \bar{k}^2\bar{l}^2 & \bar{k}\bar{l}^3 & \bar{l}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{10} \\ c_{01} \\ c_{20} \\ c_{11} \\ c_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f} \\ \bar{k}f \\ \bar{l}f \\ \bar{k}^2f \\ \bar{k}lf \\ \bar{l}^2f \end{bmatrix}$$

Nach Berücksichtigung der Symmetrien im Einzugsbereich des Operators ($K = L = 1$) erhält man die schwach besetzte Matrix-Gleichung:

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \cdot & \cdot & \bar{k}^2 & \cdot & \bar{l}^2 \\ \cdot & \bar{k}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \bar{l}^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{k}^2 & \cdot & \cdot & \bar{k}^4 & \cdot & \bar{k}^2\bar{l}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{k}^2\bar{l}^2 & \cdot \\ \bar{l}^2 & \cdot & \cdot & \bar{k}^2\bar{l}^2 & \cdot & \bar{l}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{10} \\ c_{01} \\ c_{20} \\ c_{11} \\ c_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f} \\ \bar{k}f \\ \bar{l}f \\ \bar{k}^2f \\ \bar{k}lf \\ \bar{l}^2f \end{bmatrix}$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$c_{10} = \frac{\bar{k}f}{\bar{k}^2} \quad c_{01} = \frac{\bar{l}f}{\bar{l}^2} \quad c_{11} = \frac{\bar{k}lf}{\bar{k}^2\bar{l}^2}$$

Diese Koeffizienten werden aber nicht zur Berechnung des Bildmodells benötigt. Also reduziert sich das Gleichungssystem zu

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{k}^2 & \bar{l}^2 \\ \bar{k}^2 & \bar{k}^4 & \bar{k}^2\bar{l}^2 \\ \bar{l}^2 & \bar{k}^2\bar{l}^2 & \bar{l}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{20} \\ c_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f} \\ \bar{k}^2f \\ \bar{l}^2f \end{bmatrix}$$

mit (für $K = 1$): $\bar{1} = 9, \bar{k}^2 = \bar{l}^2 = 6, \bar{k}^4 = \bar{l}^4 = 6, \bar{k}^2\bar{l}^2 = 4$.

Die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

muß invertiert werden.

Nebenrechnung:

B ist eine reguläre Matrix ($|B| \neq 0$), also existiert B^{-1} .

Es gilt $|B| = 36$.

Die inverse Matrix erhält man nach

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} A^T$$

wobei A die adjungierte Matrix von B ist (transponiert verwendet),

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

mit den Adjunkten

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} |U_{ik}|$$

und U_{ik} ist diejenige Untermatrix von $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}$,

in der die Zeile i und die Spalte k gestrichen sind.

Man erhält

$$B^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 10 & -6 & -6 \\ -6 & 9 & 0 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Also gilt

$$\begin{bmatrix} c_{00} \\ c_{20} \\ c_{02} \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 10 & -6 & -6 \\ -6 & 9 & 0 \\ -6 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f} \\ \overline{k^2 f} \\ \overline{l^2 f} \end{bmatrix}.$$

Wegen $\Delta \hat{f} = 2(c_{20} + c_{02})$ ist man nur an zwei Koeffizienten interessiert. (Die Unabhängigkeit von $\Delta \hat{f}$ von c_{00} ist gleichbedeutend mit der Gleichanteilsfreiheit – Hochpaßcharakteristik – des Laplace-Operators).

Es gilt

$$\Delta \hat{f} = \frac{1}{9}(-6\bar{f} + 9\overline{k^2 f}) + \frac{1}{9}(-6\bar{f} + 9\overline{l^2 f})$$

Auflösung der überstrichenen Symbolik für die Summanden:

$$-6\bar{f} - 6\bar{f} = -12\bar{f} \quad \text{mit} \quad \bar{f} = \sum_k \sum_l f_{k,l}$$

$$-12\bar{f} = \begin{bmatrix} -12 & -12 & -12 \\ -12 & -12 & -12 \\ -12 & -12 & -12 \end{bmatrix} * f = -12 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * f$$

$$9\bar{k^2f} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 9 \end{bmatrix} * f = 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * f$$

$$9\bar{l^2f} = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} * f = 9 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * f$$

Da gilt

$$(\Delta \hat{f})_{m,n} = (h^\Delta \circledast f)_{m,n} = \sum_k \sum_l h_{k,l}^\Delta f_{m+k,n+l}$$

folgt

$$\begin{aligned} h^\Delta &= \frac{1}{9} \left(-12 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 6 & -3 & 6 \\ -3 & -12 & -3 \\ 6 & -3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dieser Laplace-Operator unterscheidet sich von der früher abgeleiteten Form (siehe Abschnitt 1.4.4)

$$h_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

weil er im Unterschied zu diesem für eine 8-Nachbarschaft berechnet wurde.

Für das Beispiel 1, die lokale Regression eines Ebenen-Modells an die Bildfunktion soll nun die Erwartungstreue der Schätzung (Erinnerung: $\theta = E\{\hat{\theta}\}$) überprüft werden.

Seien

$$\hat{f}_{k,l} = c_{00} + c_{10}k + c_{01}l$$

das Modell der Bildfunktion in der Umgebung des Aufpunktes (m, n) und

$$f_{k,l} = a_{00} + a_{10}k + a_{01}l + \sqrt{\sigma^2} \delta_{k,l}$$

die tatsächliche lokale Bildfunktion ($f_{k,l}$ werden gemessen), die als stochastisch gestörtes Modell angenommen wird. Hierbei ist $\delta_{k,l}$ unkorreliertes (weißes) Rauschen mit dem Mittelwert Null und der Varianz σ^2 .

Die Entwicklungskoeffizienten des Modells

$$\begin{aligned} c_{00} &= \frac{\sum_k \sum_l f_{k,l}}{\sum_k \sum_l 1} \\ c_{10} &= \frac{\sum_k \sum_l k f_{k,l}}{\sum_k \sum_l k^2} \\ c_{01} &= \frac{\sum_k \sum_l l f_{k,l}}{\sum_k \sum_l l^2} \end{aligned}$$

stellen sich nach Einsetzen des gestörten Modells $f_{k,l}$ in folgender Weise dar.

$$\begin{aligned} c_{00} &= a_{00} + \frac{\sqrt{\sigma^2} \sum_k \sum_l \delta_{k,l}}{\sum_k \sum_l 1} \\ c_{10} &= a_{10} + \frac{\sqrt{\sigma^2} \sum_k \sum_l k \delta_{k,l}}{\sum_k \sum_l k^2} \\ c_{01} &= a_{01} + \frac{\sqrt{\sigma^2} \sum_k \sum_l l \delta_{k,l}}{\sum_k \sum_l l^2} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten des Modelles werden erwartungstreu geschätzt, sie entsprechen den ungestörten Koeffizienten der Bildfunktion, da der Mittelwert des Rauschtermes Null ist.

Die Schätzung der Parameter mittels optimaler lokaler Operatoren sind parametrische Schätzungen des mittleren Grauwerts c_{00} bzw. der mittleren Gradienten c_{10} und c_{01} in der Umgebung des Aufpunktes.

Die parametrischen Schätzungen besitzen außerdem kleinere Varianzen als die Grauwerte der stochastisch gestörten Bildfunktion f , da

$$\begin{aligned} v(c_{00}) &= \frac{\sigma^2}{1} = \frac{1}{9} \sigma^2 \\ v(c_{10}) &= \frac{\sigma^2}{k^2} = \frac{1}{6} \sigma^2 \\ v(c_{01}) &= \frac{\sigma^2}{l^2} = \frac{1}{6} \sigma^2. \end{aligned}$$

Die Ausgleichsrechnung glättet also die Bildfunktion.

4.4 Cooccurrence-Matrizen (CM)

Textur wird als das Erscheinungsbild der Wechselwirkung lokaler Grauwertprimitiva einer Bildfunktion f gesehen. Diese Wechselwirkung kann auf einer Skalenhierarchie

betrachtet werden und bezüglich unterschiedlicher Aspekte der Wechselwirkung in Gestalt, Orientierung und Ausdehnung der texturalen Primitiva zu unterscheidbaren Texturen führen.

Im Rahmen stochastischer Modelle untersuchen wir die stochastisch beschreibbaren Organisationsprinzipien, die Anlaß geben zur:

- Klassifizierung von Texturen
- Segmentierung nach Texturkriterien.

Unter dem Blickwinkel der Modellierung homogen schwach stationärer Prozesse trägt allein die AKF $k_X(\tau)$ die Strukturinformation der Textur.

Annahme: Ein Bild f sei die Realisierung eines diskreten schwach stationären stochastischen Prozesses mit $f_{m,n} \in \{0, 1, \dots, G-1\}$, $(m, n) \in R \subseteq \{M \times N\}$. Zumindest in der Region R gelte Ergodizität.

Dichtefunktion 1. Ordnung: des Prozesses X mit der Realisierung f über Parameter-
raum R :

$$p_f(g) = p \{g = f_{m,n}\} \text{ für alle } (m, n) \in R$$

Dichtefunktion 2. Ordnung:

$$p_{ff}(g_0, g_\tau; \tau) = p(g_0 = f_{m,n}, g_\tau = f_{m+\xi, n+\eta})$$

mit

$$\tau = \{(\xi, \eta) \mid \xi = |m_0 - m_\tau|, \eta = |n_0 - n_\tau|, (m_0, n_0), (m_\tau, n_\tau) \in R\}$$

AKF:

$$k_{ff}(\tau) = \sum_{g_0} \sum_{g_\tau} g_0 g_\tau p_{ff}(g_0, g_\tau; \tau)$$

Schätzung der Dichtefunktionen:

1D-Histogramm:

$$\begin{aligned} \hat{p}_f(g) &= c(g) \approx p_f(g) \\ c(g) &= \frac{|\{f_{m,n} = g \mid (m, n) \in R\}|}{|R|} \end{aligned}$$

2D-Histogramm:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{ff}(g_0, g_\tau; \tau) &= c(g_0, g_\tau; \tau) \approx p_{ff}(g_0, g_\tau; \tau) \\ c(g_0, g_\tau; \tau) &= \frac{|\{f_{m,n} = g_0 \wedge f_{m+\xi, n+\eta} = g_\tau \mid (m, n), (m+\xi, n+\eta) \in R, \tau = (\xi, \eta)\}|}{|R|} \end{aligned}$$

Für gegebenes τ erhält man ein unsymmetrisches 2D-Histogramm.

Sei

$$c_\tau = c^s(g_0, g_\tau; \tau) = \frac{1}{2} (c(g_0, g_\tau; \tau) + c(g_0, g_\tau; -\tau))$$

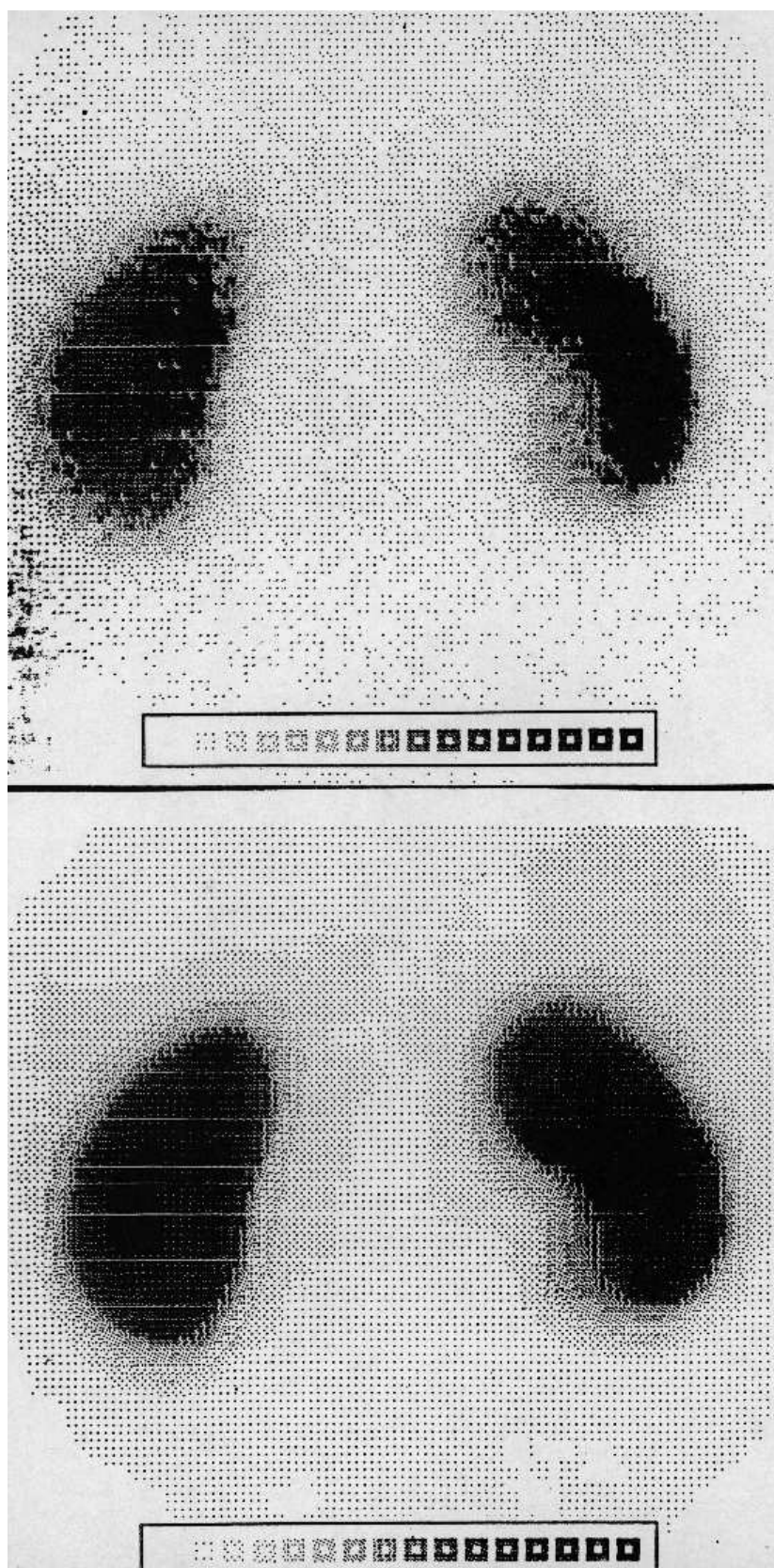


Abbildung 4.5: Nierenzintigramm. oben: verrauschtes Original; unten: nach Medianfilterung (7x7).

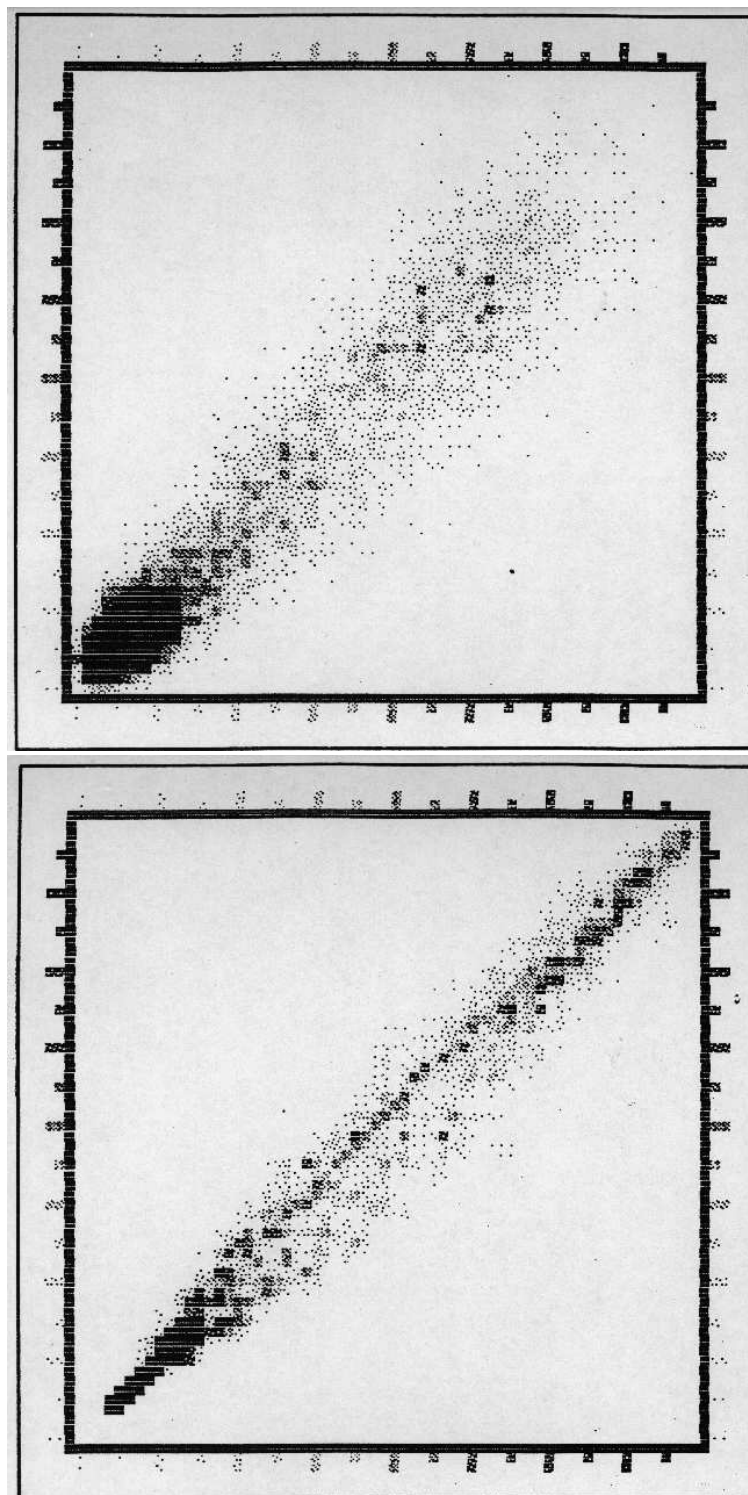


Abbildung 4.6: 2D-Histogramm des Nierenzintigrammes von 4.5 oben: Original; unten: nach Medianfilterung (7x7).

ein symmetrisiertes 2D-Histogramm. Dann heißt c_τ Cooccurrence-Matrix des Bildes f für eine Verschiebung τ . Die Berechnung von c_τ erfolgt einfach als Mittelwert aus dem 2D-Histogramm und dem an der Diagonalen $g_0 = g_\tau$ gespiegelten 2D-Histogramm.

Für beliebige τ liefern die Projektionen

$$c(g) = \sum_{g_\tau} c^s(g_0, g_\tau; \tau) = \sum_{g_0} c^s(g_0, g_\tau; \tau)$$

die identischen marginalen 1D-Histogramme.

4.4.1 Texturanalyse mittels CM

Mit der Wahl von τ besitzen CM einen freien Parameter, der gestattet, die Statistik zweiter Ordnung für sehr unterschiedliche Strukturen zu erfassen ($\tau = |\tau| e^{arg(\tau)}$).

Wahl von τ :

- Schätzung der Parameter der Rauschfunktion: $|\tau| = 1$
- Schätzung der Parameter der Objektfunktion: $|\tau| \geq \text{FWHM}_{PSF}$
- Isotropie: Richtung beliebig, sonst mehrere c_τ !

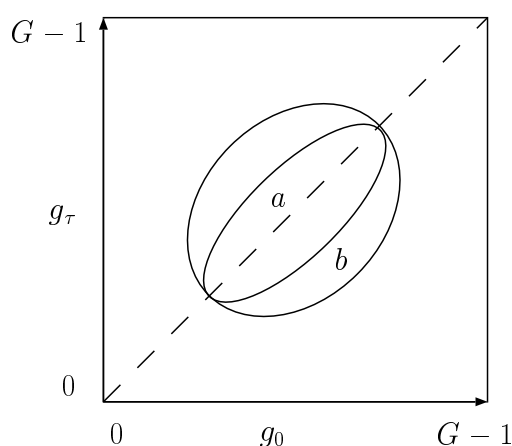
Merkmale der CM: Haralick (1973): 13 Merkmale: Zum Beispiel

1. Korrelation:

$$\begin{aligned} \text{COR}_\tau &= \frac{\text{COV}_\tau}{\text{VAR}_\tau} \\ &\text{mit} \\ \text{COV}_\tau &= \sum_{g_0=0}^{G-1} \sum_{g_\tau=0}^{G-1} (g_0 - \text{MVL}_\tau)(g_\tau - \text{MVL}_\tau) c^s(g_0, g_\tau; \tau) \\ \text{VAR}_\tau &= \sum_{g_0}^{G-1} (g_0 - \text{MVL}_\tau)^2 c(g_0) = \sum_{g_\tau}^{G-1} (g_\tau - \text{MVL}_\tau)^2 c(g_\tau) \\ \text{MVL}_\tau &= \sum_{g_0=0}^{G-1} g_0 c(g_0) = \sum_{g_\tau=0}^{G-1} g_\tau c(g_\tau) \end{aligned}$$

2. Zweites Moment (Trägheitsmoment) der Rotation um die Hauptdiagonale

$$\text{SDM}_\tau = \sum_{g_0} \sum_{g_\tau} (g_0 - g_\tau)^2 c^s(g_0, g_\tau; \tau)$$



- a : hohe Korrelation der Grauwerte g_0 und g_τ
- b : niedrigere Korrelation der Grauwerte g_0 und g_τ

Rechenaufwand: G^2 Positionen der CM

Wunsch: Linearisierung der Zeitkomplexität

Methode: Hauptachsentransformation der CM (Zeitkomplexität $3G$)

Autokovarianzmatrix:

$$C_{ff}(\tau) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_{ff}(\tau) \\ \rho_{ff}(\tau) & 1 \end{bmatrix}$$

führt zu

- Eigenwertgleichung:

$$C_{ff}(\tau) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u}$$

- Eigenvektoren: $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$

$$u_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T; \quad u_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T$$

- Eigenwerte:

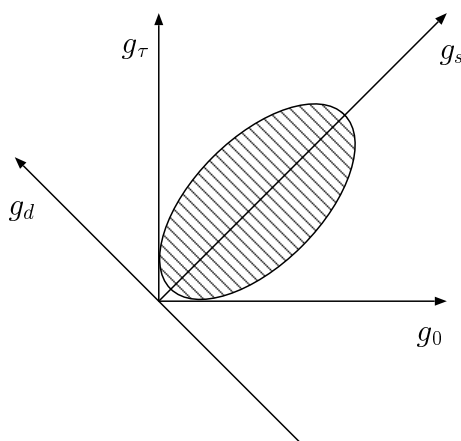
$$\lambda_1 = \sigma^2 (1 + \rho_{ff}(\tau)); \quad \lambda_2 = \sigma^2 (1 - \rho_{ff}(\tau))$$

Die so diagonalisierte Autokovarianzmatrix

$$C_{ff}^{HT}(\tau) = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 + \rho_{ff}(\tau) & 0 \\ 0 & 1 - \rho_{ff}(\tau) \end{bmatrix}$$

entspricht einer Drehung des Koordinatensystems (g_0, g_τ) nach (g_s, g_d) mit

$$g_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_0 + g_\tau) \quad \text{und} \quad g_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(g_0 - g_\tau).$$



Dabei wird gleichzeitig die Varianz in Richtung g_s maximal und die Varianz in Richtung g_d minimal:

$$\text{VAR}_\tau\{g_s\} = \sigma^2(1 + \rho) \quad \text{und} \quad \text{VAR}_\tau\{g_d\} = \sigma^2(1 - \rho).$$

Außerdem ist das neue Koordinatensystem über unkorrelierten Merkmalen aufgespannt, d.h.

$$\text{COV}_\tau\{g_s, g_d\} = 0.$$

Für die Dynamik der Summen- und Differenzgrauwerte gilt

$$g_s \in \{0, \dots, 2G - 1\}$$

$$g_d \in \{0, \dots, G - 1\},$$

also enthält das gedrehte Histogramm nun $2G^2$ Positionen!

Summen- und Differenzhistogramme:

Wären die neuen Koordinaten nicht nur unkorreliert, sondern auch unabhängig, dann würde gelten

$$c^s(g_0, g_\tau; \tau) = c^s(g_s, g_d; \tau) = c(g_s) \cdot c(g_d).$$

Das heißt, Summen- und Differenzstatistik über 1D-Histogrammen wären getrennt berechenbar und mit einem linearen Aufwand proportional $3G$ zu einer Statistik zweiter Ordnung erweiterbar.

Da 2D-Histogramme/CM annähernd Gaußschen Dichtefunktionen entsprechen, ist die Annahme der Unabhängigkeit von g_s und g_d oft berechtigt. Die Berechnung der Merkmale der hauptachsen-transformierten CM erfolgt demzufolge entkoppelt:

$$\text{COR}_\tau\{g_s, g_d\} = \frac{\text{VAR}_\tau\{g_s\}}{\text{VAR}_\tau\{g\}} - 1 = 1 - \frac{\text{VAR}_\tau\{g_d\}}{\text{VAR}_\tau\{g\}}$$

mit $\text{VAR}_\tau\{g\} = \text{VAR}_\tau\{g_s\} + \text{VAR}_\tau\{g_d\}$, wobei

$$\text{VAR}_\tau\{g_s\} = \frac{1}{2} \sum_{g_s=0}^{2G-2} (g_s - 2\text{MVL}_\tau\{g_s\})^2 c(g_s; \tau)$$

$$\text{VAR}_\tau\{g_d\} = \frac{1}{2} \sum_{g_d=0}^{G-1} b(g_d) g_d^2 c(g_d; \tau)$$

$$\text{MVL}_\tau\{g_s\} = \frac{1}{2} \sum_{g_s=0}^{2G-2} g_s c(g_s; \tau) \quad \text{MVL}_\tau\{g_d\} = 0$$

$$b(g_d) = \begin{cases} 2 & : 0 < |g_d| \leq G - 1 \\ 1 & : g_d = 0 \end{cases}$$

$$\text{SDM}_\tau\{g_s, g_d\} = 2 \text{VAR}_\tau\{g_d\}$$

4.4.2 Bildvergleich mittels 2D-Histogramm

Bisher wurden CM für Bewertungen der Autokorrelationsfunktion eines Bildes genutzt. Nun sei die Kreuzkorrelationsfunktion zwischen zwei Bildern von Interesse.

Aufgabe: Zwei Bilder sollen statistisch miteinander in Bezug gesetzt werden:

1. Bildfolge: f_{t_1}, f_{t_2}, \dots
2. bearbeitete Bilder: $f, g = \mathcal{O}f$
 - Dabei werden die *gleichen Bildpunkte* in Bezug gesetzt:

$$g_1 = f_{m,n}^1 \quad g_2 = f_{m,n}^2$$

- Es wird deswegen das 2D-Histogramm *nicht symmetrisiert!*

$$c_{f_1 f_2} = [c_{f_1 f_2}(g_1, g_2)]$$

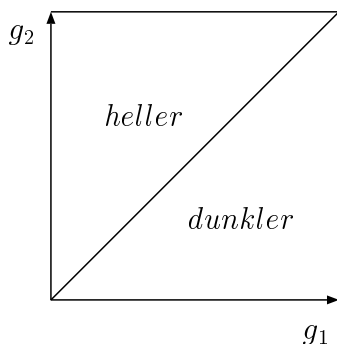
$$c_{f_1 f_2}(g_1, g_2) = \frac{|\{f_{m,n}^1 = g_1 \wedge f_{m,n}^2 = g_2 | (m, n) \in R\}|}{|R|}$$

Merkmale des 2D-Histogramms:

$$\text{COR} = \frac{1}{\text{VAR}_1 \text{VAR}_2} \sum_{g_1=0}^{G-1} \sum_{g_2=0}^{G-1} (g_1 - \text{MVL}_1)(g_2 - \text{MVL}_2) c_{f_1 f_2}(g_1, g_2)$$

$$\text{SDM} = \sum_{g_1} \sum_{g_2} (g_1 - g_2)^2 c_{f_1 f_2}(g_1, g_2)$$

Sind die Grauwerte in beiden Bildern im Mittel unterschiedlich, verschiebt sich das Histogramm entsprechend.

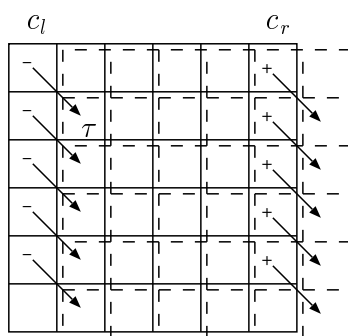


4.4.3 Textursegmentierung mittels CM

Die Aufgabe besteht in der Segmentierung eines Bildes durch Auswertung der CM. Dazu wird, ähnlich der Faltung mittels LSI-Operator, ein CM-Operator bildpunktweise über das Bild verschoben. Das Fenster des Operators habe die Ausdehnung $R = K \times K$. An jeder Position (m, n) erfolge die Berechnung einer CM und ihrer Merkmale. Gegeben sei eine Partitionierung des Merkmalsraumes, die bildpunktweise zu der Segmentierungsentscheidung führt.

Durch die Überlagerung benachbarter CMs enthalten diese viel Redundanz. Deshalb bietet sich ein rekursiver Algorithmus der Histogrammberechnung an, wie er auch in der Boxfilter-Methode (siehe Abschnitt 1.4.7) für ungewichtete Mittelwertbildung angewendet wurde.

$$c_{m+1,n} = c_{m,n} + \underbrace{c_{m,n}^r - c_{m,n}^l}_{2(K-|\eta|), \tau=(\xi,\eta)}$$



Der Aufwand zur Aktualisierung für einen gegebenen Verschiebungsvektor $\tau = (\xi, \eta)$ beträgt $2(K - |\eta|)$ Korrekturen der letzten berechneten CM. Die Abhängigkeit von der Verschiebungskomponente η erlaubt im Gegensatz zum Boxfilter nicht nur zeilenweise Verarbeitung, sondern die Verfolgung von Texturgrenzen als verschiebungsvarianter Operator.

Das Verfahren kann noch effizienter gestaltet werden, wenn auf die explizite Berechnung der CM verzichtet wird und unmittelbar die Merkmale der CM rekursiv berechnet werden. In diesem findet man ja die gleiche Redundanz! Dazu ist ein Hilfsspeicher der Länge G erforderlich.

Beispiel: SDM

Sei

$$SDM_{0,n} = \sum_{g_0} \sum_{g_\tau} (g_0 - g_\tau)^2 c(g_0, g_\tau; \tau)$$

die Initialisierung des Merkmals SDM in der Zeile n . Dann erfolgt die Aktualisierung in der Zeile n durch

$$SDM_{m+1,n} = SDM_{m,n} + \frac{1}{K^2} \left(\sum_r (g_0 - g_\tau)^2 - \sum_l (g_0 - g_\tau)^2 \right)$$

Der Hilfsspeicher nimmt Terme $\frac{1}{K^2}(g_0 - g_\tau)^2$ auf für $|g_0 - g_\tau| = 0, 1, \dots, G - 1$. Aktualisierung von SDM durch $2(K - |\eta|)$ Additionen, was eine Beschleunigung um den Faktor $\lesssim 100(!)$ liefert. ■

4.5 Markovprozesse

Markovprozesse bilden die bedeutendste Klasse stochastischer Bildmodelle. Eine Vielzahl von Filterverfahren und globaler Optimierungsverfahren sind an die Eigenschaften von Markovprozessen geknüpft.

Insbesondere wird in der *Signalverarbeitung* ausgenutzt, daß auf Grundlage nachbarschaftlicher Wechselwirkungen der Realisierungen eines Markov-Prozesses rekursiv langreichweitige Wirkungen/Korrelationen modelliert und damit auch analysiert werden können.

Diskrete Markov-Prozesse mit einer endlichen Menge von Realisierungen heißen auch *Markov-Ketten*.

In der *Informatik* finden Markov-Ketten z.B. Anwendung bei sequentiellen Automaten, Suchalgorithmen oder Warteschlangenmodellen. In der *Physik* wird ihre enge Beziehung zum *Diffusionsgesetz* genutzt (statistische Mechanik, Thermodynamik). Stichwort ist die *Brownsche Bewegung*.

In der *Systemtheorie* spielen Markov-Prozesse deshalb eine Rolle, weil sie eng mit dem Begriff des *Zustandes eines Systems* verbunden sind.

In der *Regelungstheorie* spielen sie deshalb eine große Rolle, weil sie Vorhersagen (Prädiktionen) künftigen Systemverhaltens aus dem aktuellen Zustand erlauben.

4.5.1 Eindimensionale Markovprozesse

Definition (Prozeß ohne Gedächtnis):

Ein stochastischer Prozeß $X = X(t_i)$ heißt Prozeß ohne Gedächtnis, rein stochastischer Prozeß oder *Markovprozeß nullter Ordnung*, wenn für beliebige $t_i \in T$ mit $i = 1, 2, \dots, n$, $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ gilt:

$$f_X(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = f_X(x_n, t_n)$$

■

- X ist an Position t_n unabhängig von vorherigen Positionen t_1, t_2, \dots, t_{n-1} , d.h.:

$$f_X(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = f_{X_{t_1}}(x_1, t_1) f_{X_{t_2}}(x_2, t_2) \cdots f_{X_{t_n}}(x_n, t_n)$$

z.B. für $n = 2$:

$$\begin{aligned} f_X(x_1, t_1; x_2, t_2) &= f_X(x_2, t_2 | x_1, t_1) f_X(x_1, t_1) \\ &= f_X(x_2, t_2) f_X(x_1, t_1) \end{aligned}$$

- Die nD -Dichtefunktion zerfällt in das Produkt von n $1D$ -Dichtefunktionen. Entsprechendes gilt auch für die Verteilungsfunktion.
- Ist X zusätzlich stationär, so gilt:

$$f_X(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = f_X(x_1) f_X(x_2) \cdots f_X(x_n).$$

Die Beschreibung des Prozesses durch die Dichtefunktion impliziert, daß die Prozeßrealisierungen überabzählbar sind, also $x_i \in \mathbb{R}$ gilt. Sind die Realisierungen höchstens abzählbar, also $x_i \in \mathbb{N}$, so treten an Stelle der Dichtefunktion die Einzelwahrscheinlichkeiten.

Definition (Markovprozeß):

Ein stochastischer Prozeß $X = X(t_i)$ heißt *Markovprozeß 1. Ordnung*, wenn für beliebige $t_i \in T$ ($i = 1, 2, \dots, n; t_1 < t_2 < \dots < t_n$) gilt:

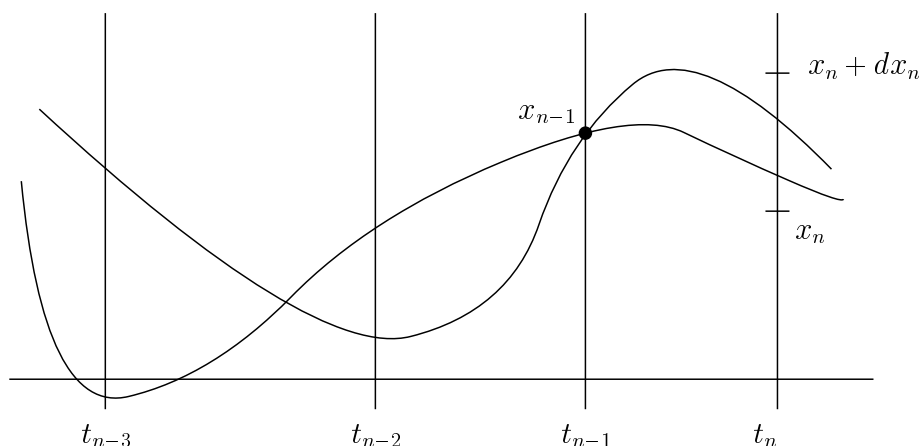
$$f_X(x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = f_X(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

■

- Der Wert des Prozesses an Position t_n hängt vom Wert an Position t_{n-1} ab.
- Es gilt für das Differential der Verteilungsfunktion

$$f_X(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) dx_n = P \{X(t_n) \in [x_n, x_n + dx_n] | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$

Das ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Realisierung x eines Prozesses X eintritt, die bei t_n einen Wert aus dem Intervall $[x_n, x_n + dx_n]$ annimmt, wenn bekannt ist, daß der Prozeß bei t_{n-1} den Wert x_{n-1} angenommen hat.



Beachte: $t_i - t_{i-1}$ ist nicht notwendigerweise konstant!

- Die Markov-Eigenschaft eines diskreten Markovprozesses läßt sich auch durch die bedingten Einzelwahrscheinlichkeiten ausdrücken:

$$\begin{aligned} & P \{X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_1) = x_1\} \\ &= P \{X(t_n) = x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \end{aligned}$$

- Markovprozesse und rein stochastische Prozesse können sich gegenseitig bedingen. Sei $X = (X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ ein Markov-Prozeß mit diskretem Parameterraum ($T = \mathbb{N}, t_i = i$ mit $i = 1, 2, 3, \dots$). Die zufälligen Variablen X_i seien gegeben durch

$$X_1 = Y_1$$

$$X_2 = Y_1 + Y_2 = X_1 + Y_2$$

...

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = X_{n-1} + Y_n,$$

wobei Y_j unabhängige zufällige Veränderliche mit den Dichtefunktionen f_{Y_j} bezeichnen. Dann gilt auch

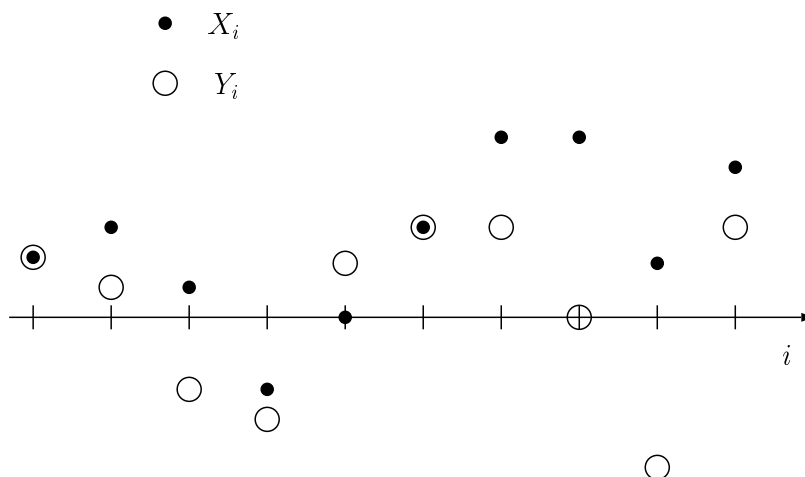
$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = X_2 - X_1$$

...

$$Y_n = X_n - X_{n-1}.$$

Also ist $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots)$ ein rein stochastischer Prozeß, weil im Gegensatz zu X seine Werte Y_j unabhängig davon sind, welche Werte Y_1 bis Y_{j-1} vorlagen.



zu zeigen: X ist ein Markov-Prozeß

Wegen der Unabhängigkeit der Y_i gilt

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{Y_1}(x_1) f_{Y_2}(x_2 - x_1) \cdots f_{Y_n}(x_n - x_{n-1}), \quad (4.3)$$

außerdem gilt

$$f_X(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{f_X(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)}{f_X(x_1, \dots, x_{n-1})}. \quad (4.4)$$

Einsetzen von (4.3) in (4.4) ergibt

$$f_X(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = f_{Y_n}(x_n - x_{n-1})$$

und wegen

$$f_{Y_n}(x_n - x_{n-1}) = f_X(x_n | x_{n-1})$$

folgt

$$f_X(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) = f_X(x_n | x_{n-1}).$$

q.e.d.

Beispiel:

Robert Brown, 1827: untersuchte die Bewegung von Pollen in Wasser

Albert Einstein, 1905: zeigte die Verbindung zwischen Brownscher Molekularbewegung und Diffusion.

Norbert Wiener, 1923: formulierte den wahrscheinlichkeitstheoretischen Existenzbeweis für diesen speziellen Markovprozeß. Deshalb nennt man diesen Prozeß heute Wiener-Prozeß.

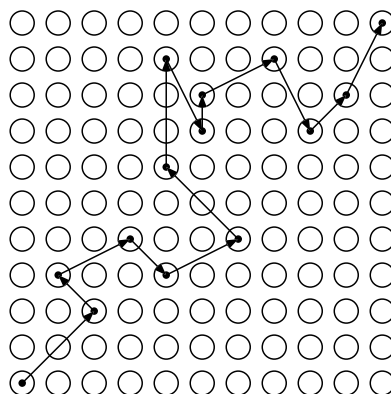
Brownsche Molekularbewegung oder random walk auf Bildgitter (endlich viele Realisierungen)

$X \sim$ Positionen $x_i = (m, n)_i$ der Wanderung zum Zeitpunkt t_i

$Y \sim$ zufällig erzeugte Verschiebungsvektoren $\tau_i = (\xi, \eta)_i$ zum Zeitpunkt t_i

Der mittlere zurückgelegte Weg zum Zeitpunkt t ist \sqrt{t} .





- Nimmt die Realisierung x an der Position t einen von endlich vielen Werten x_0, \dots, x_{M-1} an, so bezeichnet man diese Werte auch als *Zustände* und die Menge aller möglichen Werte als *Zustandsraum* \mathcal{X} . Ein diskreter Markov-Prozeß mit einem endlichen Zustandsraum ($|\mathcal{X}| = M$) heißt auch *Markovkette* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- Seien die Zustände x_{t_0}, \dots, x_{t_n} an den Positionen $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ bekannt und $x_{t_{n+1}}$ an der Position $t_{n+1} > t_n$ unbekannt. Dann heißen t_0, t_1, \dots, t_{n-1} *Vergangenheit*, t_n *Gegenwart* und t_{n+1} *Zukunft*. Bei Kenntnis des Prozesses in der Gegenwart besteht die Möglichkeit der *Prädiktion* in die Zukunft.

Definition (Übergangswahrscheinlichkeit):

Die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p_{\mu,\nu}(n) = P\{X_n = \nu \mid X_{n-1} = \mu\}$$

mit $P\{X_{n-1} = \mu\} > 0$, $\mu, \nu \in \mathcal{X}$ heißt Übergangswahrscheinlichkeit im n -ten Schritt von Zustand μ nach Zustand ν . ■

Für $P\{X_{n-1} = \mu\} = 0$ wählt man als Übergangswahrscheinlichkeit beliebige Zahlen $p_{\mu,\nu}(n) \geq 0$ mit $\sum_{\nu \in \mathcal{X}} p_{\mu,\nu}(n) = 1$. Dies beschreibt, daß irgend ein Zustand angenommen wird.

Im Falle überabzählbar vieler Realisierungen des Prozesses sind die *Überföhrungsdichten* $f_X(X_n = \nu, t_n \mid X_{n-1} = \mu, t_{n-1})$ von entsprechender Bedeutung.

Definition (homogene Markovkette):

Eine Markovkette $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt homogen, wenn ihre Übergangswahrscheinlichkeiten unabhängig von n sind, d.h.

$$P\{X_n = \nu \mid X_{n-1} = \mu\} = P\{X_k = \nu \mid X_{k-1} = \mu\}$$

für alle $\mu, \nu \in \mathcal{X}$ und alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $P\{X_{n-1} = \mu\} > 0$ und $P\{X_{k-1} = \mu\} > 0$. ■

Ein *stationärer Markovprozeß*, der zwei Realisierungen μ, ν bei konstantem Abstand im Parameterraum beibehält, also

$$\begin{aligned} P\{X_k = \nu \mid X_{k-1} = \mu\} &= P\{X_{k+r} = \nu \mid X_{k+r-1} = \mu\} \\ &= P\{X_1 = \nu \mid X_0 = \mu\}, \end{aligned}$$

ist also auch immer homogen. Die Umkehrung muß nicht gelten.

Aus den Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{\mu,\nu}(n)$ lassen sich alle *marginalen Verteilungen* durch *stochastische Vektoren* beschreiben,

$$p(n) = (p_0(n), p_1(n), \dots, p_{M-1}(n))$$

mit den Komponenten

$$p_\nu(n) = P\{X_n = \nu\} = \sum_{\substack{\mu=0 \\ P\{X_{n-1}=\mu\}>0}}^{M-1} P\{X_n = \nu, X_{n-1} = \mu\}$$

Es gilt $\sum_{\nu=0}^{M-1} p_\nu(n) = 1$.

Die stochastischen Vektoren bilden die Zeilenvektoren der Zustandsübergangsmatrix, die auch stochastisch genannt wird.

Definition (Zustandsübergangsmatrix):

Eine Markovkette $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit endlichem Zustandsraum $|\mathcal{X}| = M$ wird durch eine Folge von n -ten Zustandsübergangsmatrizen beschrieben,

$$\Pi_n = \begin{pmatrix} p_{0,0}(n) & p_{0,1}(n) & \cdots & p_{0,M-1}(n) \\ \vdots & & & \\ p_{M-1,0}(n) & p_{M-1,1}(n) & \cdots & p_{M-1,M-1}(n) \end{pmatrix}.$$

■

Alle Π_n sind also im Falle eines endlichen Zustandsraumes $M \times M$ -Matrizen. Sie beschreiben für jedes n das Übergangsverhalten der Markov-Kette. Die Verteilungsfunktion einer Markov-Kette erhält man aus der multiplikativen Verknüpfung der Übergangsmatrizen.

Sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Markovkette mit den Übergangsmatrizen $\Pi_n = (p_{\mu,\nu}(n))_{\mu,\nu \in \mathcal{X}}$ und der Anfangsverteilung $p(0) = (p_0(0), p_1(0), \dots, p_{M-1}(0))$. Dann gilt

a) Für die Verteilung von X_n für alle $n \in \mathbb{N}$

$$p(n) = p(n-1)\Pi_n = p(0)\Pi_1 \cdots \Pi_n,$$

Der Beweis folgt einfach aus der Definition der Komponenten der stochastischen Vektoren:

Für alle $\nu \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
 p_\nu(n) = P\{X_n = \nu\} &= \sum_{\mu=0}^{M-1} P\{X_n = \nu, X_{n-1} = \mu\} \\
 &= \sum_{\mu=0}^{M-1} P\{X_n = \nu \mid X_{n-1} = \mu\} P\{X_{n-1} = \mu\} \\
 &= \sum_{\mu=0}^{M-1} p_{\mu,\nu}(n) p_\mu(n-1) \\
 &= (p(n-1) \cdot \Pi_n)_\nu
 \end{aligned}$$

- b) Für die gemeinsame Verteilungsfunktion von $X = (X_0, X_1, \dots, X_n)$, d.h. für die *Verbundverteilung*, für alle $x_0, \dots, x_n \in \mathcal{X}$

$$P\{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\} = p_{x_0}(0) \prod_{j=1}^n p_{x_{j-1}, x_j}(j)$$

und für alle $k \in \mathbb{N}, k < n$

$$P\{X_k = x_k, \dots, X_n = x_n\} = p_{x_k}(k) \prod_{j=k+1}^n p_{x_{j-1}, x_j}(j),$$

Beweis durch Induktion (nicht gezeigt)

Bedeutung: Anfangszustand und Übergangswahrscheinlichkeiten beschreiben einen Markovprozeß vollständig.

- c) Für die *Übergangswahrscheinlichkeit höherer Stufe* für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und für alle $\mu, \nu \in \mathcal{X}$ mit $P\{X_k = \mu\} > 0$

$$P\{X_n = \nu \mid X_k = \mu\} = (\Pi_{k+1} \Pi_{k+2} \cdots \Pi_n)_{\mu,\nu}.$$

Wegen b) gilt mit $x_k = \mu$ und $x_n = \nu$

$$\begin{aligned}
 &P\{X_n = \nu \mid X_k = \mu\} \\
 &= \sum_{x_{k+1}, \dots, x_{n-1} \in \mathcal{X}} P\{X_k = \mu, X_{k+1} = x_{k+1}, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = \nu\} / P\{X_k = \mu\} \\
 &= \sum_{x_{k+1}, \dots, x_{n-1} \in \mathcal{X}} \prod_{l=k+1}^n p_{x_{l-1}, x_l}(\nu) = (\Pi_{k+1} \Pi_{k+2} \cdots \Pi_n)_{\mu,\nu}
 \end{aligned}$$

Damit wird die Berechnung weiter reichender Beziehungen ($r = |n - k|$) auf die Beziehungen benachbarter Schritte des Markovprozesses überführt.

Im Falle *homogener Markov-Ketten* sind die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{\mu,\nu}$ unabhängig von n , also

$$\Pi = (p_{\mu,\nu})_{\mu,\nu \in \mathcal{X}} \quad \text{mit} \quad p_{\mu,\nu} = (P\{X_n = \nu \mid X_{n-1} = \mu\})_{\mu,\nu \in \mathcal{X}}.$$

Daraus folgt die Verteilung von X_n zu

$$p(n) = p(0) \cdot \underbrace{\Pi \cdots \Pi}_{n\text{-mal}} = p(0)\Pi^n.$$

Für die Untersuchung des stochastischen Verhaltens einer homogenen Markovkette nach n Schritten sind damit die Anfangsverteilung $p(0)$ und die n -te Potenz der Zustands-Übergangsmatrix Π von Bedeutung. In manchen Fällen verschwindet der Einfluß der Anfangsverteilung $p(0)$ für den Grenzfall $n \rightarrow \infty$.

Definition (n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit):

Die n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit einer homogenen Markovkette,

$$p_{\mu,\nu}^{(n)} = P\{X_n = \nu \mid X_0 = \mu\}, \quad \mu, \nu \in \mathcal{X}, P\{X_0 = \mu\} > 0, n \in \mathbb{N},$$

ist die Wahrscheinlichkeit, in n Schritten von Zustand μ in den Zustand ν zu gelangen. ■

Dann gilt für alle $\mu \in \mathcal{X}$ mit $P\{X_0 = \mu\} > 0$

- a) $p_{\mu,\nu}^{(n)} = (\Pi^n)_{\mu,\nu}$ für alle $\nu \in \mathcal{X}$
- b) $p_{\mu,\nu}^{(n)} = P\{X_{k+n} = \nu \mid X_k = \mu\}$ (wegen Homogenität)
- c) (Chapman-Kolmogorov-Gleichung)

$$p_{\mu,\nu}^{(n+m)} = \sum_{\epsilon \in \mathcal{X}} p_{\mu,\epsilon}^{(n)} p_{\epsilon,\nu}^{(m)}.$$

Beispiel: Irrfahrt auf einem 1D-Gitter (random walk)

Gegeben sei ein eindimensionales Gitter $L = \{m \mid 0 \leq m \leq M - 1\}$ oder $L \equiv \mathbb{Z}$. Zu jedem der Zeitpunkte t_0, t_1, \dots bewege sich ein Teilchen unabhängig gemäß einer bestimmten Verteilung um k Stellen, $k \in \mathbb{Z}$, nach links bzw. nach rechts. Bei (einseitig) endlichem Gitter kann es an den Grenzen zu Absorption oder Reflexion kommen. Auch toroidale Gitter sind möglich (endlich, periodisch).

$X_n = X(t_n)$ sei die Position des Teilchens zum Zeitpunkt t_n und $Y_n, n \in \mathbb{N}$, seien stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Diese seien auch stochastisch unabhängig von X_0 . Sie beschreiben die Bewegung des Teilchens zum Zeitpunkt t_n .

a) endliches Gitter, $|L| = M$, mit absorbierenden Barrieren:

Es gilt die Rekursion

$$X_n = \begin{cases} \max\{0, \min\{X_{n-1} + Y_n, M - 1\}\} & , \text{ falls } 1 \leq X_{n-1} \leq M - 2 \\ X_{n-1} & , \text{ falls } X_{n-1} \in \{0, M - 1\} \end{cases}$$

wobei $X_0 = k, k \in L$ den Startwert festlegt.

Wenn die Verteilung der Y_n gegeben ist durch

$$P\{Y_n = 1\} = p, P\{Y_n = -1\} = 1 - p, 0 < p < 1,$$

so folgt

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1-p & 0 & p & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

b) unendliches Gitter mit 0 als reflektierender Barriere ($L = \mathbb{N}$)

$$X_n = |X_{n-1} + Y_n|$$

Für die Verteilung der Y_n wie in Fall a) folgt die unendliche Übergangsmatrix

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

■

4.5.2 Markovprozesse und Gibbsverteilung

Obwohl die Reichweite der Bedingtheit von Markovprozessen sehr klein ist (für 1. Ordnung nur der nächste Nachbar), können Markovprozesse Realisierungen mit weitreichenden Korrelationen hervorbringen. Deshalb sind sie auch geeignet, Bildstrukturen zu modellieren. In Abschnitt 4.5.3 wird dies an Beispielen verdeutlicht.

Nicht nur Grauwerte werden als Markovprozesse modelliert. Vielmehr kommen alle möglichen Semantiken mittels Partitionierung von Ω in Frage:

- Linienprozesse
- Kombinationen:

Grauwertprozeß	—	Linienprozeß
Farbprozeß	—	Linienprozeß
Bewegungsprozeß	—	Linienprozeß
Tiefenprozeß	—	Linienprozeß

Die Kombinationen mit Linienprozessen sind mit einer Segmentierungsaufgabe verbunden.

- Kombinationen Texturprozesse, Rauschprozesse
Dabei führen Texturprozesse zu einer Textursegmentierung und Rauschprozesse zu einer Restauration so segmentierter Objekte.

Allgemein lassen sich viele signalnahe Bildanalyseaufgaben auf das stochastische Modell des Markovprozesses von Bilddaten abbilden. Der Nutzen des Modells liegt auf zwei sehr unterschiedlichen Ebenen:

1. Die Reduktion der Beschreibung von stochastischen Prozessen auf bedingte Wahrscheinlichkeiten benachbarter lokaler Ereignisse läßt eine Prädiktion des Signalverlaufs auf Grund lokaler Schätzungen zu. Es können adaptive Filter entworfen werden, die rekursiv arbeiten und bei minimalem Rechenaufwand eine weite Reichweite der Impulsantwort haben (autoregressive Filter (AR-Filter) und Kalmanfilter). Insbesondere die Kalmanfilter nutzen auch das endliche Alphabet der möglichen Zustände aus.
2. Die begrenzte Abhängigkeit des Markovprozesses gestattet, eine einzelne Position einschließlich ihrer Umgebung separiert von allen anderen Positionen zu betrachten. Das ermöglicht die massiv parallele globale stochastische Optimierung der Signalfunktion in Richtung des Zustandes, der in einem gewissen Sinn (MAP, MMSE) optimal ist.

Voraussetzung für praktische Realisierbarkeit ist die Äquivalenz des *Markov-Ereignisfeldes* mit einem *Gibbs-Ereignisfeld* (s. u). D. h. die Realisierung wird als großes physikalisches System mit vielen Freiheitsgraden und einem endlichen Zustandsraum interpretiert, für das die Gesetze der *stochastischen Physik* anwendbar sind.

Annahme: $L = \{(m, n) | 0 \leq m \leq M - 1; 0 \leq n \leq N - 1\}$ sei das Gitter der Bildpunkte (Signalträger).

Definition (Nachbarschaftssystem):

Eine Untermenge von L

$$\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_{m,n} \mid (m,n) \in L, \mathcal{N}_{m,n} \subseteq L\}$$

ist ein Nachbarschaftssystem von L genau dann, wenn $\mathcal{N}_{m,n}$ die Nachbarschaft von Bildpunkt (m,n) ist, so daß

1. $(m,n) \notin \mathcal{N}_{m,n}$ und
2. $\forall (m,n) \in L ((i,j) \in \mathcal{N}_{m,n} \Rightarrow (m,n) \in \mathcal{N}_{i,j})$

■

Beispiel: hierarchisch geordnete Folge von Nachbarschaftssystemen n -ter Ordnung: $\mathcal{N}^1, \mathcal{N}^2, \dots$

			6			
	5	4	3	4	5	
	4	2	1	2	4	
6	3	1	(m,n)	1	3	6
	4	2	1	2	4	
	5	4	3	4	5	
			6			

■

Erinnerung: Ein Ereignisfeld (random field) ist die mehrdimensionale Realisierung eines stochastischen Prozesses.

Definition (Markov-Ereignisfeld (MRF)):

Ein Ereignisfeld über dem Gitter L ist bezüglich des Nachbarschaftssystems \mathcal{N} ein Markov-Ereignisfeld genau dann, wenn

$$P\{x_{m,n} \mid x_{i,j} : (i,j) \in L \setminus \{(m,n)\}\} = P\{x_{m,n} \mid x_{i,j} : (i,j) \in \mathcal{N}_{m,n}\}$$

für alle $(m,n) \in L$ und $P\{x_{m,n}\} > 0$ für alle $x_{m,n}$.

■

Das Tupel Gitter-Nachbarschaftssystem (L, \mathcal{N}) definiert einen *Graphen*. In der Graphentheorie wird eine Menge von Knoten, die entweder aus einem Knoten besteht oder in der jeder Knoten Nachbar aller anderen Knoten ist, als *Clique* bezeichnet.

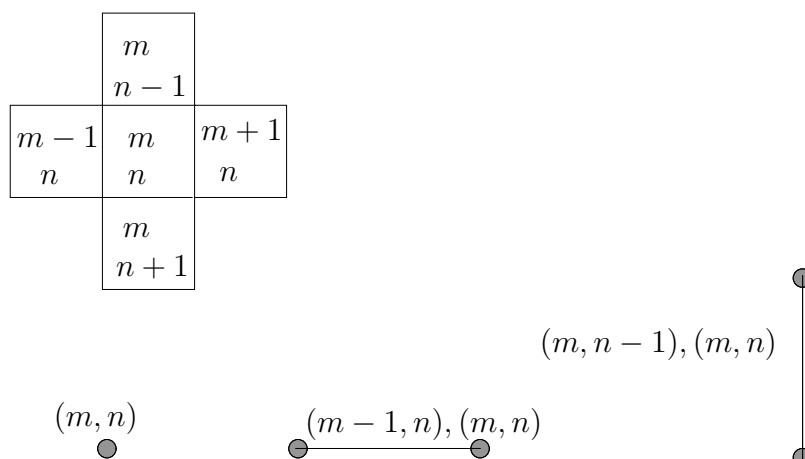
Definition (Clique):

Eine Clique C des Paares (L, \mathcal{N}) ist eine Untermenge von L , so daß

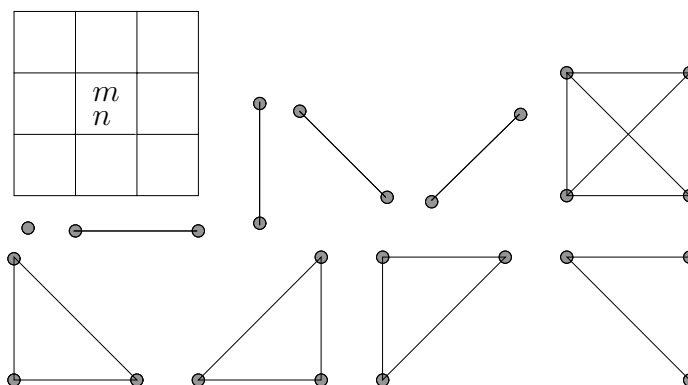
1. C besteht aus einem einzigen Pixel, oder
2. $((m, n) \neq (i, j) \wedge (m, n) \in C \wedge (i, j) \in C) \implies (m, n) \in \mathcal{N}_{i,j}$ (Implikation)

■

MRF 1. Ordnung erlaubt die Betrachtung von Statistiken erster und zweiter Ordnung:



MRF 2. Ordnung erlaubt die Betrachtung von Statistiken erster bis vierter Ordnung:

**Definition (Gibbs–Ereignisfeld):**

Ein Ereignisfeld x , das auf L definiert ist, ist ein Gibbs–Ereignisfeld bez. \mathcal{N} , wenn es durch die Gibbs-Verteilung (Wahrscheinlichkeitsmaß der Verbundwahrscheinlichkeit)

$$P\{X = x\} = \frac{1}{z} e^{-U(x)}$$

charakterisiert ist.

■

Sei $\mathcal{C} = \{C\}$ die Menge aller Cliques bezüglich (L, \mathcal{N}) .

$$\begin{array}{ll}
 P\{X = x\} & \text{GIBBS-(BOLTZMANN)-VERTEILUNG} \\
 U(x) = \sum_{C \in \mathcal{C}} V_C(x_{m,n} | (m, n) \in C) & \text{Energiefunktion} \\
 V_C & \text{Potentialfunktion (hängt} \\
 & \text{nur von den Werten in der Clique ab.)} \\
 z = \sum_x e^{-U(x)} & \text{Zustandsfunktion (Partitionsfunktion)} \\
 & \text{und wirkt als Normierungskonstante}
 \end{array}$$

Hammersley–Clifford–Theorem :

Markov–Ereignisfeld und Gibbs-Verteilung sind dasselbe!

Die Verbundwahrscheinlichkeit eines MRF läßt sich als Energiefunktion der Realisierung darstellen. Je kleiner $U(x)$ ist, umso wahrscheinlicher ist die Realisierung x . Die MRF-Modellierung wird mit einer Strategie der Maximierung der Verbundwahrscheinlichkeit gekoppelt. Die stochastische Optimierung eines MRF minimiert die Energiefunktion über dem Ereignisfeld. Da diese Energiefunktion im Gegensatz zur Fehlerfunktion des MMSE-Verfahrens nicht konvex ist, spricht man auch von nichtkonvexer Optimierung. Dieses Minimum entspricht einem Signalzustand mit gewünschten Eigenschaften.

Probleme sind hierbei das Schätzen der Cliques–Potentiale und die Wahl eines geeigneten Optimierungsalgorithmus'.

Erstaunlich ist aber, welche einfachen Annahmen über die Potentialfunktion V_C bereits Effekte bei globalen Optimierungen einer Bildfunktion erzeugen. Für die Durchführung der Optimierung existieren verschiedene berühmte Algorithmen (*Metropolis-Algorithmus, Simulated Annealing*).

Anwendungen:

- Stereo-Tiefenbestimmung
- Bewegungsanalyse
- Texturanalyse
- Bildrestauration
- Bildverbesserung
- Bildsegmentierung

4.5.3 Bildverarbeitung mittels Random Walk und Gibbs-Verteilung

a) Textur-Binarisierung

Textur-Binarisierung dient zur Kontrastverstärkung von texturierten Mustern

durch Binarisierung. Es werden relativ reguläre Texturen angenommen, die auf inhomogenem Hintergrund aufgebracht sind.

(1) 1D-Algorithmus

Sei $X = \{X_m \mid m = 1, 2, \dots, M, X_m \in [0, 1]\}$ ein Datenvektor mit sich regelmäßig wiederholenden Mustern seiner Elemente. Das Datengitter L sei also eindimensional und $|L| = M$. Es sei eine gespiegelte Fortsetzung des Gitters angenommen, so daß X erweitert wird zu \tilde{X} :

$$\tilde{X} = (X_\lambda, \dots, X_2, X_1, X_2, \dots, X_M, X_{M-1}, \dots, X_{M-\lambda}).$$

Dabei sei berücksichtigt, daß eine Nachbarschaft $\mathcal{N}(\lambda) = \{\mathcal{N}_i \mid d_\lambda(i, j) = |i - j| \leq \lambda\}$ durch die Metrik d_λ definiert ist.

Dieses Nachbarschaftssystem legt fest, daß Merkmale X_i (d.h. Grauwerte) eine virtuelle Irrfahrt zu Punkten $j \in \mathcal{N}$ ausführen können, deren Abstand zu i kleiner oder gleich λ ist.

Die Übergangswahrscheinlichkeit ist

$$p_{ij} = \frac{e^{\beta(X_i - X_j)}}{z}, \quad z = \sum_{k=-\lambda}^{\lambda} e^{\beta(X_i - X_{i+k})}, \quad \beta = \frac{1}{T}$$

Hier sind z eine Normierungskonstante und T der Temperaturparameter der Gibbsverteilung. Es wird angenommen, daß die Bildpunkte i potentielle Energie (V_C^i) besitzen, die gleich ihrem Grauwert X_i ist. Die Energiefunktion U_{ij} für den Platzwechsel von i nach j entspricht einer Statistik zweiter Ordnung. Die Bildpunkte selbst werden aber als statistisch unabhängig betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Grauwert X_i nach Platz $j \in \mathcal{N}$ wandert, ist umso höher, je größer die Grauwertdifferenz ($X_i - X_j$) ist. Für $X_i = X_j$ folgt $p_{ij} = \frac{1}{z} \approx 0$ und für $|X_i - X_j| \gg 0$ folgt $p_{ij} \approx 1$.

Die hier verfolgte Zielstellung der Texturbinarisierung bedeutet, daß sich Cluster mit gleich hohem Grauwert bilden, die durch Cluster niedrigeren Grauwerts getrennt sind. Nach einer Schwellenoperation erhält man ein binäres grob strukturiertes Muster. Dies wird dadurch erreicht, daß die Wahrscheinlichkeit dafür maximiert wird, innerhalb des Nachbarschaftssystems gleiche Grauwerte anzutreffen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein virtueller Grauwert seinen Platz nicht verläßt, weil Position j den selben Grauwert X_i trägt, ist gegeben durch

$$p_i = \frac{e^{\beta(X_i - X_i)}}{\sum_{k=-\lambda}^{\lambda} e^{\beta(X_i - X_{i+k})}} = \frac{e^{-\beta X_i}}{\sum_{k=-\lambda}^{\lambda} e^{-\beta X_{i+k}}},$$

bzw. mit $\psi_i = e^{-\beta X_i}$

$$p_i = \frac{\psi_i}{\sum_{k=-\lambda}^{\lambda} \psi_{i+k}}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit steht für das Ziel des Random Walk innerhalb der gewählten Nachbarschaft.

Ordnet man jedem Punkt $i \in L$ die Wahrscheinlichkeit p_i zu, so erhält man den stochastischen Vektor

$$p_1^{(1)} = (p_1, p_2, \dots, p_M).$$

Mit der Transformation $p_2^{(1)} = e^{-\frac{p_1^{(1)}}{m}}$, $m = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M p_k$, und nach Normierung von $p_2^{(1)}$ erhält man einen Datenvektor $P^{(1)}$, der den Vektor der Grauwerte X ersetzt. Die Iteration $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \dots$ erzeugt eine Folge von Datenvektoren, die das Ziel der Clusterbildung konstanter Grauwerte schrittweise annähern. Dabei gilt, daß λ größer sein sollte als die zu erzielende Clustergröße und daß die Konvergenz nur eintritt, wenn T nicht groß ist. Hierbei spielt T die Rolle einer Schwelle und λ entscheidet über das resultierende binäre Muster.

Experimente (siehe Abbildungen 4.7 und 4.8)

(2) 2D-Algorithmus

Die Gittermatrix sei $L = \{(m, n) \mid 1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N\}$. Die Nachbarschaft sei durch die *Tschebyscheff-Metrik* $d((m, n), (k, l)) = \max\{|m-k|, |n-l|\}$ als die 8-Nachbarschaft für $d = 1$ definiert. Allerdings werden *Markovmaschen* $\mathcal{N}(\lambda) = \{\mathcal{N}_i \mid d_\lambda((m, n), (k, l)) \leq \lambda\}$ betrachtet.

Entsprechend dem 1D-Fall wird das Gitter auf \tilde{L} durch Spiegelung am Bildrand erweitert, so daß $\tilde{L} \sim (M + 2\lambda) \times (N + 2\lambda)$.

Die virtuellen Irrfahrten der Merkmale $X_{m,n}$ (der Grauwerte) werden wieder durch die nach einer Gibbs-Verteilung gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{m,n;k,l}$ beschrieben. Sie werden nicht ausgeführt, wenn $X_{m,n} = X_{k,l}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{m,n} &= \frac{e^{\beta(X_{m,n} - X_{m,n})}}{\sum_{i=-\lambda}^{\lambda} \sum_{j=-\lambda}^{\lambda} e^{\beta(X_{m,n} - X_{m+i, n+j})}} \\ &= \frac{e^{-\beta X_{m,n}}}{\sum_i \sum_j e^{-\beta X_{m+i, n+j}}}. \end{aligned}$$

Mit $\psi_{m,n} = e^{-\beta X_{m,n}}$ folgt

$$p_{m,n} = \frac{\psi_{m,n}}{\sum_i \sum_j \psi_{m+i, n+j}}.$$

Ist $p_{m,n}$ berechnet, so lassen sich leicht alle Wahrscheinlichkeiten $p_{k,l}$ inner-

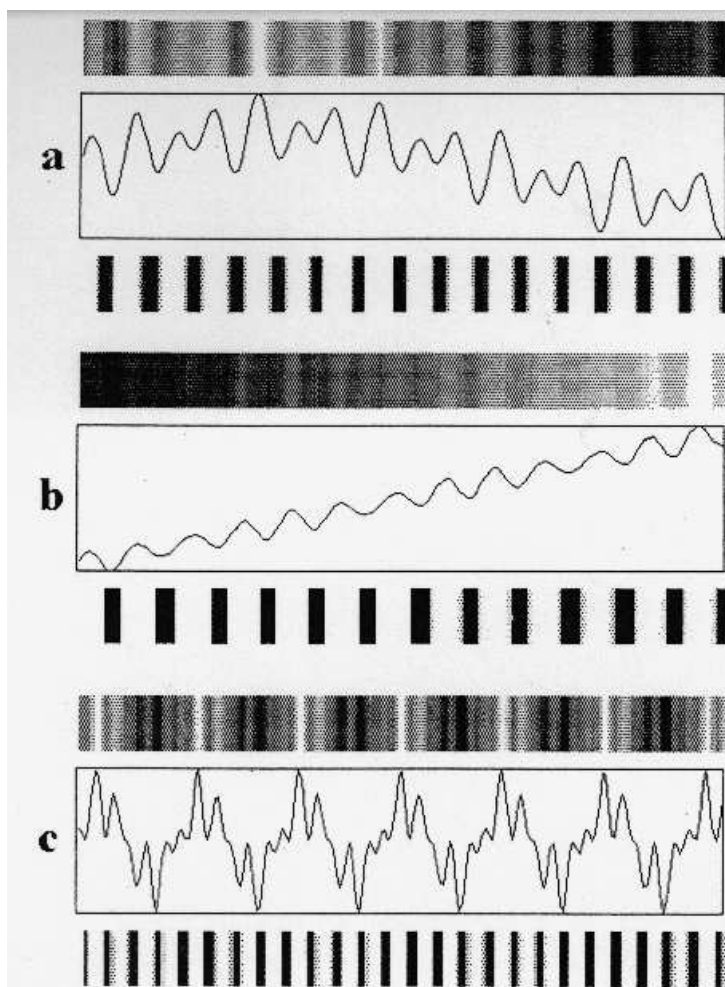


Abbildung 4.7: Binarisierung von regulären 1D-Texturen $T = 0.33$, $N_{it} = 20$, a: $\lambda = 10$, b: $\lambda = 10$, c: $\lambda = 5$ Grauwertmuster in 32 Stufen (schwarz: $X_i = 0$, weiß: $X_i = 1$) oben: Grauwertvektor X , mitte: Intensitätsprofil, unten: Datenvektor $P^{(20)}$ nach Binarisierung

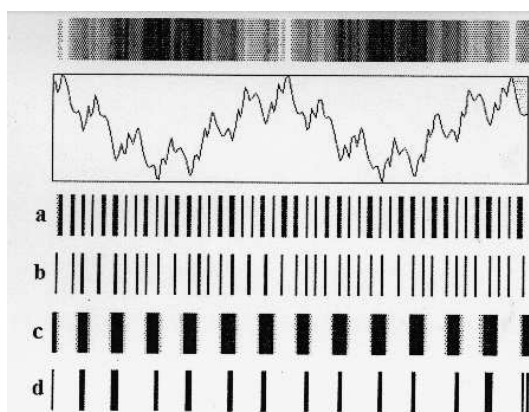


Abbildung 4.8: Einfluß der Parameter λ und T auf das Ergebnis der Binarisierung. a: $\lambda = 3$, $T = 0.33$; b: $\lambda = 3$, $T = 0.1$; c: $\lambda = 10$, $T = 0.33$; d: $\lambda = 10$, $T = 0.1$. Hier übernimmt T die Rolle einer Schwelle und λ entscheidet über das resultierende lineare Muster.

halb von $\mathcal{N}(\lambda)$ berechnen. Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned} p_{m,n+1} &= \frac{\psi_{m,n+1}}{\sum_{i=-\lambda}^{\lambda} \sum_{j=-\lambda}^{\lambda} \psi_{m+i,n+1+j}} \\ &= \frac{\psi_{m,n+1}}{\Delta_{m,n+1} + \sum_{i=-\lambda}^{\lambda} \sum_{j=-\lambda}^{\lambda} \psi_{m+i,n+j}} \end{aligned}$$

mit

$$\Delta_{m,n+1} = \sum_{i=-\lambda}^{\lambda} \psi_{m+i,n+\lambda+1} - \psi_{m+i,n-\lambda}.$$

Da $\sum_i \sum_j \psi_{m+i,n+j} = \frac{\psi_{m,n}}{p_{m,n}}$ folgt schließlich

$$p_{m,n+1} = \frac{\psi_{m,n+1} \cdot p_{m,n}}{\psi_{m,n} + p_{m,n} \cdot \Delta_{m,n+1}}.$$

Diese Aktualisierungsvariante führt zu einer enormen Reduktion des Berechnungsaufwandes im Vergleich zur unabhängigen Berechnung aller Werte im Fenster.

Experimente: Die Abbildung 4.9 zeigt die Irrfahrt innerhalb des Gitters L mit Verschiebungsvektoren $|\tau| \leq d_\lambda$. Die Abbildungen 4.10 und 4.11 zeigen die Binarisierungen von Texturen bei stark inhomogenem Untergrund.

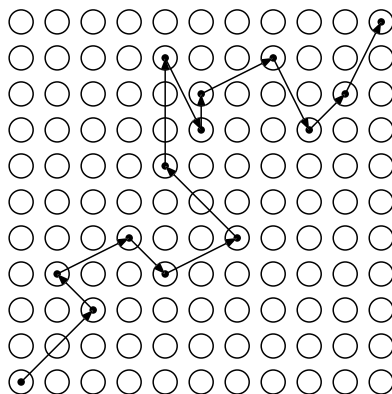


Abbildung 4.9: Random Walk auf Bildgitter

b) Kontrastverstärkung

Kontrastverstärkung ist eine typische Aufgabe der Bildverbesserung, die meist mittels Punktoperationen ($\mathcal{U} = (m, n)$), z.B. Grauwertistogramm-Egalisierung, oder mittels lokaler Operatoren ($\mathcal{U} \ll M \times N$), z.B. Unschärfe-Maskierungsfilter erfolgt. Der Nachteil dieser Verfahren ist ihre begrenzte Sichtweite, so daß großflächige Effekte nicht berücksichtigt werden können. Globale Verfahren (im Frequenzraum) sind zwar in bestimmten Fällen möglich, im allgemeinen scheitern

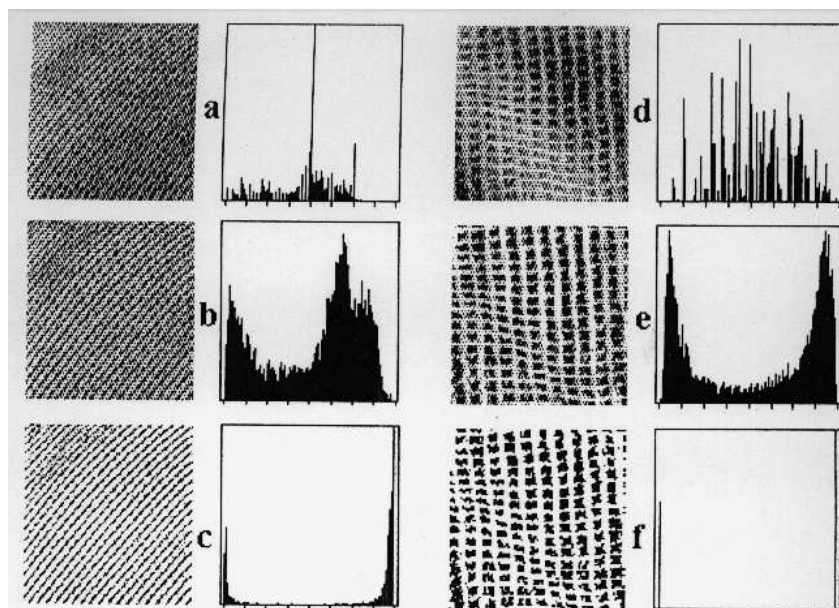


Abbildung 4.10: Binarisierung regulärer Texturen. a: Feder; b: $P^{(2)}$ - Zweite Iteration bei $T = 0.2$, $\lambda = 10$; c: $P^{(10)}$; d: Gewebe; e: $P^{(20)}$ bei $T = 0.66$, $\lambda = 20$; f: $P^{(50)}$; rechts das entsprechende Histogramm.

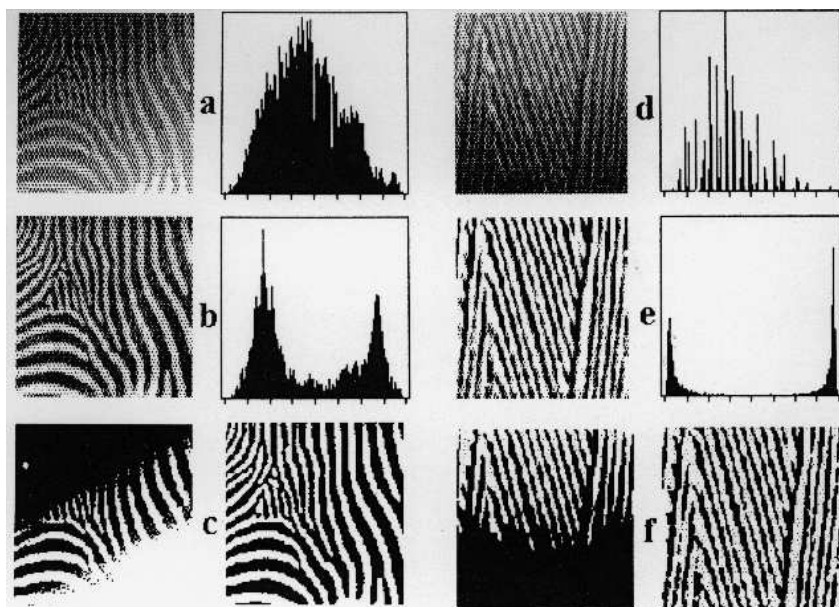


Abbildung 4.11: Binarisierung regulärer Texturen mit ungleichförmiger Helligkeit. a: Zebra-Fell; b: $P^{(3)}$ bei $T = 0.5$, $\lambda = 20$; c: Original mit Schwelle bei 0.5 und $P^{(10)}$; d: aufgespulter Draht; e: $P^{(25)}$ bei $T = 0.66$, $\lambda = 10$; f: Original mit Schwelle bei 0.5 und $P^{(25)}$.

sie aber daran, daß die Modellierung der kontrastreduzierenden Erscheinungen kaum möglich ist.

Markov random walks vermitteln zwischen beiden Extremfällen. Sie sind von weitreichender Wirkung bei iterativer Anwendung und erfordern einfachste Modellierungen im Ortsraum.

Die vorgestellte Methode geht von einem toroidalen Bild-Gitter aus, auf dem eine 8-Nachbarschaft definiert ist. Sei N die Gesamtzahl der Bildpunkte (i, j) mit $X_{i,j} \in [0, 1]$. Die Grauwerte $X_{i,j}$ entsprechen der Potentialfunktion der Gibbsverteilung am Ort (i, j) . Die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs eines virtuellen Teilchens von dem Gitterpunkt (i, j) zu einem anderen Punkt (k, l) seines Nachbarschaftssystems ist durch die Gibbsverteilung über der Energiefunktion der Menge der Punktpaare gegeben. Durch derartige Übergänge wird eine homogene Markovkette erzeugt. Zu beachten ist allerdings, daß innerhalb der Nachbarschaft nur eine Statistik zweiter Ordnung berücksichtigt wird.

Eine Methode der Kontrastverstärkung besteht in der Berechnung des stationären stochastischen Vektors der Markovkette für den Fall, daß deren Länge n gegen Unendlich geht.

Sei Π die stochastische Matrix (Zustandsübergangsmatrix) mit den Elementen

$$p_{i,j;k,l} = \begin{cases} \frac{e^{\beta(X_{i,j} - X_{k,l})}}{\sum_{\mu=-1}^1 \sum_{\nu=-1}^1 e^{\beta(X_{i,j} - X_{i+\mu, j+\nu})}} & \text{für } d((i, j), (k, l)) \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach n Schritten das virtuelle Teilchen von (i, j) nach (k, l) kommt, ist $p_{i,j;k,l}(n)$. Die Matrix, welche alle Kombinationen von (i, j) und (k, l) erfaßt, ist Π_n . Im Falle homogener Markovketten gilt $\Pi_n = \Pi^n$. Ist Π eine reguläre Matrix (gilt hier, da alle Einträge positiv sind), so existiert eine Matrix P für den Grenzübergang

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^n = P.$$

Jede Zeile der Matrix P wird durch den gleichen stochastischen Vektor

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_N) \text{ gebildet, wobei } p_i > 0 \text{ für alle Positionen } i \text{ und } \sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

Der Vektor p wird approximativ geschätzt.

Sei $\psi_{i,j;k,l}$ der Erwartungswert der Visiten am Ort (k, l) , wenn die Wanderung am Ort (i, j) begann,

$$\psi_{i,j;k,l} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{i,j;k,l}(n).$$

Der Erwartungswert dafür, daß (k, l) getroffen wird, wenn man von irgendeinem Punkt des Bildes (i, j) startet, ist

$$\chi_{k,l} = \sum_{(i,j) \in L} \psi_{i,j;k,l}.$$

Hieraus erhält man die relative Häufigkeit der Visiten bei (k, l)

$$V_{k,l} = \frac{\chi_{k,l}}{\sum_{(k,l) \in L} \chi_{k,l}}.$$

Der Algorithmus ordnet jedem Bildpunkt (k, l) die relative Häufigkeit $V_{k,l}$ für Visiten zu. Hierzu ist eine Simulation einer Irrfahrt auf dem Torusgitter erforderlich, wobei die Übergangswahrscheinlichkeiten zu den Punkten innerhalb der Nachbarschaft aus der Gibbsverteilung berechnet werden.

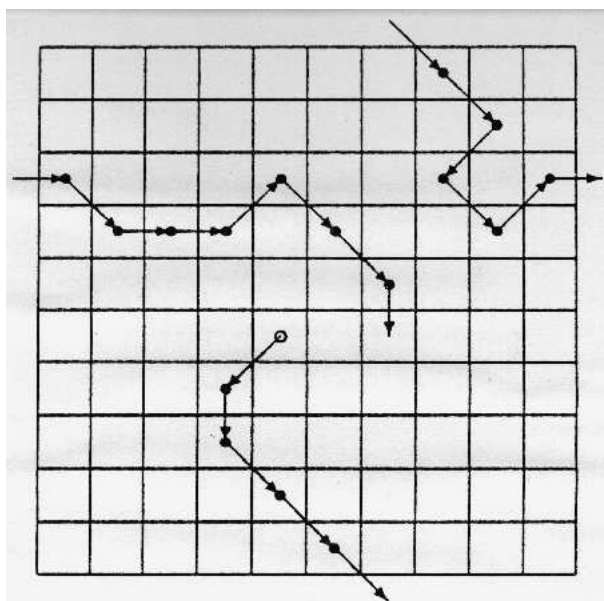


Abbildung 4.12: Random Walk auf toroidalem Gitter.

Das virtuelle Teilchen startet von jedem Punkt des Gitters und führt ν Übergänge durch. Jede Visite wird registriert und nachdem alle Startpunkte abgearbeitet wurden, wird die relative Häufigkeit der Visiten $V_{k,l}(\nu)$ bestimmt.

Das kontrastverstärkte Bild erhält die Einträge

$$W_{i,j} = \frac{e^{\gamma V_{i,j}(\nu)}}{e^{\gamma}},$$

wobei γ ein experimentell zu findender Parameter ist.

Experimente: $L : 125 \times 125$, $\nu = 500$, $T = 0.1$, $\gamma = 5$

Variation der Nachbarschaft: d_λ erzeugt $\mathcal{N}(\lambda)$

Dadurch wird die Nachbarschaft, in der Übergänge stattfinden können, auf $(2\lambda + 1)^2$ Punkte festgelegt. Der Parameter λ sollte groß genug sein, um die lokale Bildstruktur zu erfassen, die interessiert.

a: Testbilder (Tapete, Gewebe, Satellitenbild)

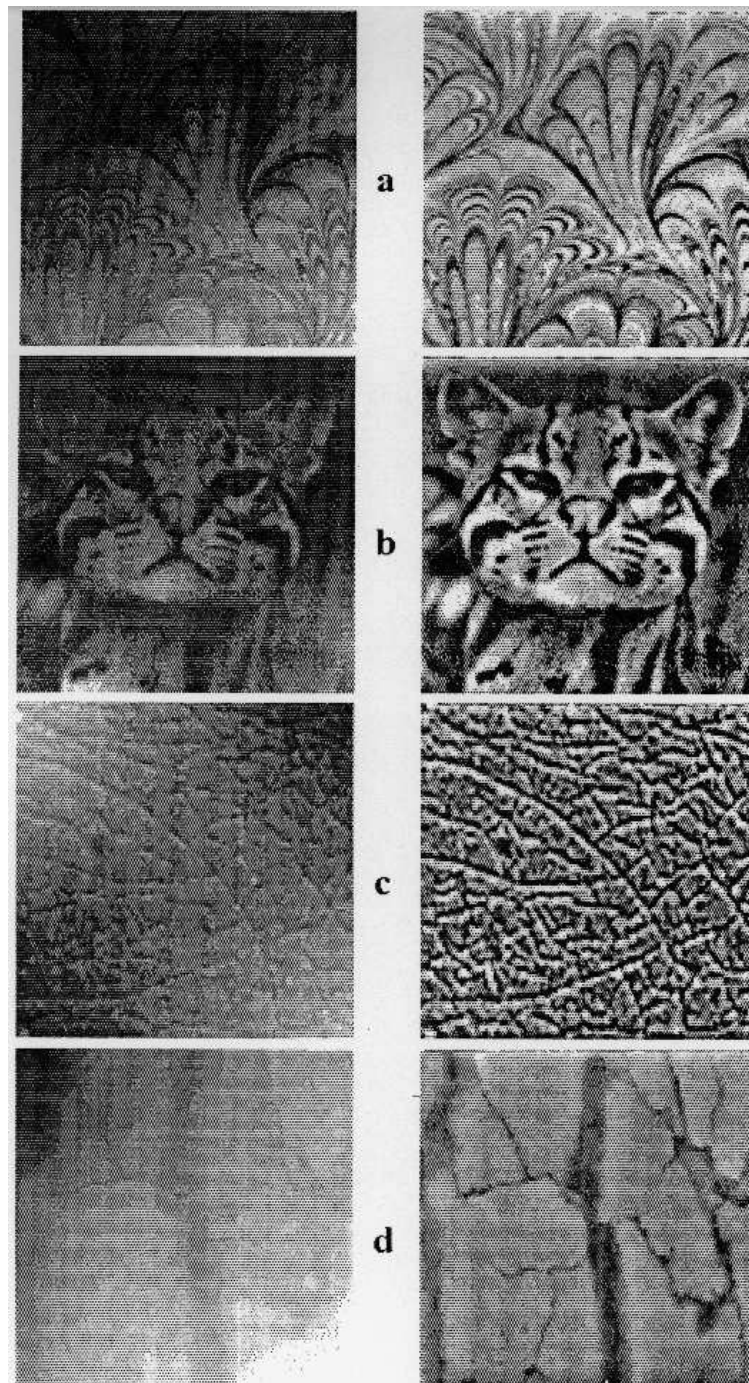


Abbildung 4.13: Kontrastverstärkung bei ungleichförmiger Bildhelligkeit. a: Tapete; b: Katze; c: menschliche Haut; d: Marmoroberfläche.

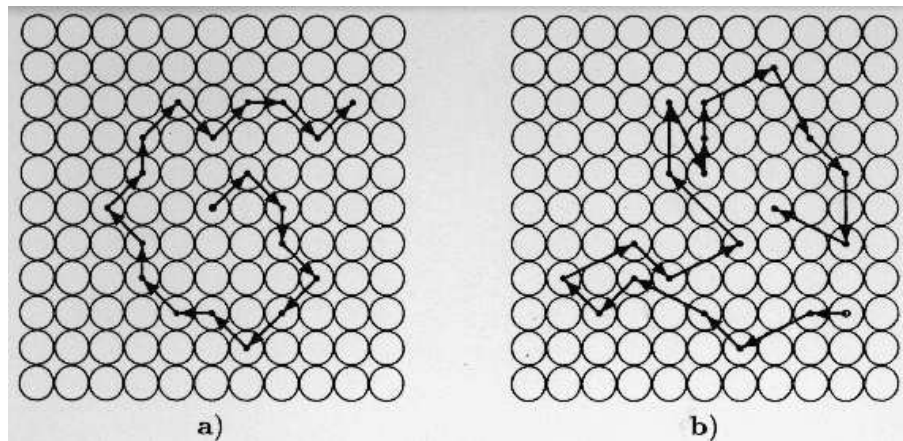


Abbildung 4.14: Zwei Nachbarschaftssysteme. a: $\lambda = 1$; b: $\lambda = 2$.

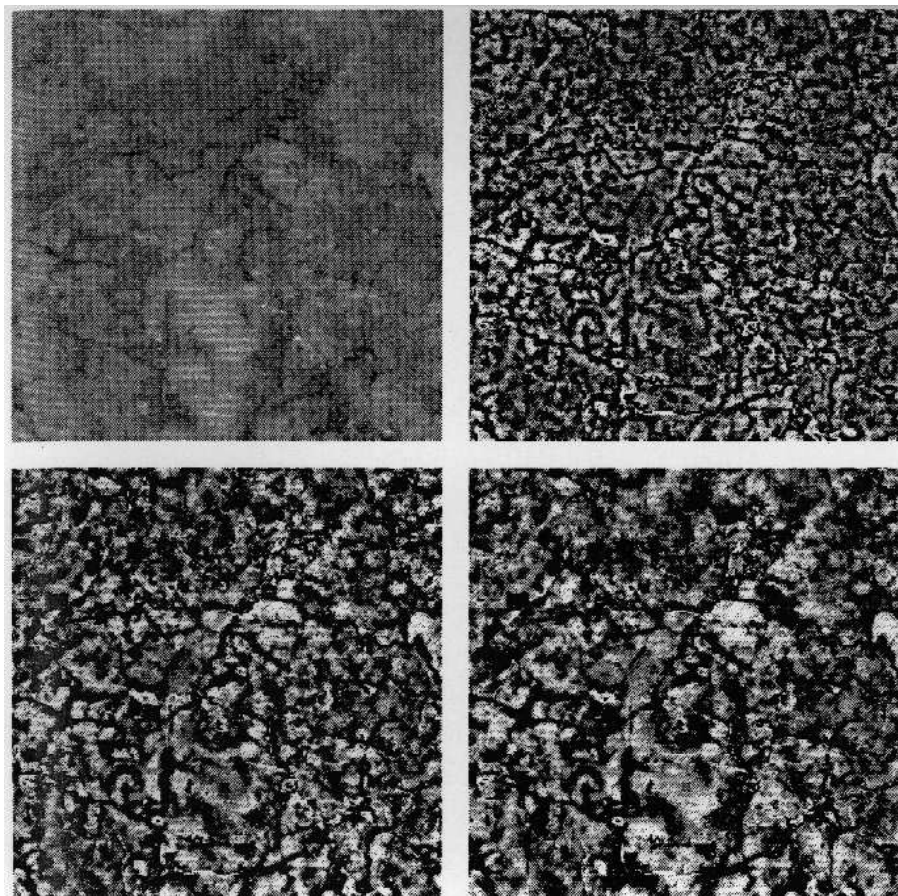


Abbildung 4.15: Parameter λ selektiert eine bestimmte Skala der Textur. oben links: Marmoroberfläche; oben rechts: $\lambda = 5$; unten links: $\lambda = 10$; unten rechts: $\lambda = 15$. In allen drei Fällen $\beta = 10$.

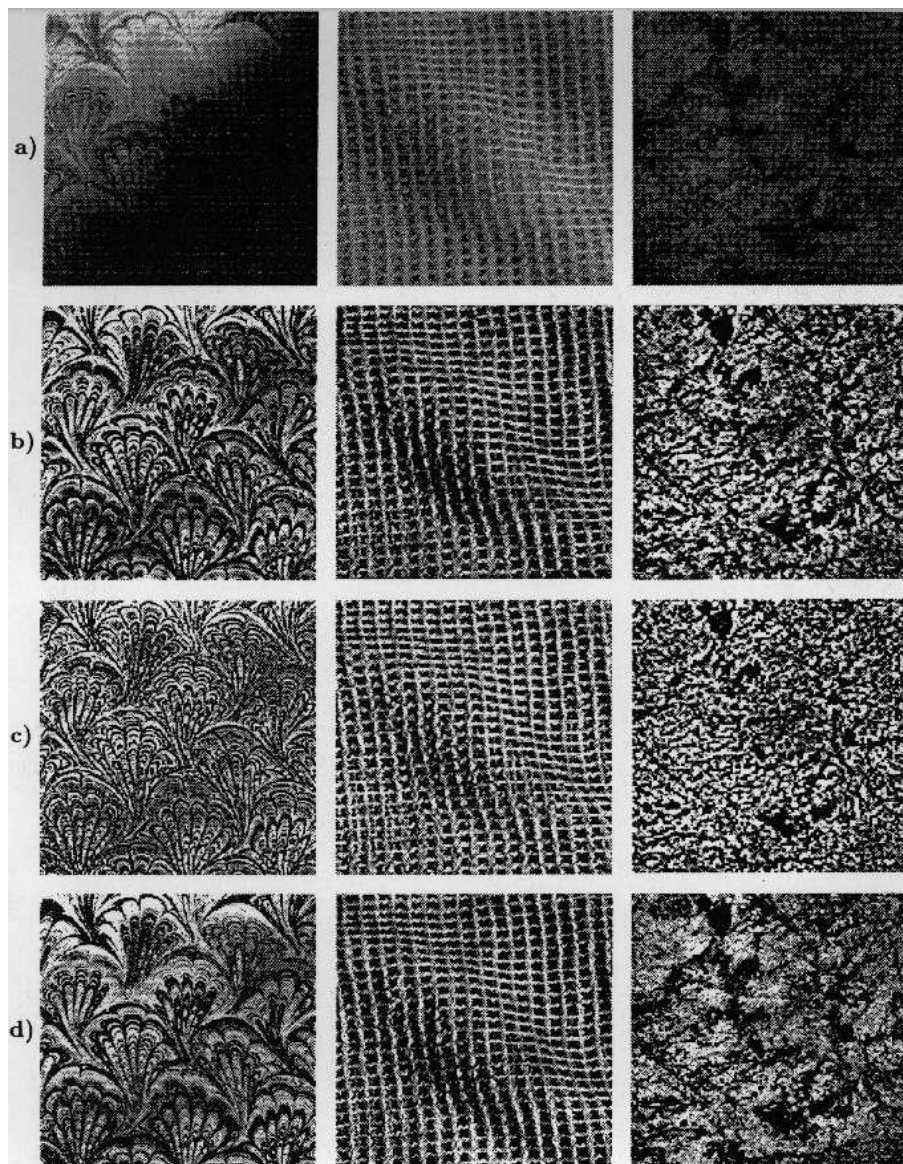


Abbildung 4.16: Ergebnisse der Kontrastverstärkung.

- b: Methode der relativen Häufigkeiten der Visiten
 $\nu = 1000$, $T = 0.1$, $\lambda = 15$
- c: Methode der Grenzwahrscheinlichkeit der Markovkette
7 Iterationen , $T = 0.1$, $\lambda = 15$
- d: Methode der n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit
(Sprünge der Weite n ; $\mu = \lambda = 15$, $\beta = 10$).

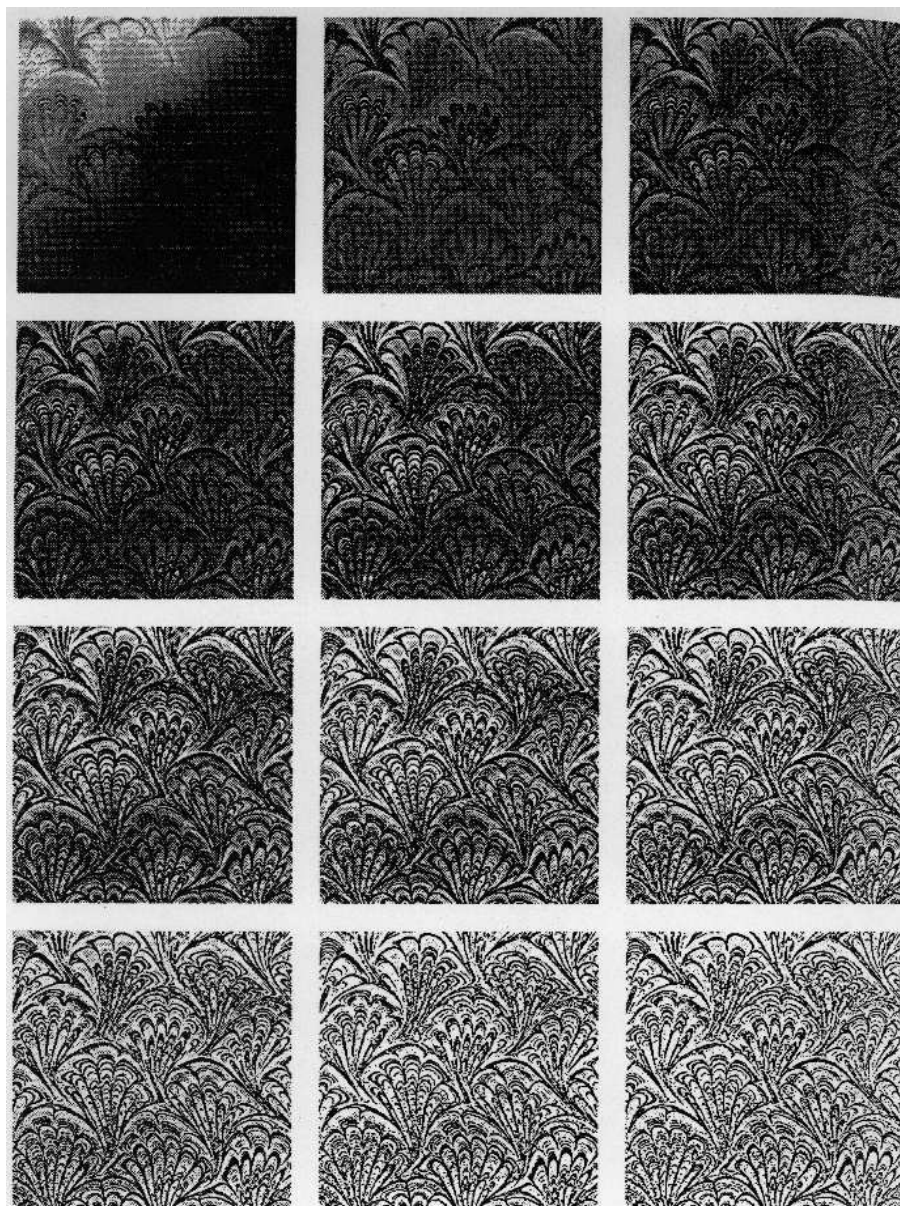


Abbildung 4.17: Methode des nicht-springenden Teilchens (wie Textur-Binarisierung). Die Bildeinträge stellen die inverse Zustandsfunktion $z_{i,j}^{-1}$ dar, welche Iterationen (von links oben nach rechts unten) unterzogen wird ($\lambda = 15$, $\beta = 10$).

4.6 Rekursive Systeme und stochastische Prozesse

In diesem Abschnitt werden Beziehungen zwischen *rekursiven Filtern* und stochastischen Prozessen hergestellt, die rekursive Filter verwendet werden, um stochastische Prozesse zu erzeugen. Dadurch ist es möglich, stochastische Signale als Realisierung stochastischer Prozesse durch Synthese zu analysieren. Dies geschieht auf folgende Weise:

1. Das rekursive Filter ist durch Parameter (Filterkoeffizienten) einstellbar.
2. Diese Parameter werden so gewählt, daß der Output des Filters und das zu analysierende Signal sich bis auf einen zu minimierenden Fehler gleichen.
3. Die Minimierung dieses Fehlers erfolgt nach Optimierungskriterien (z.B. MMSE).
4. Die Parameter des optimalen Filters sind dann Parameter, die das Signal charakterisieren.
5. Meist wird ein homogener, schwach stationärer Prozeß angenommen. Dann werden die Filterparameter verschiebungsinvariant geschätzt. Den Filter bezeichnet man dann als nicht adaptiv.
6. Die Modellierung des stochastischen Prozesses als lokal schwach stationären Prozeß oder als Markov-Prozeß gestattet auch den Einsatz adaptiver Filter. Hier werden die Filterparameter bildpunktweise an den Prozeß angepaßt.

Im Folgenden werden deterministische und stochastische rekursive Systeme eingeführt. Stochastische rekursive Systeme stehen nach dem Prinzip „Analyse durch Synthese“ für stochastische Prozesse, deren Realisierungen (Signale) zu analysieren sind.

Die Beschreibung von rekursiven Systemen durch Zustandsgleichungen ermöglicht eine sehr effiziente Filterstruktur, die nach dem Prinzip Prädiktion und Korrektur optimal an die Signaldaten angepaßt werden kann. Diese Filter bezeichnet man als *Kalmanfilter*. Sie wurden zuerst in der Regelungstechnik eingeführt, haben aber inzwischen auch in Computer Vision eine zentrale Bedeutung.

4.6.1 Deterministische rekursive Systeme

Die im Kapitel 2 eingeführten LSI-Operatoren sind durch eine endliche Impulsantwort charakterisiert. Man bezeichnet sie deshalb auch als *FIR-Systeme* (*finite impulse response*). Diese Systeme besitzen keine Rückkopplung des Outputs auf den Input.

2D-FIR-Systeme werden durch Abbildungen

$$g_{mn} = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} a_{kl} f_{m-k, n-l}$$

beschrieben. Für die Koeffizienten der Linearkombination gilt

$$a_{kl} \equiv h_{kl},$$

wobei h_{kl} die Koeffizienten der Impulsantwort h sind. Wir bezeichnen die Abbildung als Faltung der Funktion f mit der Impulsantwort,

$$g = h * f.$$

Die Konsequenz des endlich ausgedehnten Einflußbereiches des Abbildungsoperators besteht darin, daß auch nur endlich weit entfernte Bildpunkte (i, j) dazu beitragen können, den Funktionswert am Aufpunkt (m, n) in gewünschter Weise zu verändern.

Manche LSI-Systeme kann man aber auch rekursiv (mit Rückkopplung) formulieren.

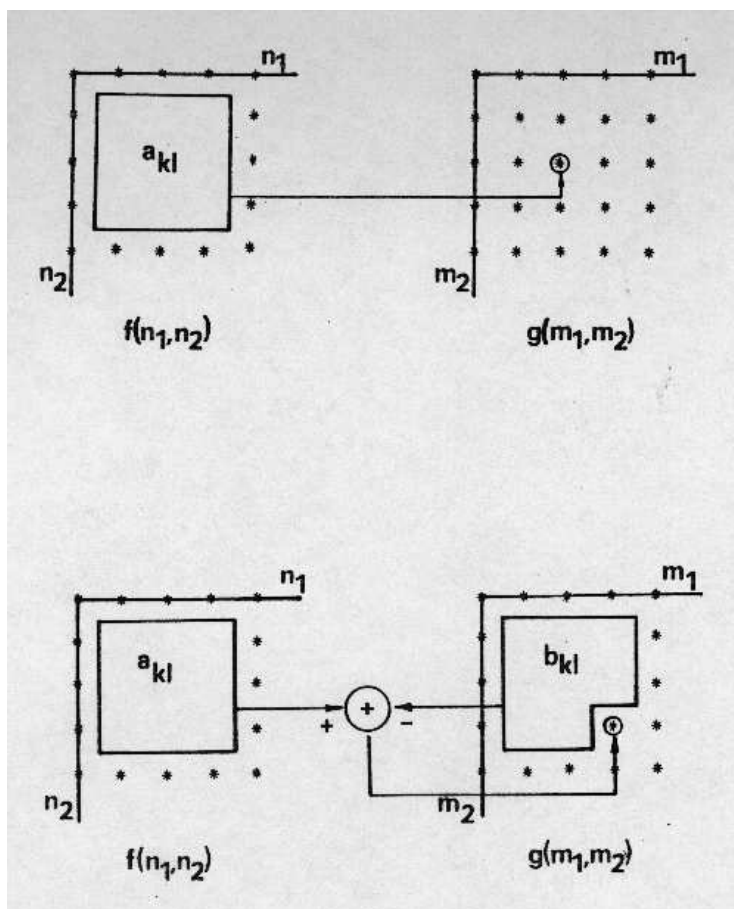
Beispiel: ungewichtete Mittelwertbildung

1. ohne Rückkopplung (FIR)

$$g_m = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} f_{m-k} \quad (\text{alle } a_k = 1)$$

2. mit Rückkopplung (IIR)

$$g_m = g_{m-1} + \frac{1}{K}(f_m - f_{m-K})$$



Ein System mit Rückkopplung heißt auch *IIR-System* (*infinite impulse response*), da die rekursiv berechnete Impulsantwort effektiv eine unendliche Ausdehnung hat. Die Konsequenzen daraus sind:

1. Die Koeffizienten a_k und b_k entsprechen *nicht* der Impulsantwort h .
2. Ein *rekursives System* vermag in einem Durchlauf weitreichende Einflüsse zu transportieren (erzeugt langsam abfallende Autokorrelation).

Die allgemeinste implizite Formulierung einer Input/Output-Relation gestattet die *Differenzgleichung* (hier 1D-Fall):

$$\sum_{k=0}^{K_1-1} a_k f_{m-k} = \sum_{k=0}^{K_2-1} b_k g_{m-k}.$$

K_2 gibt die *Ordnung* der Differenzgleichung an. Praktisch anwendbar sind Ordnungen ≤ 2 .

Um eine eindeutige Lösung für g_m zu erhalten, müssen Anfangswerte für das Systemverhalten festgelegt werden. Dann kann auch eine explizite Form der Input/Output-Relation angegeben werden:

$$g_m = \frac{1}{b_0} \left(\sum_{k=0}^{K_1-1} a_k f_{m-k} - \sum_{k=1}^{K_2-1} b_k g_{m-k} \right).$$

Gilt $b_k = 0$ für $k = 1, \dots, K_2 - 1$, so stellt die Gleichung ein FIR-System dar, andernfalls ein IIR-System.

IIR-Systeme sind nicht a priori stabil wie FIR-Systeme. Stabilitätskriterium *BIBO-Kriterium* (bounded input/bounded output):

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h_k| < +\infty$$

Der Nachweis der Stabilität eines IIR-Systems, bzw. die Suche nach stabilen Lösungen ist oft schwierig.

Im folgenden Beispiel lassen sich die Lösungen und die Koeffizienten der Impulsantwort aber einfach angeben.

Beispiel: $g_m = f_m + b g_{m-1}$

Annahmen:

$$f_m = \begin{cases} 1 & m \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g_m = 0 \quad \text{für } m < 0$$

- exakte iterative Lösung der Differenzgleichung:

$$\begin{aligned} m < 0 & : g_m = 0 \\ m = 0 & : g_0 = f_0 + b g_{-1} = 1 \\ m = 1 & : g_1 = f_1 + b g_0 = 1 + b \\ m = 2 & : g_2 = f_2 + b g_1 = 1 + b + b^2 \\ & \vdots \\ m = M & : g_M = f_M + b g_{M-1} = \sum_{m=0}^M b^m = \frac{1-b^{M+1}}{1-b} \end{aligned}$$

Für $M = 1$ erhält man also $g_1 = \frac{1-b^2}{1-b} = \frac{(1-b)(1+b)}{1-b} = 1 + b$.

- Bestimmung der Impulsantwort: h_m ist die Lösung der Differenzgleichung

$$h_m = \delta_m + b h_{m-1} \quad \text{mit } \delta_m = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Welche Impulsantwort erlaubt die Darstellung der Outputfunktion als Faltung (nichtre-kursive Abbildung) $g_m = \sum_{k=0}^{\infty} h_k f_{m-k}$ mit einer unendlich ausgedehnten Impulsantwort?

$$\begin{aligned} m < 0 & : h_m = 0 \\ m = 0 & : h_0 = \delta_0 + b h_{-1} = 1 \\ m = 1 & : h_1 = \delta_1 + b h_0 = b \\ m = 2 & : h_2 = \delta_2 + b h_1 = b^2 \\ & \vdots \\ m = M & : h_M = \delta_M + b h_{M-1} = b^M \end{aligned}$$

für $0 < b < 1$ gilt dann $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = 0$

Durch Abschneiden bei $m = M$ erhält man $\hat{h} \approx h$.

■

4.6.2 Synthese und Analyse von ARMA-Prozessen

Die Analyse stochastischer Prozesse kann durch den Vergleich mit stochastischen Modellprozessen erfolgen. Dann erfordert die Analyse folgende Teilschritte:

1. Synthese eines stochastischen Modellprozesses,
2. Optimale Anpassung des Modellprozesses an den zu analysierenden Prozeß, z.B. nach dem MMSE–Verfahren,
3. Verwendung der Parameter des Modellprozesses als Merkmale des zu analysierenden Prozesses.

ARMA (*auto regressive moving average*)–Prozesse sind stochastische Prozesse, die sich auf diese Art besonders gut analysieren lassen. Sie werden zur Texturanalyse verwendet. ARMA–Prozesse lassen sich durch lineare Filterung eines weißen mittelwertfreien Rauschens synthetisieren. Dabei gilt:

1. MA(moving average)–Prozeß ist durch ein FIR–Filter synthetisierbar.
2. AR(auto regressive)–Prozeß ist durch ein IIR–Filter synthetisierbar.

(a) **Moving Average-Prozeß der Ordnung q** (diskret)

$$x_m = \sum_{k=0}^q a_k w_{m-k} \quad , m \in \mathbb{N}$$

wobei w_m ein stationärer weißer Zufallsprozeß (konstantes Leistungsspektrum, unkorreliert) mit Mittelwert Null ist.

Ann: $a_0 = 1, a_q \neq 0$

Mittelwert: $m_X = \mathbb{E} \{x_m\} = \sum_{k=0}^q a_k \mathbb{E} \{w_{m-k}\} = 0$

Varianz: $\sigma_X^2 = \mathbb{E} \{(x_m - m_X)^2\}$

$$= \sum_{k=0}^q \sum_{l=0}^q a_k a_l \mathbb{E} \{w_{m-k} w_{m-l}\}$$

$$= \sum_{k=0}^q \sum_{l=0}^q a_k a_l \sigma_w^2 \delta_{l-k}$$

$$= \sigma_w^2 \sum_{k=0}^q a_k^2$$

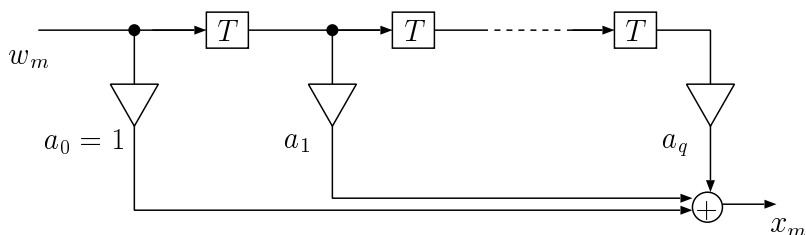
AKF: $k_X(\tau) = \mathbb{E} \{x_m x_{m+\tau}\}$

$$= \sum_{k=0}^q \sum_{l=0}^q a_k a_l \mathbb{E} \{w_{m-k} w_{m-l+\tau}\}$$

$$= \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-|\tau|} a_k a_{k+|\tau|} & |\tau| \leq q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

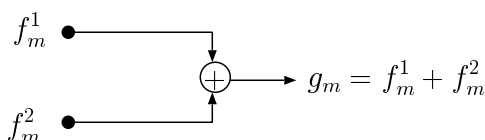
σ_w^2 ist die Varianz des weißen Rauschens.

Flußbild des synthetisierten MA-Prozesses:

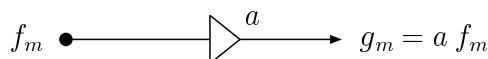


Hierbei bedeuten folgende Symbole die elementaren Operationen eines LSI-Systems:

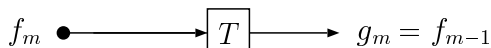
1. Addition



2. Konstanten-Multiplikation



3. Verzögerung (Verschiebung) um eine Position



(Operator der Rechtsverschiebung τ)

Beim MA-Prozeß reicht die Korrelation der Signalwerte nur soweit, wie das synthetisierende Filter. Damit ist die Klasse der beschreibbaren Texturen sehr eingeschränkt.

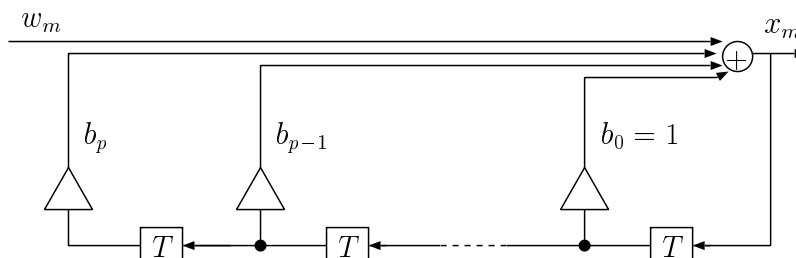
(b) Autoregressiver Prozeß der Ordnung p (diskret)

$$x_m = \sum_{k=1}^p b_k x_{m-k} + w_m, \quad m \in \mathbb{N}$$

Synthese durch rekursives (IIR-) Filter der Ordnung p , das durch weißes Rauschen angeregt wird.

Frequenzübertragungsfkt:
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^p b_k e^{-j\omega k}}$$

Flußbild des synthetisierten AR-Prozesses:



Erinnerung an das Beispiel des deterministischen rekursiven Systems 1. Ordnung:

$$g_m = f_m + b g_{m-1}$$

AR-Prozeß 1. Ordnung:

$$x_m = b x_{m-1} + w_m$$

Umschreiben der Rekursion:

$$x_m = \sum_{k=0}^{\infty} b^k w_{m-k}$$

wobei $|b| < 1$ für die Konvergenz gefordert wird und b^k hier Impulsantwort-Koeffizient ist.

Obige Gleichung zeigt, daß zur Modellierung eines AR-Prozesses 1. Ordnung ein MA-Prozeß der Ordnung Unendlich notwendig ist. Es ist also möglich, weitreichende (d.h. langsam abfallende) Korrelationen durch einen AR-Prozeß mit nur wenigen Parametern zu modellieren.

Anfangsbedingung: $x_0 = w_0 \sim \text{Deltaimpuls}$

Mittelwert: $m_X = E\{x_m\} = 0$

Varianz:
$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E\{(x_m - m_X)^2\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b^k b^l E\{w_{m-k} w_{m-l}\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b^k b^l \sigma_w^2 \delta_{l-k} \\ &= \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{\infty} b^{2k} = \sigma_w^2 \frac{1}{1-b^2} \end{aligned}$$

AKF:
$$\begin{aligned} k_X(\tau) &= E\{x_m x_{m+\tau}\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b^k b^l E\{w_{m-k} w_{m-l+\tau}\} \\ &= \sigma_w^2 b^{|\tau|} \sum_{k=0}^{\infty} b^{2k} = \sigma_w^2 \frac{b^{|\tau|}}{1-b^2} \end{aligned}$$

(c) **ARMA-Prozeß der Ordnung** (q, p) :

$$x_m = \sum_{k=1}^p b_k x_{m-k} + \sum_{l=0}^q a_l w_{m-l}$$

mit willkürlicher Normierung: $a_0 = 1, a_q \neq 0, b_p \neq 0$.

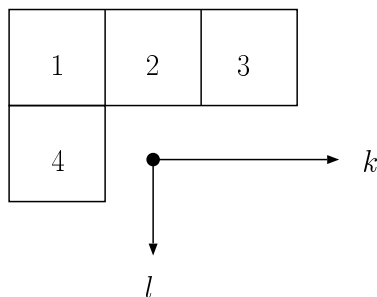
(d) **Segmentierung und Analyse von Textur mittels AR-Prozeß:**

Annahmen:

- i. f sei Realisierung eines schwach stationären AR-Prozesses. Das Modell des Prozesses sei mit \hat{f} bezeichnet.
- ii. Um Kausalität der rekursiven Schätzung sicher zu stellen, sei der Einzugsbereich \mathcal{U} eine NSHP (non symmetrical half plane)-Nachbarschaft:

$$\mathcal{U} = \{(k, l) \mid (-L_z \leq l < 0 \wedge -K_z \leq k \leq K_z) \vee (l = 0 \wedge -K_z \leq k < 0)\}$$

für $L_z = K_z = 1$:



iii. **Prozeßmodell:**

$$\hat{f}_{m,n} = \sum_{(k,l) \in \mathcal{U}} b_{k,l} \hat{f}_{m-k,n-l} + w_{m,n}$$

Es besteht die Aufgabe der Schätzung der Parameter dieses Modelles nach dem MMSE-Optimalkriterium. Der unbekannte Parametervektor ist $b = (b_{k,l})^T$ und die Zufallsgröße w wird zur Fehlergröße r der Schätzung.

Aufgabe: Bestimme den Parameter b so, daß

$$E \{r_{m,n}^2\} = E \left\{ (f_{m,n} - b^T \bar{f}_{m,n})^2 \right\}$$

minimal wird. Sei

$$\bar{f}_{m,n} = [f_{i,j} \mid (i,j) \in \mathcal{U}_{m,n}]^T$$

nicht etwa der lokale Mittelwert aller Grauwerte der Umgebung \mathcal{U} , sondern der Spaltenvektor dieser Grauwerte.

Das heißt, die Erwartungswerte werden aus der Realisierung der Umgebung des Aufpunktes geschätzt. Da $E\{\hat{f}\} = 0$ ist, muß von allen gemessenen Grauwerten der Mittelwert subtrahiert werden:

$$\begin{aligned} m_f &= E\{f\} && \text{stationärer Mittelwert} \\ m_{\bar{f}} &= [m_f, \dots, m_f]^T && \text{für Umgebung } \mathcal{U} \end{aligned}$$

Es werden folgende neue Größen eingeführt,

$$\text{der Skalar } g_{m,n} = f_{m,n} - m_f,$$

$$\text{der Vektor } \bar{g}_{m,n} = \bar{f}_{m,n} - m_{\bar{f}}.$$

Damit folgt für den Erwartungswert des mittleren quadratischen Fehlers

$$\begin{aligned} E\{r_{m,n}^2\} &= E\{(g_{m,n} - b^T \bar{g}_{m,n})^2\} \\ &= E\{(g_{m,n})^2 - 2b^T g_{m,n} \bar{g}_{m,n} + (b^T \bar{g}_{m,n})^2\} \\ &= E\{(g_{m,n})^2\} - 2E\{b^T g_{m,n} \bar{g}_{m,n}\} + E\{(b^T \bar{g}_{m,n})^2\}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial b^T} E\{r_{m,n}^2\} = 2E\{b^T \bar{g}_{m,n}^2\} - 2E\{g_{m,n} \bar{g}_{m,n}\} \stackrel{!}{=} 0$$

Daraus folgt durch Einsetzen

$$E\{(\bar{f}_{m,n} - m_{\bar{f}})(\bar{f}_{m,n} - m_{\bar{f}})\} b^T = E\{(f_{m,n} - m_f)(\bar{f}_{m,n} - m_{\bar{f}})\}$$

Das entspricht der *Wiener-Lösung*

$$(C_{\bar{f}})_{m,n} b^T = (c_{\bar{f}})_{m,n}$$

mit $C_{\bar{f}}$ als Autokovarianzmatrix der Umgebung, $c_{\bar{f}}$ ist die Kreuzkovarianzvektor von Aufpunkt und Umgebung. Die Lösung des Schätzungsproblems:

$$b^T = (C_{\bar{f}}^{-1})_{m,n} (c_{\bar{f}})_{m,n}$$

existiert falls C^{-1} existiert.

Beispiel:

g_1	g_2	g_3
g_4	g_0	

Die Normalgleichungen:

$$\begin{bmatrix} g_1 g_1 & g_1 g_2 & g_1 g_3 & g_1 g_4 \\ g_2 g_1 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_4 g_1 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & g_4 g_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 g_1 \\ g_0 g_2 \\ g_0 g_3 \\ g_0 g_4 \end{bmatrix}$$

In diesem Ansatz werden die bezüglich des Mittelwertes korrigierten Grauwerte g_i selbst verwendet anstelle der Erwartungswerte über diesen.

Seien $C_{\bar{f}} = [c_{ij}]$ und $c_{\bar{f}} = [c_i]$. Wegen der Symmetrie des Bildmodelles müssen nicht alle 20 Werte pro Bildpunkt berechnet werden. Vielmehr genügen folgende sieben Werte:

- i. $c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{44}$
- ii. $c_{12} = c_{21} = c_{32} = c_{23} = c_4$
- iii. $c_{13} = c_{31}$
- iv. $c_{14} = c_{41} = c_2$
- v. $c_{24} = c_{42} = c_3$
- vi. $c_{34} = c_{43}$
- vii. c_1

Die Umgebung \mathcal{U} stellt die minimale Region dar, in der die Erwartungswerte geschätzt werden können. Bessere Ergebnisse erhält man für Schätzungen in Regionen $R \supset \mathcal{U}$, so daß \mathcal{U} immer in der Region liegt. Dann modifiziert sich das Problem so, daß bei Einhalten des AR-Modells gilt

$$c_{ij} = \frac{1}{|R|} \sum_{(i,j) \in R} g_i g_j$$

und

$$c_i = \sum_{(0,i) \in R} g_0 g_i.$$

■

4.6.3 Zustandsgleichungen deterministischer Systeme

- Differenzgleichungen beschreiben implizit ein Systemverhalten dadurch, daß sie Input-Output-Relationen beschreiben. Dabei kann der momentane Output vom vorherigen Output abhängen. Die entspricht einem *rückgekoppeltem System (IIR-Anteil)*. Das heißt, der Input eines rückgekoppelten Systems kann durch frühere Outputs des Systems selbst gebildet werden.

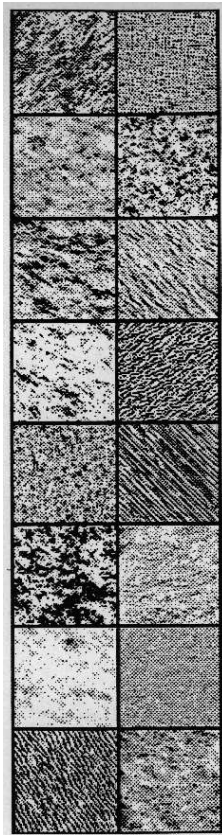


Abbildung 4.18: mit AR-Modellen erzeugte Texturen.

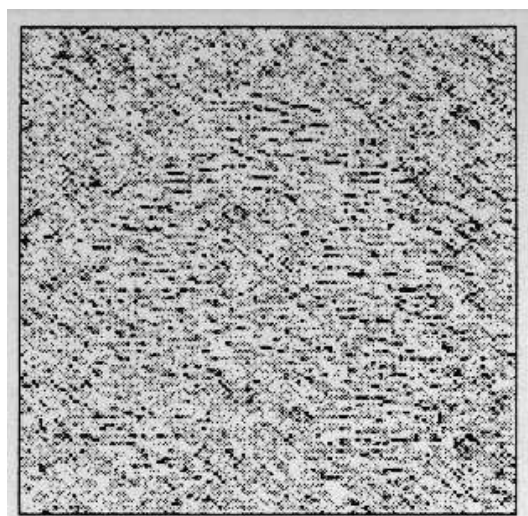


Abbildung 4.19: Zwei Texturen. Eine hiervon stellt den Buchstaben A dar.

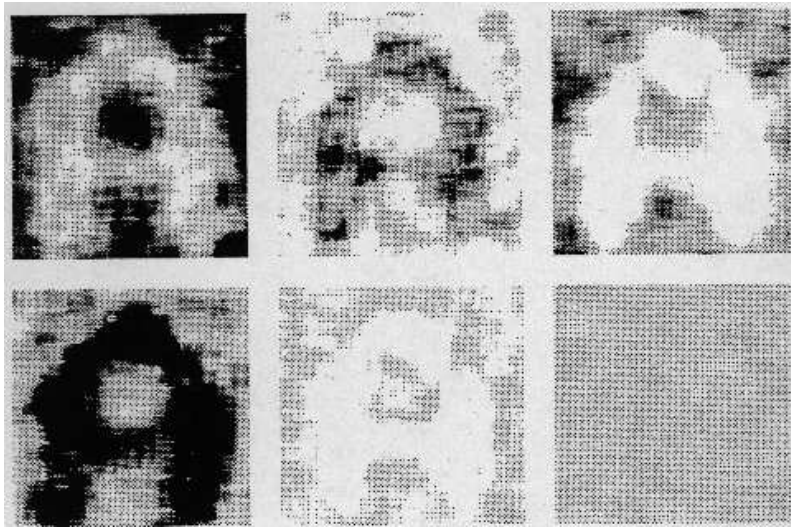


Abbildung 4.20: Bilder der Koeffizienten des AR-Modelles von Abb. 4.19. oben: links - c_{01} , mitte - c_{02} , rechts - c_{03} ; unten: links - c_{04} , mitte - $\sqrt{\text{VAR}\{f\}}$, rechts - $E\{f\}$.

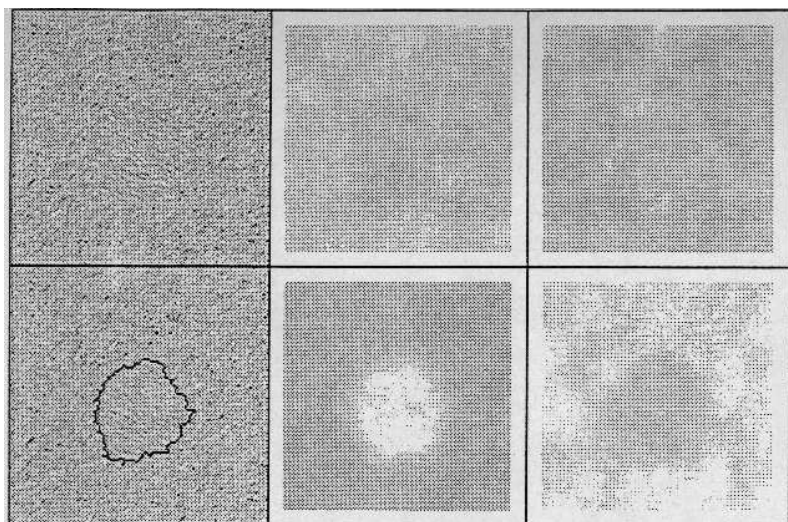


Abbildung 4.21: Textursegmentierung: links - Textur mit Regionengrenze; mitte und rechts - Texturmerkmale des AR-Modelles.

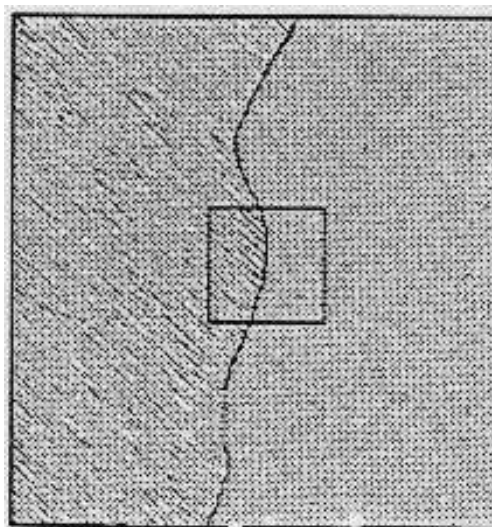
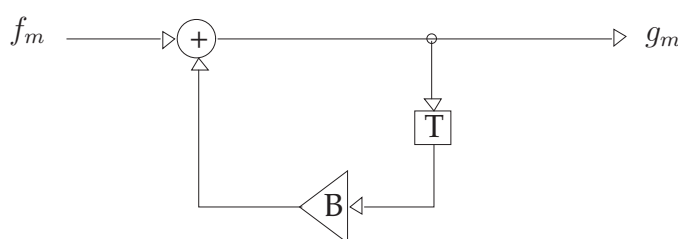


Abbildung 4.22: Textursegmentierung: Einfluß der Schätzregion.

- Im Extremfall ist denkbar, daß ein System gestaltet wird mit einem "extremen" Input f_0 und danach eine Dynamik entwickelt, die nur noch von den Werten g_{m-1}, g_{m-2}, \dots abhängt.
- Differenzgleichungen als diskrete Analoga zu Differentialgleichungen beschreiben das Verhalten eines *dynamischen Systems* (d.h. in Abhängigkeit von der Zeit oder vom Ort).
- Rückgekoppelte Systeme sind berechenbar, wenn ihre Rückkopplungsschleifen *Verzögerungsglieder* enthalten.



Ein dynamisches System greift zum Takt m auf Ergebnisse der Takte $m-1, m-2, \dots, m-n$ zurück. Die Anzahl n der Verzögerungsglieder gibt die Ordnung der Differenzgleichungen an.

- Durch Einführen von Hilfsoperatoren, den *Systemzuständen*, kann eine Differenzgleichung der Ordnung n auf ein System von n Differenzgleichungen der Ordnung 1 abgebildet werden. Es genügen genau n Zustandsvariablen (für jedes Verzögerungsglied eine), um die Dynamik einer Differenzgleichung n -ter Ordnung zu beschreiben.
- Zu einem Takt m beschreiben die n Zustandsvariablen den Zustand des Systems vollständig in dem Sinne, daß für jede zulässige Eingangsgröße $f_k, k \geq m$, die Systemantwort g_k ermittelt werden kann.

- Die das dynamische System beschreibende Zustandsgleichung

$$u_{m+1} = Au_m + Bf_m$$

sagt aus, daß der Folgewert des Systemzustands aus dem aktuellen Zustand u_m und dem aktuellen Eingangsvektor f_m hervorgeht. Hierbei sind

- $u_m = [u_{1,m}; u_{2,m}; \dots; u_{m,n}]^T$ der Zustandsvektor
 - $f_m = [f_{m-0}; f_{m-1}; \dots, f_{m-k+1}]^T$ der Inputvektor.
 - A ist eine quadratische Übergangsmatrix und
 - B ist eine Matrix mit $k \ll n$.
- Oft ist man aber nicht an der Kenntnis des Systems selbst interessiert, sondern an der Beobachtung einer Wirkung, das heißt an dem Output zum Takt m . Die Beobachtungsgleichung lautet:

$$g_m = Cu_m + Df_m$$

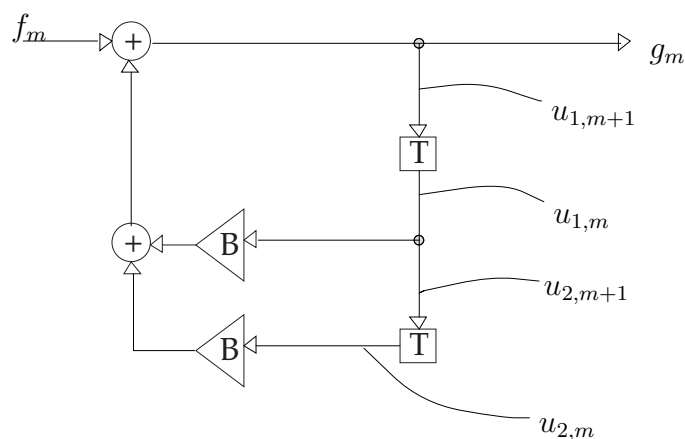
wobei

- $g_m = [g_{m-0}; g_{m-1}; \dots; g_{m-l+1}]$ für ein System mit l Outputs.
 - C ist eine $m \times n$ -Matrix
 - D ist eine $m \times 1$ -Matrix. Der Output ist direkt vom Input abhängig, ohne Vermittlung über Zustände.
Oft wird $D = 0$ angenommen, was die sonst komplizierte Theorie vereinfacht.
- *Zeit- und Ortsvarianz* des Systems: A, B, C, D hängen nicht vom Takt m ab. Andernfalls wäre mit A_m, B_m, C_m, D_m das System *adaptiv*.

Beispiel: Rekursives System zweiter Ordnung

$$g_m = b_1 g_{m-1} + g_2 g_{m-2} + f_m$$

Blockdiagramm:



- Zustandsvariable sind Ausgangsgrößen der Verzögerungselemente
- Zustandsvariable für nächsten Takt $m + 1$ sind Eingangsgrößen der Verzögerungselemente.

$$\begin{aligned} u_{1,m} &= g_{m-1} \\ u_{2,m} &= g_{m-2} = u_{1,m-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{1,m+1} &= b_1 u_{1,m} + b_2 u_{2,m} + f_m \\ u_{2,m+1} &= u_{1,m} \end{aligned}$$

Herleitung der Beobachtungsvariablen:

(a) direkt aus der Gleichung:

$$g_m = b_1 u_{1,m} + b_2 u_{2,m} + f_m$$

(b) aus dem Blockdiagramm:

$$g_m = u_{1,m+1} = g_m = b_1 u_{1,m} + b_2 u_{2,m} + f_m$$

damit:

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_m + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f_m \\ g_m &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} u_m + f_m \end{aligned}$$

■

4.6.4 Zustandsgleichungen stochastischer dynamischer Systeme – Kalmanfilter

Annahmen:

- Es ex. ein *stochastisches dynamisches Signal*, d.h. ein Signal, das sich ändert (Bildfolge, Kontur).
- Das Signal wird nach dem Prinzip des *Multiple Input* von einem Filter *beobachtet*, um analogisiert zu werden (Objekt-, Konturverfolgung).
- Das Filter sei so konstruiert, daß es Schätzungen des Signals berechnet und die Abweichungen zwischen Signal und Schätzung minimiert (siehe auch AR-Prozeß), d.h. das Filter synthetisiert den stochastischen Prozeß des Signals. Damit wird das Signal selbst zu einem dynamischen System, dessen Parameter zu schätzen sind.
- Die Parameter dieses System sind seine Zustände ($\hat{=}$ "wahre" Signalwerte).
- Der aktuelle Zustand wird aus dem vorherigen geschätzt, indem die ermittelten stochastischen Eigenschaften des Signals ständig aktualisiert werden.
- Das Filter sei linear.

Dieses Filter nennt man Kalmanfilter.

(a) **Beschreibung des linearen dynamischen Systems:**

Die Signale werden mit Hilfe eines Zustandsraumes beschrieben.

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= B_m u_m + q_m && \text{Zustandsgleichung} \\ g_m &= H_m u_m + n_m && \text{Beobachtungsgleichung} \end{aligned}$$

Es erfolgt eine Beobachtung ohne Regelung (z.B. Bildfolgenanalyse).

$u_m + 1$ ist der Signalzustand, der im Verarbeitungstakt $m + 1$ geschätzt werden soll.

B_m ist die Übergangsmatrix der Zustände.

q_m $N(0, Q)$ normalverteiltes unkorreliertes Rauschen (*Systemrauschen*) mit $m_q = 0$ und $\sigma_q^2 = Q$.

g_m das durch den Sensor gemessene Signal (die Beobachtung).

H_m Matrix der deterministischen Einflüsse des Meßprozesses (Meßmatrix) (bekannt angenommen).

n_m $N(0, R)$ normalverteiltes unkorreliertes Rauschen des Meßprozesses (*Meßrauschen*) mit $m_n = 0$ und $\sigma_n^2 = R$. Es ist auch zum Signalrauschen unkorreliert, d.h. $\text{COV}[q_{m_1}, n_{m_2}] = 0$.

Aufgabe:

Schätzung der Zustandsvektoren u_{m+1} aus dem Inputvektor g_m bei Kenntnis der Meßmatrix H_m und der Übergangsmatrix B_m sowie der stochastischen Modelle q_m und n_m .

(b) Kalmanfilterung:

In jedem Taktschritt m erzeugt das Kalmanfilter eine optimale Schätzung \hat{u}_m in den Schritten

2.1 Prädiktion

2.2 Korrektur

Gegenseitige Schätzung des Zustandvektors ist durch *bedingte Erwartung* gegeben:

$$\hat{u}_m = E \{ u_m | g_1, \dots, g_m \}$$

Die Qualität dieser Schätzung wird durch die *Fehlerkovarianzmatrix*

$$P_m = E \{ (u_m - \hat{u}_m)(u_m - \hat{u}_m)^T | g_1, \dots, g_m \}$$

gegeben.

Gegeben seien der Anfangszustand u_0 und seine Fehlerkovarianz P_0 .

2.1 Prädiktion:

$$\begin{aligned} \hat{u}_m^- &= B_{m-1} \hat{u}_{m-1}^+ \\ P_m^- &= B_{m-1} P_{m-1}^+ B_{m-1}^T + Q_{m-1} \end{aligned}$$

Minus-Zeichen: extrapoliert

PlusZeichen: korrigiert

2.2 Korrektur:

$$\begin{aligned} K_m &= P_m^- H_m^T (H_m P_m^- H_m^T + R_m)^{-1} \\ P_m^+ &= (I - K_m H_m) P_m^- \\ r_m &= g_m - H_m B_{m-1} \hat{u}_{m-1}^+ = g_m - H_m \hat{u}_m^- \\ \hat{u}_m^+ &= \hat{u}_m^- + K_m r_m \end{aligned}$$

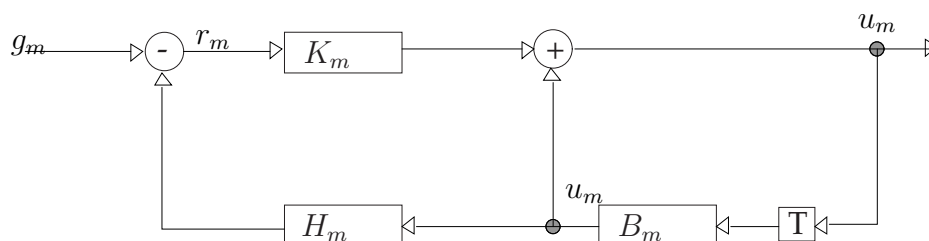
K_m wird so gewählt, daß der statistische Fehler der Schätzung minimal wird (MMSE).

Mit dem Kalmanfilter wird zu jedem Takt nicht nur ein einzelner Wert eines diskreten Zufallprozesses bestimmt, sondern der Zustandsvektor eines linearen Systems geschätzt, das als Modell für die Erzeugung des zu schätzenden Zufallsprozesses aus weißem Rauschen angesehen werden kann. Diese Nachbildung wird angeregt durch die nicht vorhersagbaren (zufälligen) Anteile der Meßwerte, die mit der *Kalmanverstärkung* gewichtet werden.

$$(K_m \cdot r_m)$$

Die Kalmanverstärkung hängt nicht von den Meßwerten selbst ab, sondern von den stochastischen Eigenschaften der das Prozeßmodell anregenden Größen.

Auch beim AR-Modell dient der Input durch weißes Rauschen dazu, den Syntheseprozess aktiv zu halten. Würde nur ein einziger Deltaimpuls als Input anliegen, würde der AR-Prozeß sehr schnell abklingen.



Weicht man vom *homogenen schwach stationären Modell* ab und benutzt ein *lokal schwach stationäres Modell*, kann ein adaptives Kalmanfilter realisiert werden. Das erfordert zusätzlich:

- (a) eine lokale Schätzung von H_m
- (b) eine lokale Schätzung von Q_m und R_m .

Kapitel 5

Topologische Grundlagen

5.1 Einführung

5.1.1 Übersicht und allgemeine Annahmen

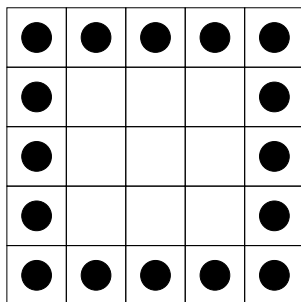
In diesem Kapitel werden wir topologische Eigenschaften von *Objekten und Trägern* untersuchen und Verfahren kennenlernen, die auf dieser Grundlage Aussagen über die Objekte abzuleiten gestatten. Es interessiert hier nicht der Signalwert, den ein Bildpunkt trägt. Vielmehr interessieren gewisse Eigenschaften im Kontext seiner Umgebung, die ihn als Objekt auszeichnen und dazu beitragen, für das Objekt gültige globale oder lokale Charakterisierungen zu berechnen.

Die Signaltheorie beruht auf einer Metrik (Euklidische Metrik) von Vektoren im Signalraum.

Topologische Untersuchungen finden in einem *topologischen Raum* statt, in dem *keine Metrik* gilt. Vielmehr werden *Nachbarschaftsrelationen* von Interesse sein. Die Frage ist, ob es für solche sparsame Ausgangsbasis überhaupt interessante Problemstellungen gibt und welche diese eventuell sind.

Wir werden die Topologie von zwei Ansätzen ausgehend betrachten : eine *mengentheoretische Topologie* (Kapitel 5) und eine *kombinatorische Topologie* (Kapitel 6). In Kapitel 7 werden wir sehen, daß die topologischen Verfahren eine Metrik in der Bildebene induzieren.

Beispiel: Kreis von Radius 2 in der Tschebyscheff-Metrik (Schachbrett-Metrik).



In diesem Kapitel werden *Algorithmen im Vordergrund* stehen, weil in Formeln zusammengefaßte Lösungen auf (linearen) Konzepten metrischer Räume beruhen und hier nicht anwendbar sind.

Folgende *Annahmen* werden gemacht.

- (a) Das Bild sei segmentiert. Sei F die Menge der Bildpunkte des Trägers, O die Objektmenge, B die Untergrundmenge. Es gelte

$$F = O \cup B.$$

- (b) Sowohl Objektmenge als auch Untergrundmenge werden durch Regionen repräsentiert, R_j^O bzw. R_j^B , d.h. Mengen von Bildpunkten, die als zusammengehörend betrachtet werden.

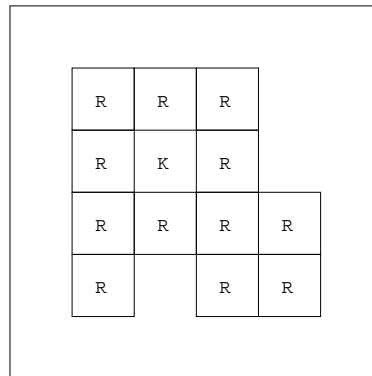
$$O = \bigcup_j R_j^O$$

$$B = \bigcup_j R_j^B$$

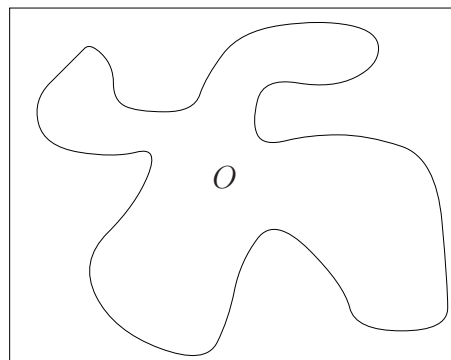
Die Objektmenge kann zusammenhängend sein, muß aber nicht. Für die Untergrundmenge gilt das Gleiche.

- (c) Da nur die Regionen von Interesse sind, wird das Modell eines *Binärbildes* angenommen. Für $(m, n) \in R_j^O$ gelte $f_{mn} = 1$ oder $f_{mn} = j$; für $(m, n) \in R_j^B$ gelte $f_{mn} = 0$. Diese Markierung des Signalträgers kann in einem eigenem Speicherbereich, dem *Markierungsspeicher* erfolgen (*Markierungsbild*).
- (d) Objekte auf einem N -dimensionalen Träger besitzen eine ausgezeichnete $(N - 1)$ -dimensionale Hyperfläche, den *Rand* (R). Alle nicht zum Rand gehörenden Objektpunkte sind dem *Kern* (K) zuzuordnen. Also gilt

$$O = K \cup R.$$



- ▶ Die Kernmenge K ist relativ uninteressant. Die Randmenge R gestattet hingegen Aussagen zur Gestalt und der Fläche der Objekte zu machen.
 - ▶ Die Randmenge eines Objektes ist immer *topologisch geschlossen*, sie ist endlich aber unbegrenzt. Sie legt „innen“ und „außen“ fest.
- (e) Soll ein Objekt (einschließlich der Randmenge) markiert werden, so betrifft das nur die Punkte, die bezüglich der Randmenge „innen“ liegen. Wir werden Verfahren kennenlernen, diese Unterscheidung zu treffen. Damit können auch beliebig konkave Objekte markiert werden.

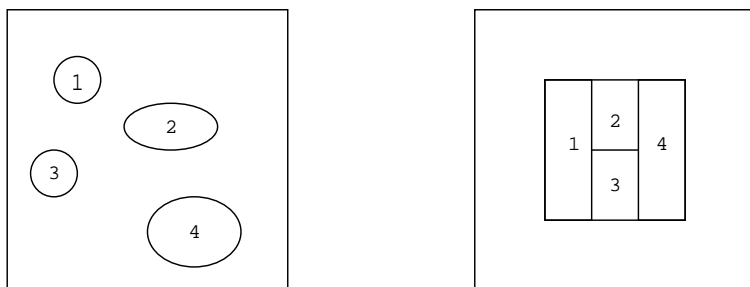


Interessante Probleme entstehen daraus, daß die Randmenge auf diskreten Trägern nicht „dünn“ ist, wie im Euklidischen Raum \mathbb{R}^n angenommen.

5.1.2 Interessante Probleme

Hier sollen beispielhaft Probleme vorgestellt werden, die ihre Ursache in den topologischen Eigenschaften des Trägers und den auf ihm erklärten Mengen haben.

- *Vierfarbenproblem:*
Die Markierung von N Objekten, z.B. mit den Indizes, ist völlig unproblematisch, ob diese Objekte benachbart sind oder auch nicht.



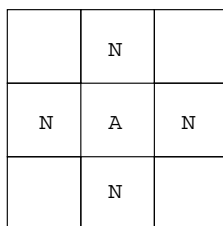
Stellt man sich aber die Aufgabe, die Untersuchung von N benachbarten Objekten mit einer *minimalen Anzahl von Marken* zu markieren (z.B. Einfärbung einer Landkarte), so entsteht ein *bis heute allgemein nicht beweisbares Problem*. Das Vierfarbenproblem stellt die Vermutung auf, daß zur Einfärbung von N benachbarten Objekten auf einem planaren Träger vier Farben ausreichend sind. Die Richtigkeit dieser Vermutung wurde 1976 mittels enormen Computeraufwandes nachgewiesen.

• *Vordergrund-Hintergrund-Problem:*

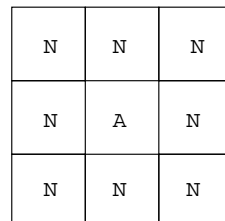
Es sei daran erinnert, daß die Nachbarschaft eines Bildpunktes nicht eindeutig definiert ist.

– Vierecksgitter:

4-Nachbarschaft \mathcal{N}_4 :



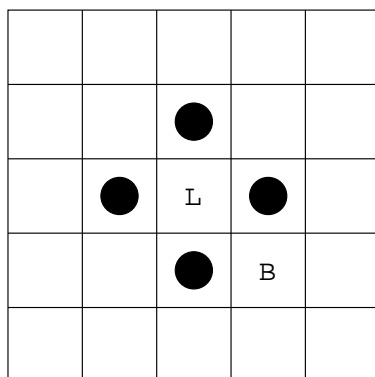
8-Nachbarschaft \mathcal{N}_8 :



– Sechseckgitter:

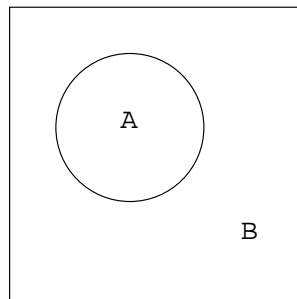
6-Nachbarschaft \mathcal{N}_6

Betrachte den „Kreis“:



- a) Annahme : \mathcal{N}_4
 Die Objektpunkte hängen nicht zusammen. Es existieren vier Objekte, jeweils aus einem Punkt bestehend.
 Die Untergrundmenge hängt auch nicht zusammen. Sie zerfällt in die Teilmengen Loch (L), bestehend aus einem Punkt, und Umgebung (B).
- b) Annahme : \mathcal{N}_8
 Es existiert ein Objekt (Kreis) und eine Untergrundregion ($L \cup B$).
 Also hat der Kreis kein „Inneres“.

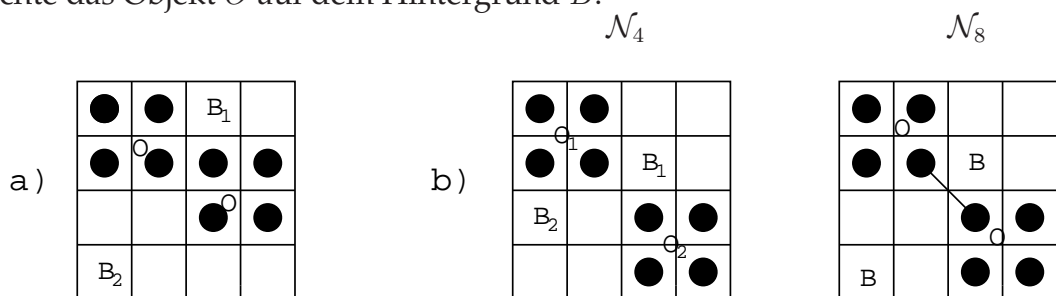
- *Kurvensatz-Problem:*
 Widerspruch zum *Jordanschen Kurvensatz:*
 Eine geschlossene Kurve in der Euklidischen Ebene teilt diese in zwei disjunkte Mengen.



Wir lernen Lösungen dieses Problems kennen:

- Orientierte Nachbarschaftsstrukturen (\rightarrow Separationstheorem / Trennungssatz) unter der Annahme \mathcal{N}_4
- Zellenkomplexe
 Rand ist „dünn“ (1D), Eckpunkte / Punkte sind „dünn“ (0D).

- *Zusammenhangs-Problem :*
 Betrachte das Objekt O auf dem Hintergrund B :



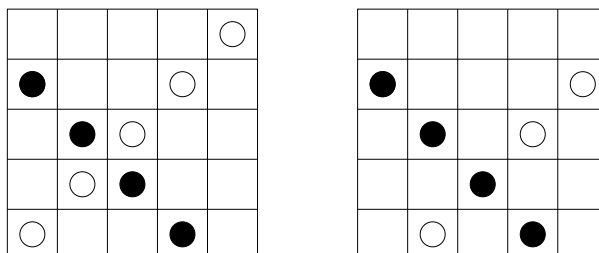
Im Fall a) entstehen weder Probleme für \mathcal{N}_4 noch für \mathcal{N}_8 . Die Hintergrundregion zerfällt in zwei Teilmengen.

Im Fall b) treten Probleme des Zusammenhangs auf

- bei 4-Nachbarschaft: O und B nicht zusammenhängend (B_1, B_2, O_1, O_2)
- bei 8-Nachbarschaft: O und B zusammenhängend

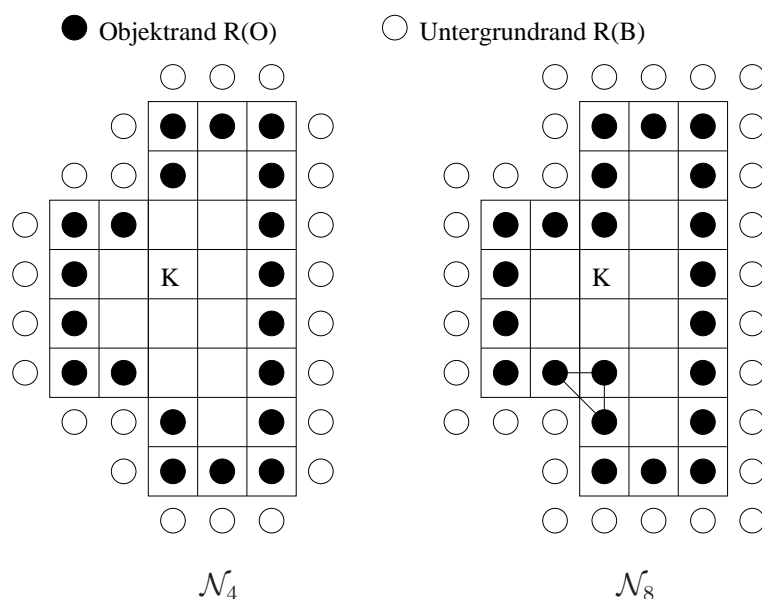
Da *Digitalisierungsvorgänge*, ohne dies als Fehler zu bezeichnen zu können, in beide Varianten abbilden können, entstehen in der Praxis hieraus ernsthafte Probleme. Hiermit verbunden ist auch das folgende Problem.

- *Schnittpunkt-Problem:*
Betrachte die zwei „Geraden“:



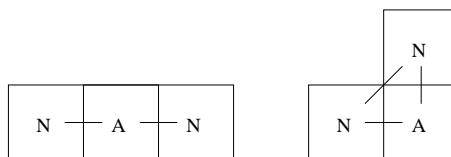
Zwei digitale Geraden unterschiedlicher Steigung haben nicht notwendigerweise einen Schnittpunkt.

- *Randdicke-Problem:*
Sowohl das Objekt als auch der Untergrund haben einen Rand. Ein Punkt des Objektes/Untergrundes ist dann ein Randpunkt, wenn er wenigstens einen Nachbarn in der Komplementärmenge hat.



Es treten folgende Probleme auf:

- Objekttrand und Untergrundtrand sind verschieden ($R(O) \neq R(B)$).
- Ränder sind dick (Fläche > 0)
- 4-Rand : nicht 4-zusammenhängend
- 8-Rand : mehrfach 8-zusammenhängend
(Ein Bildpunkt hat mehr als zwei Nachbarn)



Wir lernen Lösungen dieser Probleme kennen:

- Zellenkomplexe: Der Rand ist eine mathematische Abstraktion. Er gehört gleichermaßen zu O und B .
- orientierte Nachbarschaftsstrukturen: mengentheoretische Aussagen gestatten, den Rand (R) einer Menge (gehört zur Menge) und die Nachbarschaft (N) einer Menge (gehört zur Komplementärmenge) zu unterscheiden.

$$\begin{aligned}
 F &= O \cup B \\
 O &= R(O) \cup K(O) \\
 B &= R(B) \cup K(B) \\
 N(O) &= R(B), N(B) = R(O).
 \end{aligned}$$

5.2 Nachbarschaftsstrukturen

In den folgenden Abschnitten werden Abstraktionen von Bildern, Objekten, Signalträgern u.s.w. eingeführt, die aus der *mengentheoretischen Topologie* stammen. Die Beschreibungen erfolgen mit *graphentheoretischen Mitteln*.

Zunächst werden ganz schwache Annahmen gemacht, die schrittweise erweitert und verfeinert werden. Wir werden verfolgen, wie dies dazu führt, auch die Aussagen über die interessierenden Strukturen zu erweitern.

5.2.1 Einführung

Definition (Nachbarschaftsstruktur):

- $[P, N]$ Nachbarschaftsstruktur \Leftrightarrow
 - P endliche Menge \wedge
 - $N \subset P \times P$ irreflexive und symmetrische Relation
- P heißt *Punktmenge*
- N heißt *Nachbarschaftsrelation*

Dabei bedeuten



irreflexiv : $(p, p) \notin N \quad \forall p \in P$

symmetrisch : $(p, q) \in N \Leftrightarrow (q, p) \in N$

Wie in der Graphentheorie beschäftigen wir uns nur mit endlichen Nachbarschaftsstrukturen.

Eine Nachbarschaftsstruktur ist ein ungerichteter Graph bzw. kann in einen ungerichteten Graphen transformiert werden, den sog. Nachbarschaftsgraphen.

Definition (Nachbarschaftsgraph):

$\Gamma = [P', N']$ heißt *Nachbarschaftsgraph zur Nachbarschaftsstruktur* $[P, N] \Leftrightarrow$

$$P' = P \quad \text{und} \quad N' = \{\{p, q\} \mid (p, q) \in N \wedge (q, p) \in N\}$$

■

Definition (gerichtete / ungerichtete Kante):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS.

- geordnetes Paar $(p, q) \in N$ heißt *gerichtete Kante* von $\Gamma \Leftrightarrow (p, q) \in N$
- Teilmenge $\{p, q\} \subset P$ heißt (*ungerichtete*) *Kante* von $\Gamma \Leftrightarrow (p, q) \in N$ und $(q, p) \in N$

■

Definition (Nachbarschaft):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $p \in P$.

- $N(p) := \{q \mid q \in P \wedge (p, q) \in N\}$
heißt *Nachbarschaft des Punktes* p
- Die Punkte $q \in N(p)$ heißen *Nachbarn von* p
- p *isolierter Punkt* $\Leftrightarrow N(p) = \emptyset$

■

Definition (Nachbarschaftsgrad):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $p \in P$.

- $\nu(p) := \text{card}(N(p)) = |N(p)|$

heißt (Nachbarschafts-)Grad des Punktes p

- $\epsilon := \epsilon(\Gamma) := \text{card}(P) = |P|$
ist die Anzahl der Punkte von Γ
- $\kappa := \kappa(\Gamma) := \text{card}(N)/2$
ist die Anzahl der ungerichteten Kanten von Γ
(Division durch 2 wegen Symmetrie von N)

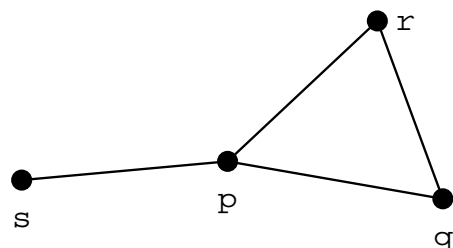
■

Bemerkung:

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS.

- Ein Punkt ist mindestens mit keinem und maximal mit allen anderen Punkten aus P benachbart.
 $\forall p \in P : 0 \leq \nu(p) \leq \epsilon - 1$
- Daraus folgt für die Anzahl von ungerichteten Kanten
 $0 \leq \kappa \leq \frac{\epsilon(\epsilon-1)}{2}$

Beispiel:



$$\begin{aligned} \epsilon &= 4, \quad \kappa = 4 \\ \nu(p) &= 3 \\ \nu(q) &= 2 \\ \nu(s) &= 1 \\ \nu(r) &= 2 \end{aligned}$$

■

Satz (Knotensatz):

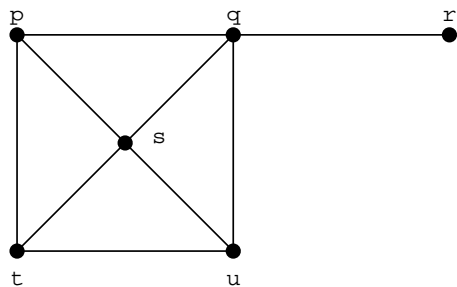
Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS.

Die Summe aller Nachbarschaftsgrade läßt sich durch

$$\sum_{p \in P} \nu(p) = 2\kappa$$

bestimmen.

■

Beispiel:

$$\epsilon = 6 \quad , \quad \kappa = 9$$

$$p, t, u \quad : \quad \nu = 3$$

$$q, s \quad : \quad \nu = 4$$

$$r \quad : \quad \nu = 1$$

$$\sum_{p \in P} \nu(p) = 18$$

Folgerung aus dem Knotensatz:

Satz (Durchschnittlicher Nachbarschaftsgrad):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS, dann ist

$$\bar{\nu}(\Gamma) := \frac{2\kappa}{\epsilon}$$

der durchschnittliche Nachbarschaftsgrad der NS Γ .

Definition (Weg / verbunden / Gebiet):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $M \subset P$.

- (p_1, \dots, p_n) Weg in M \Leftrightarrow

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : p_i \in M \wedge$$

alle p_i sind paarweise verschieden \wedge

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\} : (p_i, p_{i+1}) \in N$$

- p, q verbunden bzgl. M \Leftrightarrow

$$p, q \in P \wedge$$

$$((\exists \text{ Weg } (p = p_1, \dots, q = p_n) \text{ in } M \subset P) \vee$$

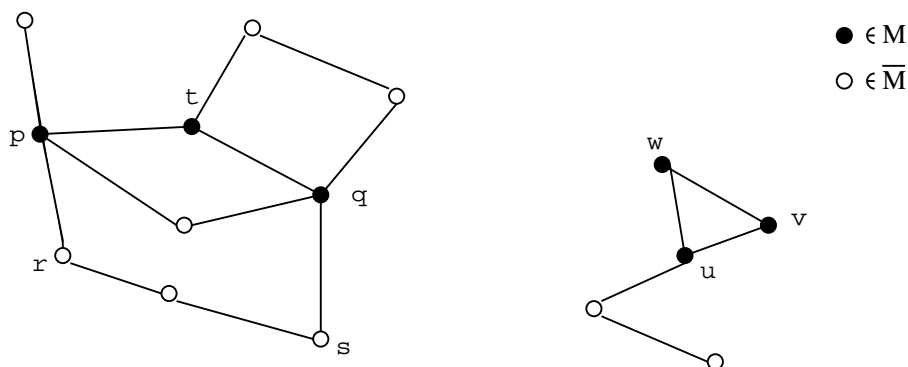
$$(\exists \text{ Weg } (p = s_1, \dots, q = s_m) \text{ in } \overline{M} \subset P))$$

- M zusammenhängend / Gebiet $\Leftrightarrow \forall p, q \in M : p, q$ verbunden bzgl. M

Bemerkung:

Zwei Punkte p, q können also auch dann verbunden bzgl. M sein, wenn sie beide in der Komplementmenge \overline{M} enthalten sind, und sie ein Weg in \overline{M} verbindet.

Beispiel: Es gelte $P = M \cup \overline{M}$



Sowohl p, q als auch r, s sowie u, v sind verbunden. u, v, w sind aber nicht mit p, q, t verbunden, also ist M nicht zusammenhängend (kein Gebiet). ■

Bemerkung:

Die Menge M definiert eindeutig eine Referenz (durch sie wird die Komplementmenge \overline{M} definiert).

5.2.2 Komponenten und Graphsuche

Definition (Verbundenheitsrelation / Komponente):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $M \subset P$.

- $(p, q) \in V_M \Leftrightarrow p, q$ verbunden bzgl. M
Es existiert ein Weg in M oder \overline{M} .

V_M heißt die *Verbundenheitsrelation* bzgl. M

- $K_M(p) = \{ q \mid q \in P \wedge (p, q) \in V_M \}$
Alle Punkte q , die mit $p \in M$ in Verbundenheitsrelation stehen, bilden eine Komponente von M .
- $K_M(p)$ Komponente von $M \Leftrightarrow K_M(p) \subset M$
- $K_{\overline{M}}(p)$ Komplementärkomponente von $M \Leftrightarrow K_{\overline{M}}(p) \subset \overline{M}$

Bemerkung: ■

Jede Menge, die durch K_M gebildet wird, ist stets entweder eine Komponente oder eine Komplementärkomponente von M .

Eigenschaften und Zusammenhänge von V_M und K_M :

Satz (Äquivalenzklassen):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $M \subset P$.

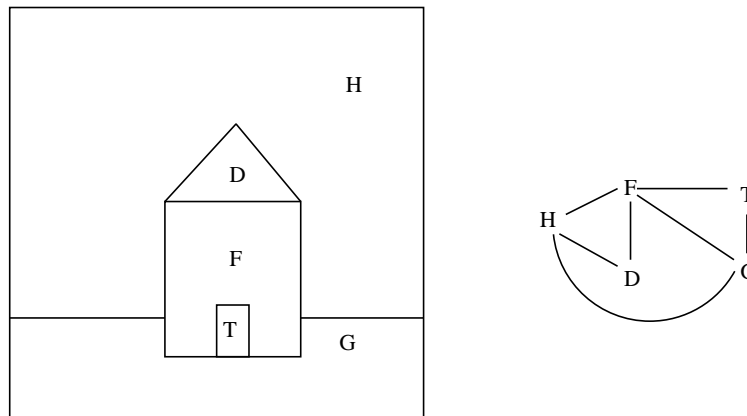
- $V_M \subset ((M \times M) \cup (\overline{M} \times \overline{M})) \subset P \times P$
- V_M ist eine Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch, transitiv)
- Die (Komplementär-)Komponenten $K_M(p)$ bzw. $K_{\overline{M}}(p)$ sind die Äquivalenzklassen von V_M
- Die (Komplementär-)Komponenten $K_M(p)$ bzw. $K_{\overline{M}}(p)$ sind "maximal" zusammenhängend bzgl. M

Bemerkung: ■

Erweiterung der bisher eingeführten Begriffe auf Punktmengen, Mengen-Nachbarschaftsrelationen und Mengen-Nachbarschaftsstrukturen können analog definiert werden.

Definition (Mengen-Nachbarschaftsstruktur):

Seien $\Gamma = [P, N]$ eine Nachbarschaftsstruktur und S eine Menge paarweise disjunkter Untermengen von P , die in einer *Mengen-Nachbarschaftsrelation* N_S zueinander stehen. Dann bezeichnet $[S, N_S]$ eine *Mengen-Nachbarschaftsstruktur*. ■

Beispiel:**Algorithmus zur Graphsuche in Bildern**

- ▶ Ziele:
 - Zählen der Bildpunkte von M
 - Zählen der Komponenten von M
 - Zählen der Bildpunkte der Komponenten von M
 - Einfärben der Komponenten

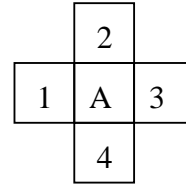
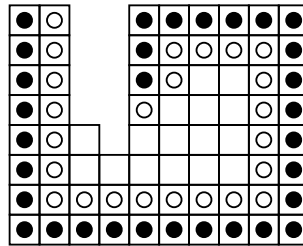
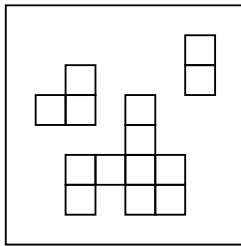
- ▶ Methode:
 - Stack (LIFO)
 - Markierungsspeicher

- ▶ Prozeduren:
 - INIT_STACK Initialisierung einer leeren Liste
 - INIT_MARK Initialisierung eines leeren Markierungsspeichers
 - PUSH(X,Y) Ergänzen der Liste
 - POP(X,Y) Reduzieren der Liste
 - MARKP(X,Y) Markieren eines Punktes mit Komponenten-Nummer

- ▶ Boolesche Funktionen:
 - EMPTY_STACK : TRUE, if empty
 - TEST_POINT(X,Y) : TRUE, if $(f_{x,y} \geq \text{THRESHOLD} \wedge m_{x,y} = 0)$

- ▶ Variablen:
 - CNUMB : Anzahl der Komponenten
 - PNUMB : Anzahl der Bildpunkte der aktuellen Komponente

- MNUMB : Anzahl der Bildpunkte von M



- bereits bearbeitet (Nachbarschaft getestet)
- noch im Stack (aber markiert und gezählt)
- noch zu bearbeiten

Algorithmus:

```

procedure MARK(X,Y);
begin
  PUSH(X,Y);
  PNUMB:=PNUMB+1;
  MARKP(X,Y);
end;

procedure graph_search;
begin
  INIT_MARK;
  CNUMB:=0; MNUMB:=0;
  for YS:=1 to N do
    for XS:=1 to N do
      if TEST_POINT(XS,YS) then
        "(XS,YS) möglicher Startpunkt Komponente"
        PNUMB:=0;
        CNUMB:=CNUMB+1;
        INIT_STACK;
        MARK(XS,YS);
        while not EMPTY_STACK do
          POP(X,Y);
          if TEST_POINT(X-1,Y) then MARK(X-1,Y) fi "links"
          if TEST_POINT(X,Y-1) then MARK(X,Y-1) fi "oben"
          if TEST_POINT(X+1,Y) then MARK(X+1,Y) fi "rechts"
          if TEST_POINT(X,Y+1) then MARK(X,Y+1) fi "unten"
        od // end of list-processing
        print(CNUMB,PNUMB);
        MNUMB:=MNUMB+PNUMB;
      fi // end of component
    od // end of line
  end;
end;

```

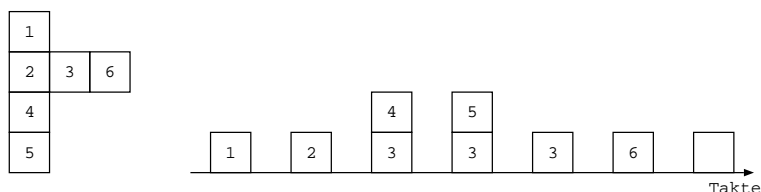
```

od // end of picture
print(MNUMB);
end. // end of procedure

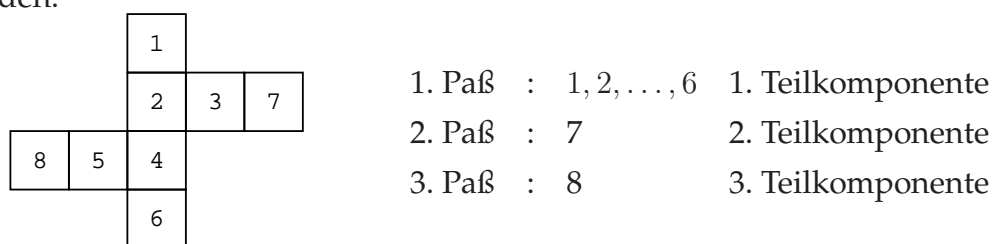
```

Bemerkung (zum Graphsuche-Algorithmus):

- Der Algorithmus arbeitet jede Komponente von M vollständig mit einem Startpunkt ab.



- Der Operator (Algorithmus) tastet irregulär das Raster pro Komponente ab.
- Alternativer Graphsuche-Algorithmus ohne Verwendung eines Stacks: Teilkomponenten werden einzeln erfaßt und müssen verschmolzen werden.



- LIFO \rightarrow Tiefensuche : Stackgröße bis $\epsilon/2$
FIFO \rightarrow Breitensuche : speichereffizienter
- In orientierten Nachbarschaftsstrukturen wird nur $R(O)$ analysiert. Daraus resultiert ein effizienteres Verfahren. Weitere Verbesserung der Effizienz durch Graphensuche auf homogenem Träger (Kontursuche).

5.2.3 Ränder und Kerne

Definition (Kern(punkt) / Rand(punkt)):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $M \subset P$.

- p Kernpunkt (von M) $\Leftrightarrow p \in M \wedge N(p) \subset M$
- p Randpunkt (von M) $\Leftrightarrow p \in M \wedge p$ kein Kernpunkt von M
- $K(M) :=$ Menge aller Kernpunkte von M

heißt *Kern von M*

- $R(M) :=$ Menge aller Randpunkte von M

heißt *Rand von M*

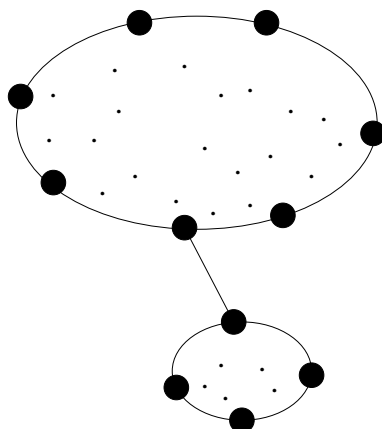
- L Kernkomponente (von M) $\Leftrightarrow L$ Komponente von $K(M)$
- L Randkomponente (von M) $\Leftrightarrow L$ Komponente von $R(M)$
- p Punktnachbar (von M) $\Leftrightarrow p \in \overline{M} \subset P \wedge N(p) \cap M \neq \emptyset$



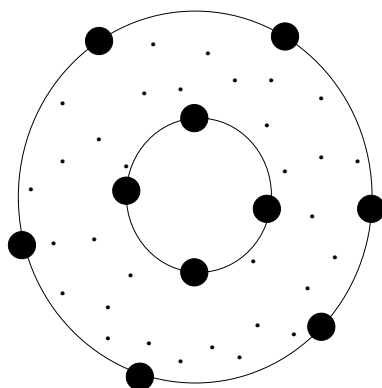
Beispiel: (Kern- / Randkomponenten)

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und M echte Teilmenge von P .

- M mit 1 Randkomponente und mehreren (hier: 2) Kernkomponenten:



- M mit 1 Kernkomponente und mehreren (hier: 2) Randkomponenten:



Satz (über Kern- und Randpunkte):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS.

- Die Menge P besitzt nur Kernpunkte, da $\bar{P} = \emptyset$.
- Γ zusammenhängend und M echte Teilmenge von $P \rightarrow M$ besitzt Randpunkte.



Einige Anwendungen davon sind: (siehe Kapitel 7)

- ▶ morphologische Operatoren (über Rand)
- ▶ Rangordnungsoperatoren
- ▶ Skelettierung (Dünnen)
- ▶ Distanztransformation

5.3 Orientierte Nachbarschaftsstrukturen

5.3.1 Orientierte Wege und Maschen

Definition (Nachbarschaftszyklus / Orientierung):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS.

- $z(p)$ Nachbarschaftszyklus von $p \Leftrightarrow$
 $p \in P$ und $z(p) = \langle q_1, \dots, q_{\nu(p)} \rangle$ zyklische Anordnung von $N(p)$
- $Z := \{ z(p) \mid p \in P \}$ heißt Orientierung von Γ

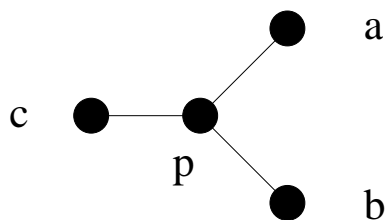


Bemerkung (Zeichnerische Darstellung von Nachbarschaftszyklen):

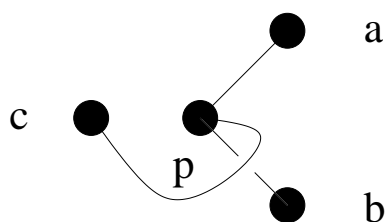
Festlegung der orientierten Nachbarschaftsstrukturen in der Zeichenebene:
Die Nachbarschaftszyklen $z(p)$ werden durch die im Uhrzeigersinn verlaufenden Kanten (p, q_i) festgelegt.

Beispiel:

Für den Nachbarschaftszyklus $z(p) = \langle a, b, c \rangle$:



Für den Nachbarschaftszyklus $z(p) = \langle a, c, b \rangle$:

**Definition (Orientierter Nachbarschaftsstruktur):**

$[P, N, Z]$ heißt *orientierte Nachbarschaftsstruktur* \Leftrightarrow
 $[P, N]$ Nachbarschaftsstruktur und Z Orientierung von $[P, N]$

Satz (Anzahl aller Orientierungen):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine Nachbarschaftsstruktur.

- Für einen Punkt $p \in P$ gibt es $(\nu(p) - 1)!$ verschiedene Nachbarschaftszyklen.
- Die Anzahl aller möglichen Orientierungen Z in Γ berechnet sich durch

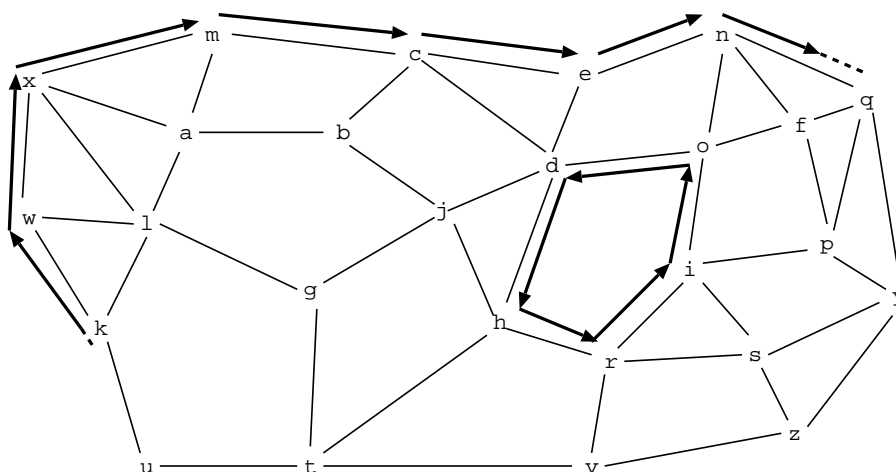
$$n_Z := \prod_{p \in P} (\nu(p) - 1)!$$

Bemerkung (zu den Beispielen):

- ▶ In den obigen Beispielen zur zeichnerischen Darstellung gilt $\nu(p) = 3$, es gibt aber $2! = 2$ verschiedene Nachbarschaftszyklen für die vier Punkte p, a, b, c , die nicht durch Permutation ineinander überführt werden können.
- ▶ Im folgenden Beispiel ist die angegebene Orientierung nur eine von etwa $8.3 \cdot 10^{17}$ möglichen.

$$\begin{aligned}
 n_Z &= \prod_{p_i=p_1}^{p_{26}} (\nu(p_i) - 1)! \\
 &= 1! \cdot (2!)^8 \cdot (3!)^{15} \cdot (4!)^2 \\
 &\approx 10^{17}
 \end{aligned}$$

Beispiel: $[P, N, Z]$ mit $P = \{a, b, \dots, z\}$ und durch den Uhrzeigersinn gegebener Anordnung der Nachbarn jedes Punktes:



Bemerkung (Ordnung der gerichteten Kanten):

Durch die zyklische Anordnung der Nachbarn eines jeden Punktes $p \in P$ wird auch in der Menge der gerichteten Kanten $(p, q) \in N$ eine Ordnung induziert:

Im Beispiel gilt

$$z(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{i}, s, v, h \rangle$$

$$z(\mathbf{i}) = \langle \mathbf{o}, p, s, r \rangle$$

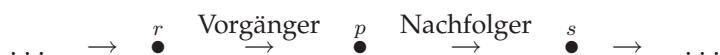
$$z(\mathbf{o}) = \langle \mathbf{d}, n, f, i \rangle$$

Ausgehend von der gerichteten Kante (r, i) folgt zwangsläufig die gerichtete Kante (i, o) , da in $z(i)$ o auf r folgt, und weiter die gerichtete Kante (o, d) , da in $z(o)$ d auf i folgt, u.s.w.

Definition (Vorgänger / Nachfolger):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine orientierte NS und $z(p) = \langle \dots, r, s, \dots \rangle$ der Nachbarschaftszyklus von $p \in P$.

- Die gerichtete Kante (r, p) wird als *Vorgänger* der gerichteten Kante (p, s) bezeichnet.
- Die gerichtete Kante (p, s) wird als *Nachfolger* der gerichteten Kante (r, p) bezeichnet.



Mit der Entscheidung für eine gerichtete Kante (p, q) in einer orientierten NS $[P, N, Z]$ ist eine unbegrenzte Kantenfolge festgelegt, der eindeutig eine unbegrenzte Punktfolge entspricht.

Definition (Erzeugter orientierter Weg):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine orientierte NS.

- $(p_n)_{n \geq 0}$ heißt durch (p, q) erzeugter orientierter Weg in $\Gamma \Leftrightarrow$
 $p = p_0, q = p_1 \wedge$
 $\forall i \geq 0 : (p_i, p_{i+1}) \in N$ ist Vorgänger von $(p_{i+1}, p_{i+2}) \in N$



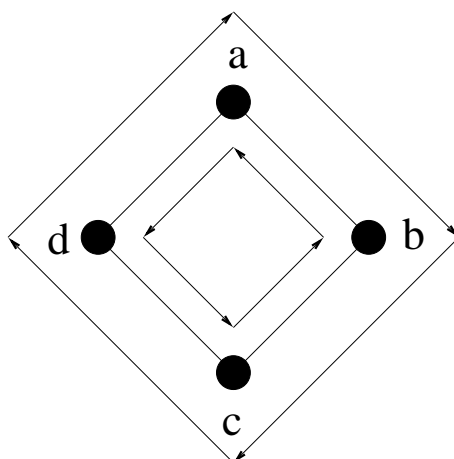
Bemerkung (zu den erzeugten orientierten Wegen):

Sei Γ eine orientierte NS und W ein durch eine Kante erzeugter orientierter Weg in Γ .

- ▶ W ist unbegrenzt, weil jeder Punkt eines Nachbarschaftszyklus einen Nachfolgepunkt besitzt
- ▶ W ist periodisch, weil P und damit auch N endlich sind und weil W unbegrenzt ist
- ▶ W kann somit an beliebiger Stelle seiner Punktfolge beginnen
- ▶ Ist W ein durch die gerichtete Kante (p, q) erzeugter orientierter Weg, so existiert auch der durch die gerichtete Kante (q, p) erzeugte inverse orientierte Weg. Orientierte Wege treten also immer paarweise auf.

Beispiel: orientierte Nachbarschaftsstrukturen

- B_1 sei die folgende orientierte Nachbarschaftsstruktur $[P, N, Z]$:



Es gilt dann:

- $P = \{a, b, c, d\}$
- $N = \{ (a, b), (b, c), (c, d), (d, a) \}$
- $Z = \{ z(a) = \langle b, d \rangle, z(b) = \langle c, a \rangle, z(c) = \langle b, d \rangle, z(d) = \langle a, c \rangle \}$
- $\epsilon = 4, \kappa = 4$

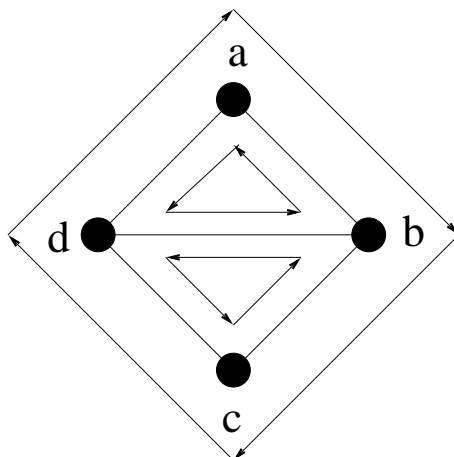
Alle orientierten Wege in B_1 sind:

- $W_1 = (a, b, c, d, a, b, \dots)$, erzeugt durch die Kante (a, b)
- $W_2 = (a, d, c, b, a, d, \dots)$, erzeugt durch die Kante (a, d)
- $W_3 = (b, c, d, a, b, c, \dots)$, erzeugt durch die Kante (b, c)

Da orientierte Wege W periodisch sind, spielt der Startpunkt in W keine Rolle, also kann man z.B. W_1 durch einen Zyklus beschreiben:

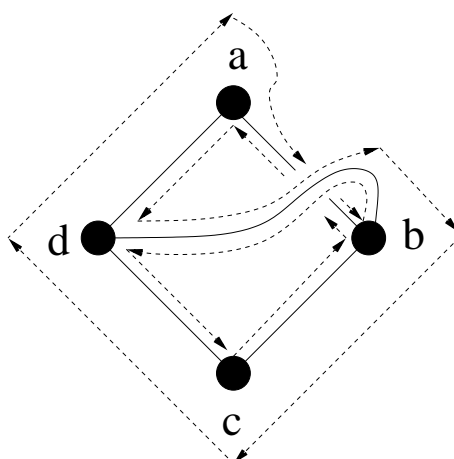
- $W_1 = \langle a, b, c, d \rangle = \langle b, c, d, a \rangle = \langle c, d, a, b \rangle = \langle d, a, b, c \rangle$

- B_2 sei die folgende orientierte Nachbarschaftsstruktur:



Es gilt: $\lambda(\langle a,b,c,d \rangle) = 4$, $\lambda(\langle a,d,b \rangle) = \lambda(\langle b,c,d \rangle) = 3$; $\mu = 3$

- B_3 sei die folgende orientierte Nachbarschaftsstruktur:



Es gilt: $\lambda(\langle a,b,d,c,b,a,d,b,c,d \rangle) = 10$; $\mu = 1$

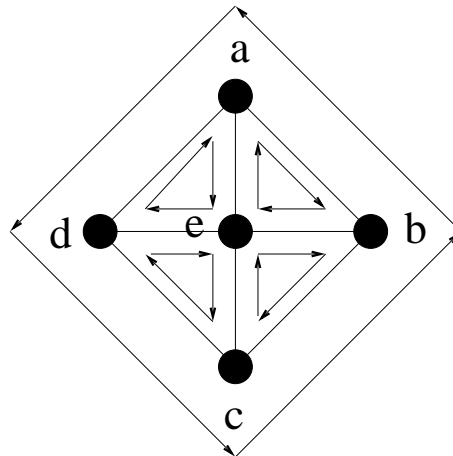
Definition (Masche):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine orientierte NS.

- m Masche von $\Gamma \Leftrightarrow m = \langle \dots, p, q, \dots \rangle$ der eindeutige Zyklus des durch (p, q) erzeugten orientierten Weges W in Γ
- $\lambda(m) :=$ Anzahl der Punkte der Masche m (Maschenlänge von m)
- $\mu := \mu(\Gamma) :=$ Anzahl der Maschen in Γ

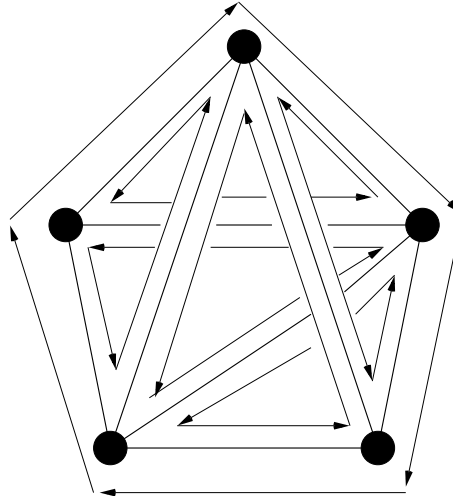
Beispiel: Maschen

- B_4 sei die folgende orientierte Nachbarschaftsstruktur:



- $\mu = 5$
- $\epsilon = 5, \kappa = 8$

- B_5 sei die folgende orientierte Nachbarschaftsstruktur:



Für die orientierte Nachbarschaft B_5 gilt:

- $\mu = 2$
- 1. Masche: $\lambda = 5$
- 2. Masche: $\lambda = 13$
- $\epsilon = 5, \kappa = 9$



Bemerkung (zu Maschen):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine orientierte NS.

- ▶ Jede gerichtete Kante $(p, q) \in N$ tritt genau einmal in genau einer Masche von Γ auf
- ▶ In einer Masche können Punkte mehrfach vorkommen (s. B_3)

Satz (Maschensatz):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine orientierte NS, dann berechnet sich die Summe aller Maschenlängen durch

$$\sum_{m \text{ Masche von } \Gamma} \lambda(m) = 2\kappa.$$

■

Folgerung aus dem Maschensatz:

Satz (Mittlere Maschenlänge):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine orientierte NS.

Die mittlere Maschenlänge $\bar{\lambda}$ von Γ läßt sich durch

$$\bar{\lambda}(\Gamma) := \frac{1}{\mu} \sum_{m \text{ Masche von } \Gamma} \lambda(m) = \frac{2\kappa}{\mu}$$

berechnen.

■

Definition (Struktur):

Γ Struktur $\Leftrightarrow \Gamma$ orientierte Nachbarschaftsstruktur

■

Bemerkung (Struktur-Charakterisierung):

Eine Struktur Γ ist charakterisiert durch:

- ϵ : Anzahl der Punkte
- κ : Anzahl der ungerichteten Kanten
- μ : Anzahl der Maschen bei gegebener Orientierung Z
(einschließlich derjenigen von isolierten Punkten – jeweils 1)
- $\nu(p)$: Anzahl der Nachbarn von p
- $\lambda(m)$: Länge der Maschen m

5.3.2 Eulersche Charakteristik

Definition (Eulersche Charakteristik):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine Struktur.
Die *Eulersche Charakteristik* von Γ ist durch

$$\chi := \chi(\Gamma) := \epsilon - \kappa + \mu$$

definiert. ■

Beispiel:

Betrachte nochmals die Strukturen der Beispiele aus Abschnitt 5.3.1.

Für die Struktur B_2 gilt: $\chi(B_2) = 2 \quad \epsilon = 4 \quad \kappa = 5 \quad \mu = 3$

Für die Struktur B_3 gilt: $\chi(B_3) = 0 \quad \epsilon = 4 \quad \kappa = 5 \quad \mu = 1$

Für die Struktur B_5 gilt: $\chi(B_5) = -2 \quad \epsilon = 5 \quad \kappa = 9 \quad \mu = 2$ ■

Satz (Eulerscher Satz):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine zusammenhängende Struktur.
Für die Eulersche Charakteristik gilt

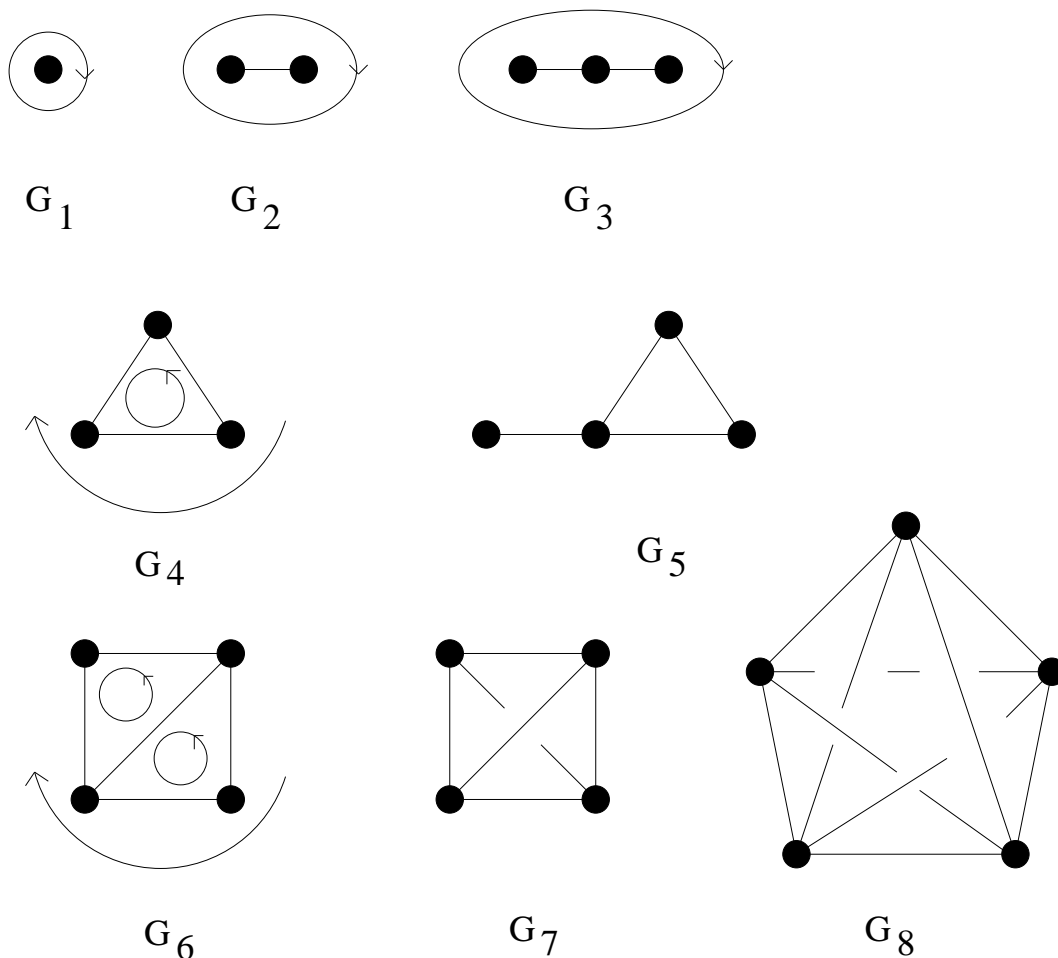
$$\chi(\Gamma) \leq 2. \quad \text{■}$$

Satz (Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine Struktur. Besitzt Γ genau k Komponenten, so ist

$$\chi(\Gamma) \leq 2k. \quad \text{■}$$

Beispiel: Zum Eulerschen Satz Seien die folgenden Strukturen gegeben:



Für diese Strukturen gilt dann:

G_i	ϵ	κ	μ	χ
G_1	1	0	1	2
G_2	2	1	1	2
G_3	3	2	1	2
G_4	3	3	2	2
G_5	4	4	2	2
G_6	4	5	3	2
G_7	4	6	2	0
G_8	5	10	3	-2

Definition (Planare Struktur):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine Struktur.

Γ planar \Leftrightarrow

Die Punkte und Kanten von Γ können (unter Beachtung der Orientierung) so in einer Ebene angeordnet werden, daß die Kanten von Γ sich höchstens in den Punkten berühren.

- Die Maschen einer *planaren Struktur* $\Gamma = [P, N, Z]$ können so gezeichnet werden, daß sie keine Kante berühren.

Definition (Planare Graphen):

Sei $\Gamma = [P, N]$ ein Graph.

Γ heißt *planar* $\Leftrightarrow \exists$ (Orientierung Z zu Γ): Γ planar bzgl. der Orientierung Z

■

Beispiel:

Betrachte nochmals die Strukturen der Beispiele aus Abschnitt 5.3.1.

- Für B_2 gilt: B_2 ist planar, $\chi(B_2) = 2$
- Für B_3 gilt: B_3 ist nicht planar, $\chi(B_3) = 0$

■

Satz (über Planarität):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine zusammenhängende Struktur, dann ist

$$\chi(\Gamma) = 2 \Leftrightarrow \Gamma \text{ planar.}$$

■

5.3.3 Teilstrukturen und Randmaschen

Definition (Erzeugte Teilstruktur):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine Struktur und $M \subset P$.

- $N_M := N \cap (M \times M)$
- $z_M(p) :=$ der auf M reduzierte Teilnachbarschaftszyklus von p
(d.h. aus $z(p)$ werden all die Punkte q gestrichen, für die gilt: $q \notin M$)
- $Z_M := \{ z_M(p) \mid p \in M \}$
- $\Gamma_M := [M, N_M, Z_M]$
ist die *durch M erzeugte (induzierte) Teilstruktur von Γ .*

■

Definition (Kernmasche / Randmasche):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine Struktur und $M \subset P$.

- m Kernmasche von Γ_M (bzw. M) bzgl. $\Gamma \Leftrightarrow m$ Masche in Γ_M und m Masche in Γ
- m Randmasche von Γ_M (bzw. M) bzgl. $\Gamma \Leftrightarrow m$ Masche in Γ_M und m keine Masche in Γ

■

Bemerkung (über Kern- und Randmaschen):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine Struktur und $M \subset P$.

- ▶ Die Definition von Kernmaschen und Randmaschen setzt den Bezug auf eine umfassende Struktur (Γ) voraus.
- ▶ Gilt $M = P$, so hat $\Gamma_M \equiv \Gamma$ keine Randmasche.
- ▶ Eine zusammenhängende Struktur besitzt nur eine Randmasche.
- ▶ $M = M_1 \cup M_2$ und M_1, M_2 bilden zwei verschiedene Komponenten $\Rightarrow \Gamma_M$ hat mehrere Randmaschen.
- ▶ Die Punkte einer Randmasche heißen Randpunkte $r \in R(M)$.
- ▶ Jeder Randpunkt von M ist ein Punkt einer Randmasche von Γ_M .

Definition (Randpaar / Randkante):

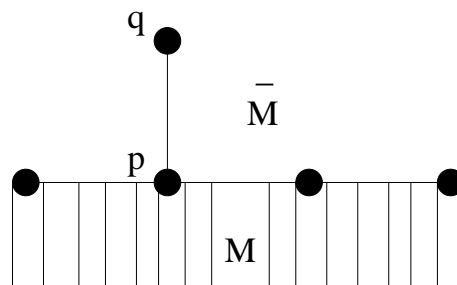
Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine Struktur und $M \subset P$.

- (p, q) Randpaar von $M \Leftrightarrow (p, q) \in N$ und $p \in M$ und $q \in \overline{M}$.
- Wenn (p, q) Randpaar von M ist, dann heißt $\{p, q\}$ Randkante von M .

Der Zusammenhang einer Menge $M \subset P$ von Γ und der Komplementärmenge \overline{M} wird durch ihre Randkanten erzeugt. Jedem Randpaar (p, q) von M entspricht ein Randpaar (q, p) von \overline{M} .

■

Beispiel: (p, q) ist Randpaar und $\{p, q\}$ Randkante:

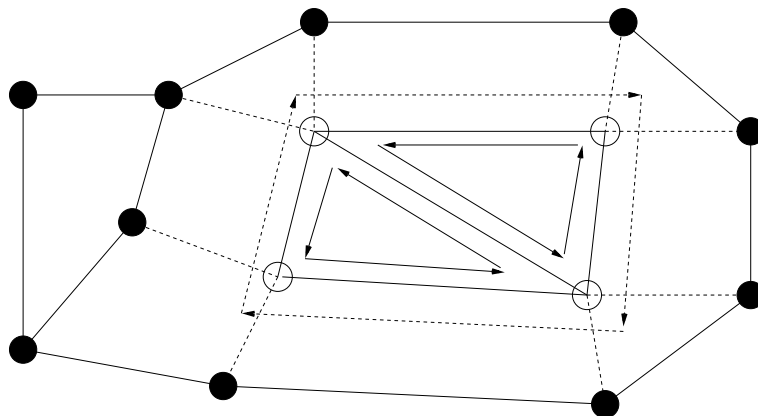


■

Anwendungen:

- ▶ needle map (Oberflächennormale auf homogenem Gitter)
- ▶ Kontursuche durch Bestimmung der Randmaschen

Beispiel: Sei die folgende Struktur $\Gamma = [P, N, Z]$ gegeben:



Dabei ist:

$M_\circ :=$ Menge aller Punkte $\circ = M$

$M_\bullet :=$ Menge aller Punkte $\bullet = \overline{M} = P \setminus M$

gestrichelte Linien $-$: Randkanten von M_\circ

\rightarrow : Kernmaschen von M_\circ

gestrichelter Pfeil \rightarrow : Randmasche von M_\circ

Es gilt für Γ :

$\epsilon = 14, \kappa = 24, \mu = 12, \chi(M_\circ) = 2.$

Bilde Γ' durch Entfernen der Randkanten aus Γ , dann gilt für Γ' :

$\chi(\Gamma') = 4$ (s.u. Randmaschensatz).

■

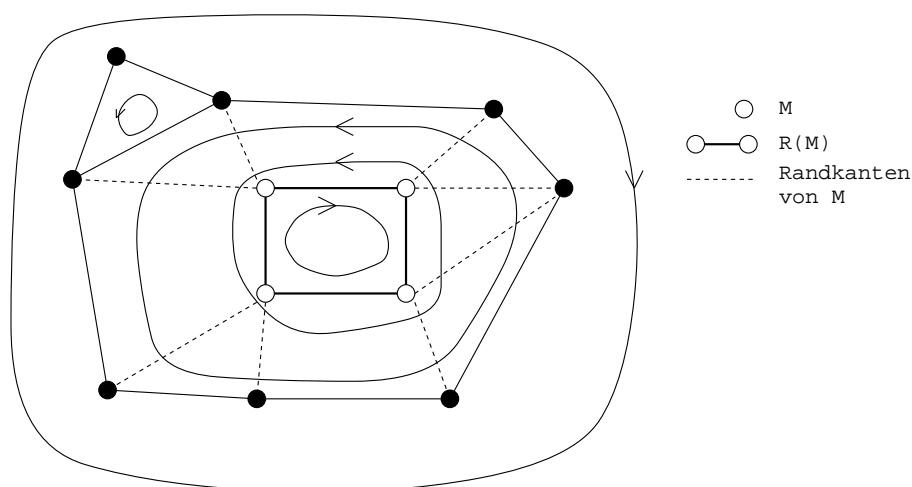
Satz (Randmaschensatz):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine Struktur und $M \subset P$.

Wenn alle einer Randmasche von Γ_M zugeordneten Randkanten aus Γ gestrichen werden, entsteht eine Teilstruktur Γ' mit $\chi(\Gamma') > \chi(\Gamma)$.

■

Beispiel: zum Randmaschensatz



$$\begin{aligned}\Gamma & : \epsilon = 12, \quad \kappa = 21, \quad \mu = 11, \quad \chi = 2 \\ \Gamma' & : \epsilon' = 12, \quad \kappa' = 13, \quad \mu' = 5, \quad \chi' = 4\end{aligned}$$

■

► Die Aussage des Randmaschensatzes ist eine Folgerung aus dem Trennungssatz.

Satz (Trennungssatz):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine zusammenhängende planare Struktur und $G \subset P$ ein Gebiet. Wenn alle einer Randmasche von G zugeordneten Randkanten aus Γ gestrichen werden, zerfällt Γ in mindestens zwei Teilstrukturen, die nicht miteinander zusammenhängen.

■

► Der Trennungssatz ist das diskrete Analogon zum Jordanschen Kurvensatz.

5.4 Homogene Nachbarschaftsstrukturen

Endlichkeit, Planarität und Homogenität sind zentrale Forderungen an für die Bildverarbeitung geeignete Strukturen.

Im folgenden befassen wir uns mit homogenen Strukturen.

5.4.1 Netze und Torusnetze

Definition (Homogene Struktur / Netz):

- $[P, N, Z]$ *homogene Struktur / homogene orientierte Nachbarschaftsstruktur* \Leftrightarrow
 $[P, N, Z]$ orientierte Nachbarschaftsstruktur und
 $\forall p \in P : \nu := \nu(p) = \text{const}$ und
 $\forall (\text{Maschen } m \text{ von } [P, N, Z]) : \lambda := \lambda(m) = \text{const}$
- $[P, N, Z]$ *Netz* $\Leftrightarrow [P, N, Z]$ zusammenhängende homogene Struktur

■

Bemerkung (Zusammenhang homogene Struktur / regulärer Graph / NS):

Ist $[P, N, Z]$ eine homogene Struktur, so bildet $[P, N]$ stets einen regulären Graphen/NS.

Nun sollen alle möglichen Netze untersucht werden:

Satz (Topologische Grundgleichungen für Netze):

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ ein Netz.

- Für Γ gelten die drei *topologischen Grundgleichungen*:
 - 1) $\sum_{p \in P} \nu(p) = \epsilon \nu = 2\kappa$ **[Knotensatz für Netze]**
 - 2) $\sum_m \text{Masche } \lambda(m) = \mu \lambda = 2\kappa$ **[Maschensatz für Netze]**
 - 3) $\epsilon - \kappa + \mu = \chi$ **[Euler-Charakteristik]**

Damit haben wir 6 Variable $\epsilon, \kappa, \nu, \lambda, \mu, \chi$ in 3 Gleichungen vorliegen.
 Zusätzlich gelten für die Unbekannten die Nebenbedingungen:

- 4) $\epsilon, \kappa, \nu, \lambda, \mu, \chi$ sind ganzzahlig;
 (1) bis 3) bilden also ein sog. diophantisches Gleichungssystem.)
 - 5) $\epsilon, \mu, \nu, \lambda, \kappa > 0$
 - 6) $\chi \leq 2$
- Folgerungen aus dem Gleichungssystem 1) bis 3) und den Nebenbedingungen 4) bis 6) sind dann:
 - 7) $\frac{\epsilon}{\kappa} = \frac{2}{\nu}$ [Umformung von 1)]
 - 8) $\frac{\mu}{\kappa} = \frac{2}{\lambda}$ [Umformung von 2)]
 - 9) $\boxed{\frac{2}{\nu} + \frac{2}{\lambda} = 1 + \frac{\chi}{\kappa}}$
 [Division von 3) durch κ und anschließendes Einsetzen von 7) und 8)]

■

1. Annahme: $\chi = 2$ (planare homogene Strukturen).

Dann folgt aus 9):

$$10) \quad \kappa = \frac{2}{\frac{2(\nu+\lambda)}{\nu\lambda} - 1}$$

Einige Lösungen (κ, ν, λ) sind:

$\nu \setminus \lambda$	1	2	3	4	5	6
1	–	1	–	–	–	–
2	1	2	3	4	5	6
3	–	3	6	12	30	–
4	–	4	12	–	–20	–12
5	–	5	30	–20	–10	–

(– : keine Lösung)

Die Lösungen für (ϵ, μ) folgen dann daraus.

Da in Nachbarschaftsstrukturen $\kappa \geq 0$ gelten muß, ergeben sich die folgenden 3 Gruppen von homogenen Strukturen:

i) $(\nu, \lambda) = (1, 2)$ ergibt das Punktpaar $\bullet - \bullet$

ii) $(\nu, \lambda) = (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \dots$ ergeben die 1D-Ringstrukturen:

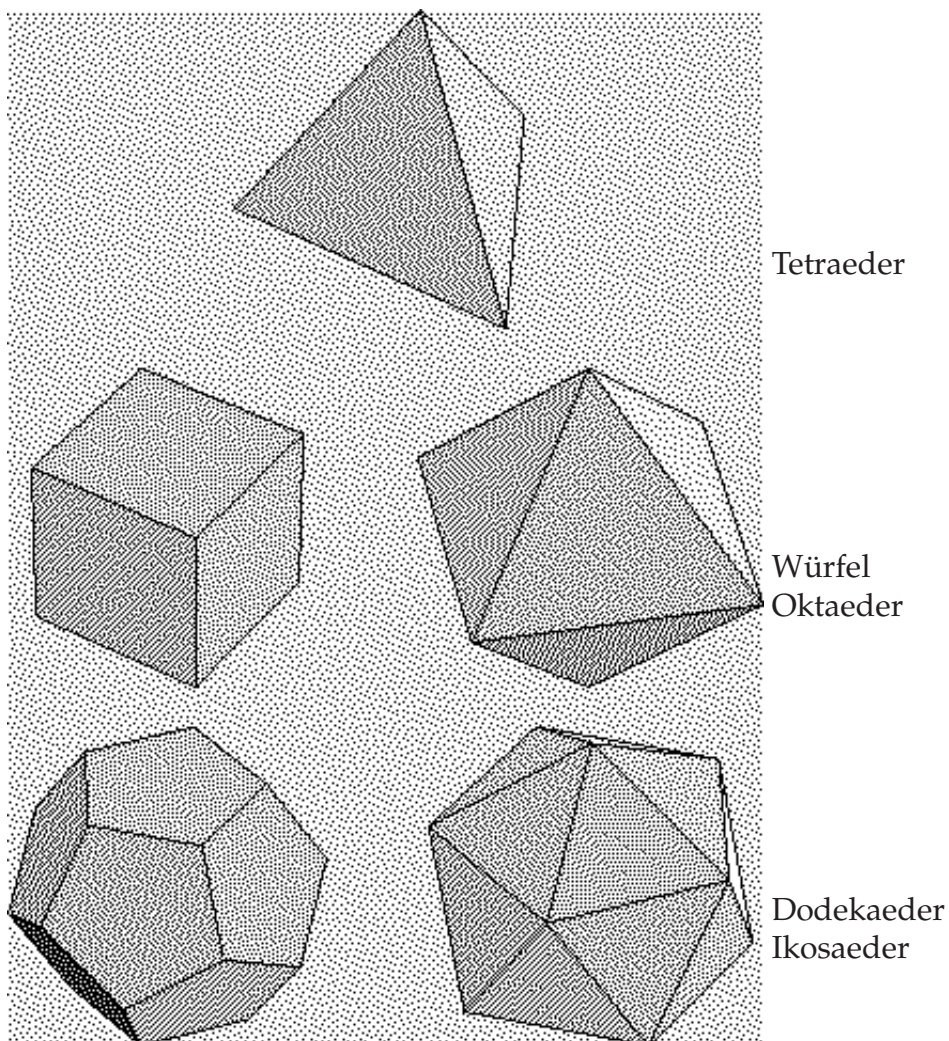


(einsetzbar in 1D-Bildverarbeitung)

iii) $(\nu, \lambda) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$ ergeben die 5 "Platonischen Körper" (regelmäßige Polyeder)

$(3, 3)$	Tetraeder	$(4, 3)$	Oktaeder
$(3, 4)$	Hexaeder	$(5, 3)$	Ikosaeder
$(3, 5)$	Dodekaeder		

Diese homogenen Strukturen sind für die 2D-Bildverarbeitung unbrauchbar.



Name des Polyeders	Art der begrenzenden Polygone (λ)	Ecken ϵ	Kanten κ	Flächen μ	in einer Ecke zusammenstoßende Flächen ν
Tetraeder	Dreieck	4	6	4	3
Oktaeder	"	6	12	8	4
Isokaeder	"	12	30	20	5
Würfel (Hexaeder)	Viereck	8	12	6	3
Dodekaeder	Fünfeck	20	30	12	3

2. Annahme: $\chi < 0$.

Hier sind nur kurz die Ergebnisse aufgeführt:

$\chi = -2 \rightarrow 10$ Lösungstupel

$\chi = -4 \rightarrow 19$ Lösungstupel

Auch diese homogenen Strukturen sind für die 2D-Bildverarbeitung unbrauchbar, da sie Kugeln mit $g = \frac{2-\chi}{2}$ Löchern darstellen (g Geschlecht der Struktur).

3. Annahme: $\chi = 0$.

Dann folgt aus 9):

$$11) \quad \boxed{\frac{2}{\nu} + \frac{2}{\lambda} = 1}$$

Die einzigen ganzzahligen Lösungen von 11) sind: $(\nu, \lambda) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$.

Allerdings erfüllt nicht jedes κ das obige Gleichungssystem 1)-6), da $\epsilon = \frac{2\kappa}{\nu}$ und $\mu = \frac{2\kappa}{\lambda}$ ganzzahlig sein müssen. Dies gilt z.B. für $\kappa = 5$ nicht.

Weitere die Lösungsmenge einschränkende Nebenbedingungen sind

$$\epsilon > \nu \text{ und } \kappa \leq \epsilon(\epsilon - 1)/2.$$

Insgesamt ergeben sich die folgenden Lösungstupel für $\chi = 0$:

ν	λ	ϵ	κ	μ	Interpretationen
3	6	$2n$	$3n$	n	Sechsecknetze für $n \geq 3$
4	4	n	$2n$	n	Vierecknetze für $n \geq 5$
6	3	n	$3n$	$2n$	Dreiecknetze für $n \geq 7$

Definition (Torusnetz):

Γ heißt *Torusnetz / toroidales Netz* $\Leftrightarrow \Gamma$ Netz und $\chi(\Gamma) = 0$ und $(\nu, \lambda) = (3, 6)$ oder $(4, 4)$ oder $(6, 3)$.

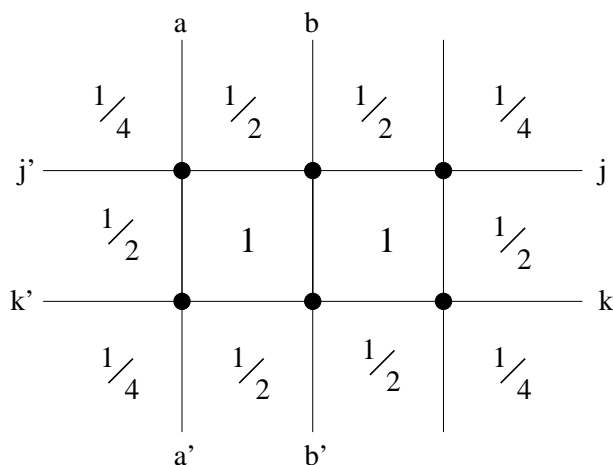


► Bezeichnung: $\Gamma(\nu, \lambda)$

Definition (Unendliches Torusnetz):

Γ heißt *unendliches Torusnetz / toroidales Netz* $\Leftrightarrow \Gamma$ ist ein "Torusnetz", das unendlich viele Elemente besitzt.



Beispiel: Mini-Viereck-Torusnetz

$$\epsilon = 6, \kappa = 12, \mu = 6, \chi = \epsilon - \kappa + \mu = 0$$

■

Bemerkung (Vierecknetz):

- ▶ Modell eines unendlichen Vierecknetzes ist das planare unendliche Gitter \mathbb{Z}^2 .
- ▶ Modell eines (endlichen) Vierecknetzes ist das entsprechende toroidale Gitter \mathcal{Z}^2 , das ebenfalls (ungenau) mit \mathbb{Z}^2 bezeichnet wird.

Bemerkung (Geschlecht von Flächen):

- ▶ Das Geschlecht einer Fläche kann die Werte $0, 1, 2, \dots$ annehmen.
- ▶ Topologisch entsprechen solche Flächen Kugeln mit $0, 1, 2, \dots$ Löchern ("Henkeln").
- ▶ Eine der Kugeloberfläche topologisch äquivalente Fläche wird als *Fläche vom Geschlecht $g = 0$* bezeichnet.
- ▶ Jede orientierte NS mit gegebener Euler-Charakteristik χ läßt sich auf einer Fläche vom Geschlecht $g = \frac{2-\chi}{2}$ durch eine kreuzungsfreie NS darstellen.
- ▶ Die planaren homogenen Strukturen mit $\chi = 2$ haben das Geschlecht 0.
- ▶ Die toroidalen homogenen Strukturen mit $\chi = 0$ haben das Geschlecht 1.

Bemerkung (über Torusnetze):

- ▶ Auf Torusnetzen treten keine Kreuzungen der Kanten des jeweiligen Nachbarschaftsgraphen auf.
- ▶ Es gibt beliebig große Torusnetze. Sie sind aber immer endlich.
- ▶ Auf Torusnetzen können (beliebig große) planare Gebiete existieren. Diese sind aber nicht mehr homogen.

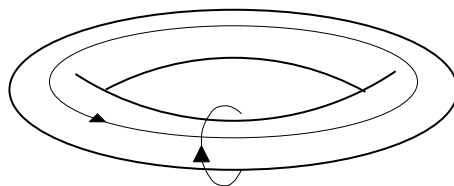
In der Abbildung auf Seite 153 sind die drei Typen von Torusnetzen dargestellt mit jeweils planaren Teilstrukturen (Gebieten mit einer Randmasche). Die Randpunkte dieser Gebiete besitzen einen Nachbarschaftsgrad, der kleiner ist als der für das jeweilige Netz typische. Die topologischen Grundgesetze für solche Gebiete müssen dies berücksichtigen.

Dies ist eine Folge des Trennungssatzes: Wenn Randkanten gestrichen werden, gehen Nachbarpunkte $q \in \overline{G}$ verloren!

Bemerkung (Verwendete 2D-Bildverarbeitungsstrukturen):

Für die Bildverarbeitung geeignet sind:

- ▶ Homogene Torusnetze (z.B. verwendet als Träger periodischer Signale).



- ▶ Zusammenhängende Teilstrukturen auf Torusnetzen, die planar, aber nicht homogen sind (s.u.) (z.B. verwendet als endlicher Bildträger oder als binäre Objekte).

5.4.2 Gebiete und Randmaschen in Torusnetzen**Satz (Topologische Grundgleichungen, modifiziert):**

Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz, $G \subset P$ ein Gebiet mit *einer einzigen* Randmasche. Die Länge dieser Randmasche sei l , die Anzahl der ihr zugeordneten Randkanten sei n .

Die drei modifizierten topologischen Grundgleichungen für die Teilstruktur Γ_G (bzw. für das Gebiet G) lauten dann:

$$1') \quad \nu\epsilon - n = 2\kappa$$

Jeder der ϵ Punkte von G hat ν Nachbarn, n dieser Nachbarn werden aber weggestrichen.

$$2') \quad \lambda(\mu - 1) + l = 2\kappa$$

Jede der $f = \mu - 1$ Kernmaschen von G hat die Länge λ , die Randmasche hat aber die Länge l .

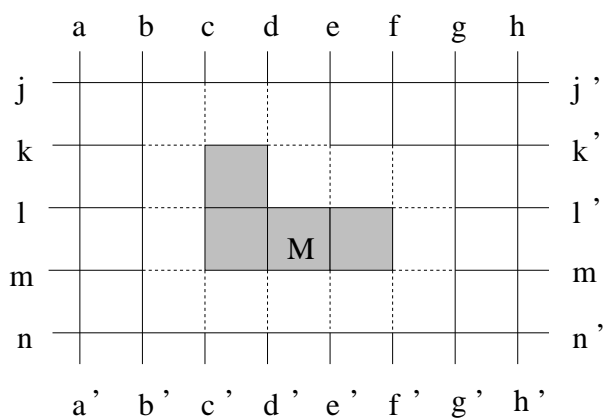
$$3') \quad \epsilon - \kappa + \mu = \chi_G$$

Für die Eulersche Charakteristik der Teilstruktur Γ_G gilt

$$\chi_G = \chi(\Gamma_G) = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$$

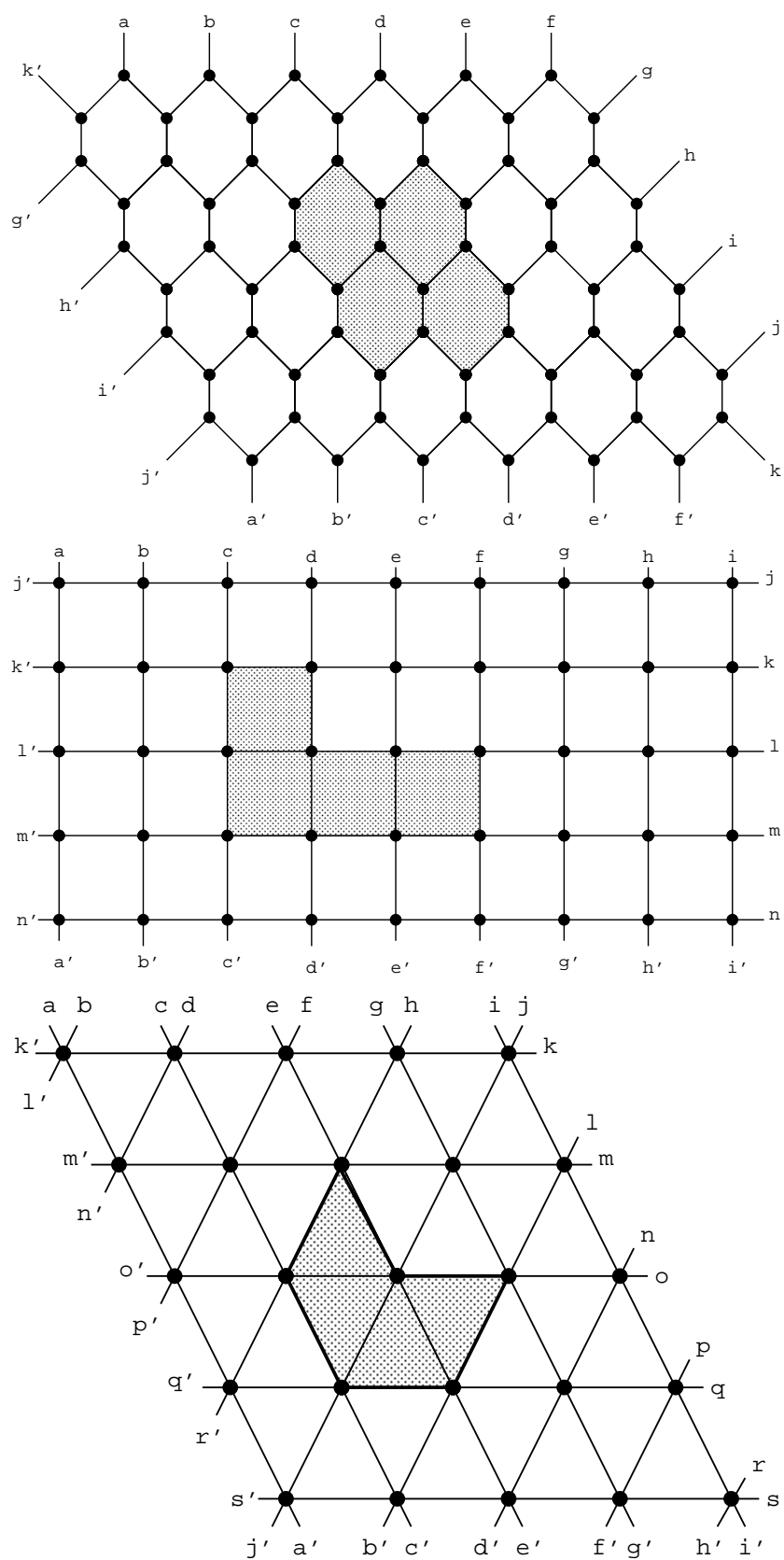


Beispiel: Torusnetz Sei das folgende Torusnetz gegeben mit $(\nu, \lambda) = (4, 4)$:



- Für das Gebiet M gilt:
 $\epsilon = 10, \nu = 4, \lambda = 4, \mu = 5, \kappa = 13, \chi = \epsilon - \kappa + \mu = 10 - 13 + 5 = 2, n = 14, l = 10.$
- Der nicht modifizierte Knoten- bzw. Maschensatz gilt für M allerdings nicht:
 $\epsilon\nu = 2\kappa : 40 \neq 26$
 $\mu\lambda = 2\kappa : 20 \neq 26$
- Benutzung der modifizierten topolog. Grundgleichungen 1') und 2') ergibt:
 $26 = 26$
 $26 = 26$





Die drei Grundformen eines Torusnetzes.

Satz (Eulerscher Satz für eine Randmasche):

Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz, $G \subset P$ ein Gebiet mit einer einzigen Randmasche. Dann lautet der Eulersche Satz für ein Gebiet, ausgedrückt durch die Randparameter,

$$\frac{n}{\nu} - \frac{l}{\lambda} = \chi_G - 1.$$

Beweis:

Es gilt für G :

$$12) \quad \lambda n - \nu l = \nu \lambda (\chi_G - 1) - (2\lambda + 2\nu - \nu \lambda) \kappa$$

[aus $\nu * \lambda * 3'$) - $\nu * 1'$) - $\lambda * 2'$)]

$$12') \quad 2\lambda + 2\nu - \nu \lambda = 2\nu \lambda \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

[mit 11)]

Aus 12) unter Verwendung von 12') folgt die Behauptung. ■

Folgerung :

Da χ_G auf einem Torusnetz nur die Werte 0 oder 2 annehmen kann, liefert $\frac{n}{\nu} - \frac{l}{\lambda}$ unabhängig von einer expliziten Angabe von Größe und Gestalt des Gebietes die Werte -1 oder $+1$.

Definition (Totale Krümmung einer Randmasche):

Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz, $G \subset P$ ein Gebiet, m Randmasche von G .

$$t := t(m) := \frac{n}{\nu} - \frac{l}{\lambda}$$

heißt die *totale Krümmung von m* . ■

Satz (Totale Krümmung einer einzigen Randmasche):

Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz, $G \subset P$ ein Gebiet mit einer einzigen Randmasche m . Für die totale Krümmung gilt dann

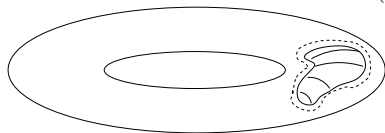
- $t(m) = \chi_G - 1$
 - $t(m) = \begin{cases} +1 & : G \text{ planar} & (\chi_G = 2) \\ -1 & : G \text{ toroidal} & (\chi_G = 0) \end{cases}$
-

Definition (äußere/innere Randmasche):

Sei $\Gamma(\nu, \lambda)$ ein Torusnetz, m Randmasche eines Gebietes G in Γ .

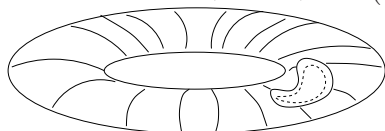
- m heißt *äußere Randmasche* (von G) $\Leftrightarrow t(m) = 1$

$\chi_G = 2$

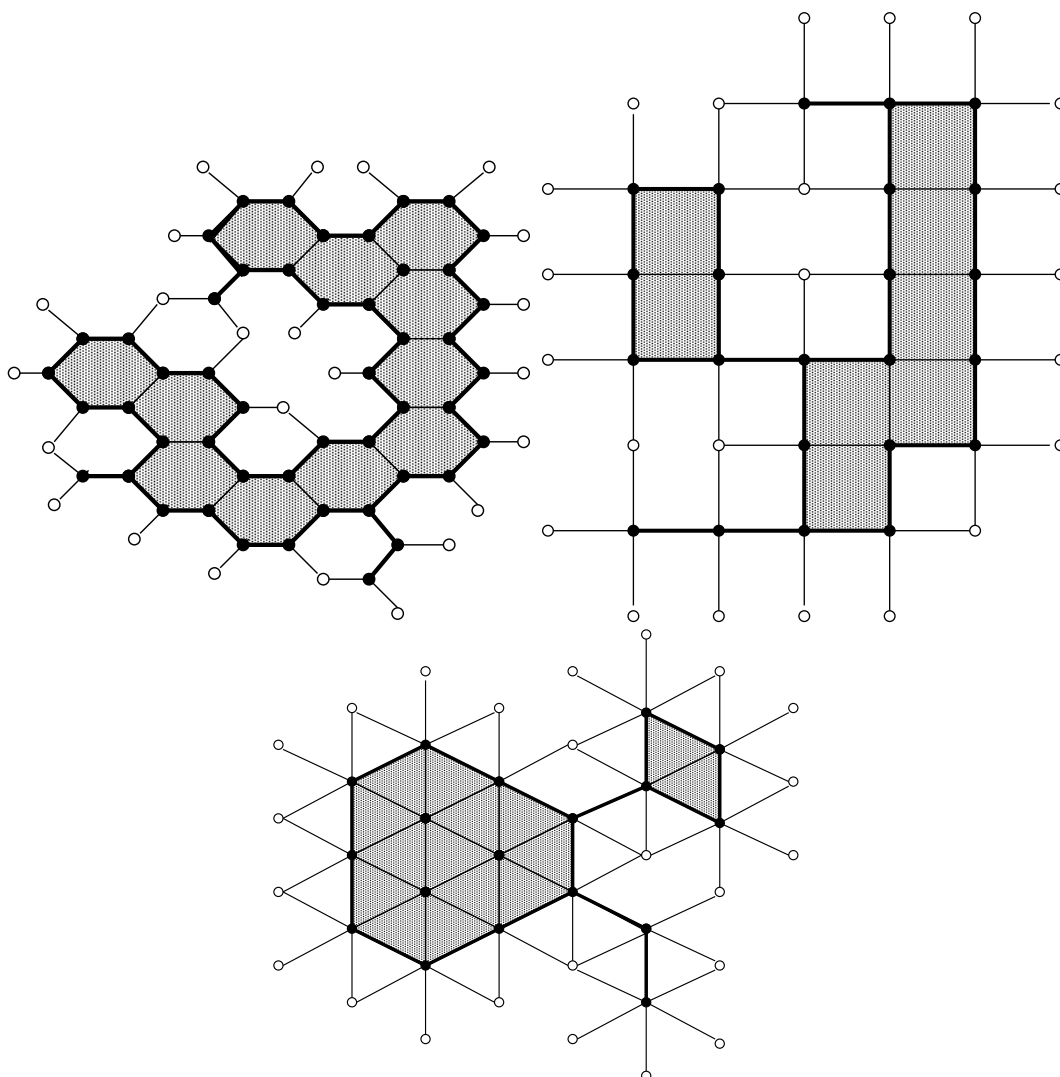


- m heißt *innere Randmasche* (von G) $\Leftrightarrow t(m) = -1$

$\chi_G = 0$



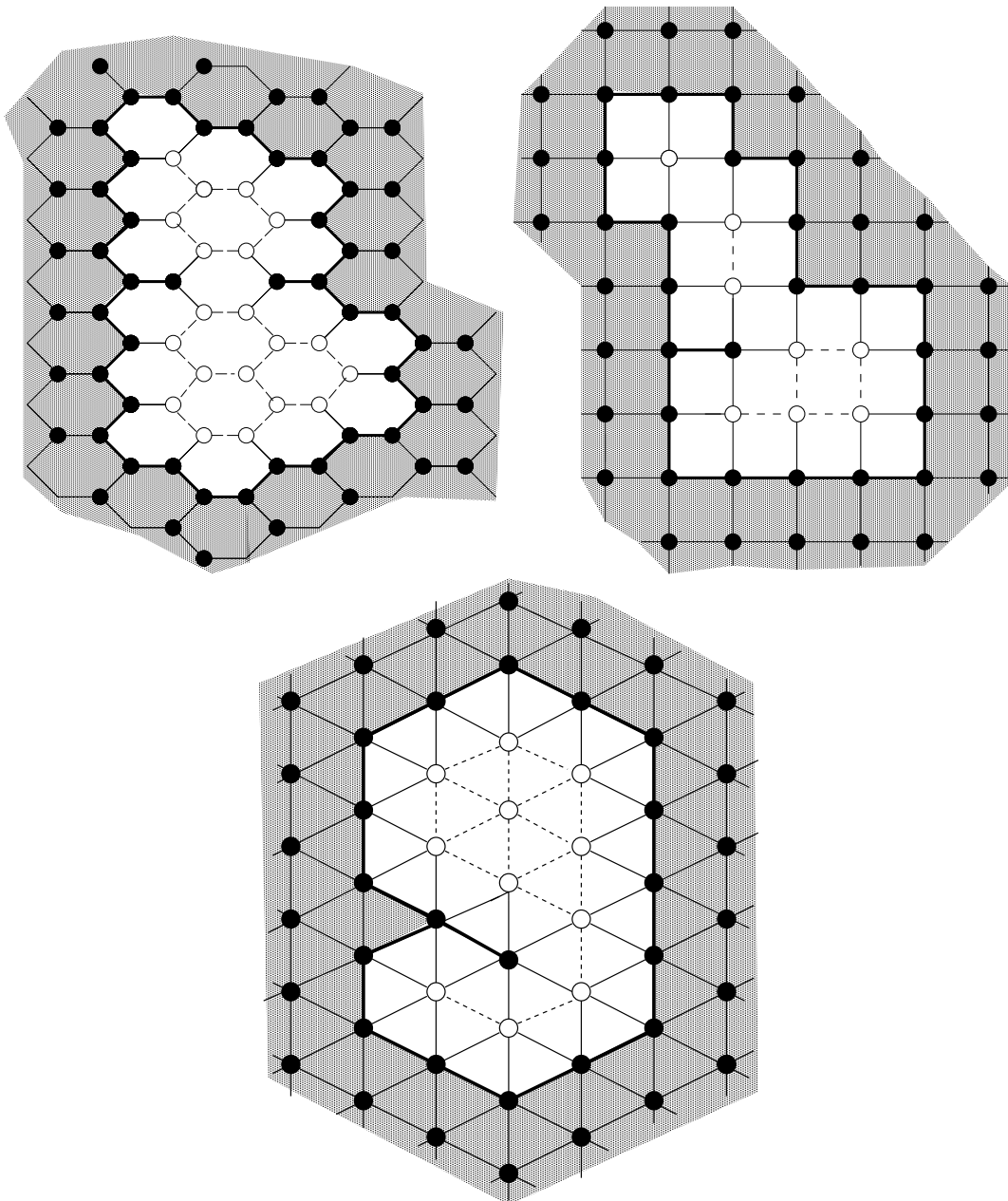
Beispiel: äußere Randmasche



	ν	λ	ϵ	κ	μ	l	n	f
Hex	3	6	49	59	12	52	29	11
Quad	4	4	23	30	9	28	32	8
Tri	6	3	18	32	16	19	44	15



Beispiel: *innere Randmasche*



	ν	λ	ϵ_L	l	n	f_L
Hex	3	6	20	38	16	19
Quad	4	4	8	24	20	19
Tri	6	3	11	19	32	39

Bemerkung (innen / außen):

Nur auf Torusnetzen kann mittels der totalen Krümmung zwischen "innen" und "außen" unterschieden werden. Z.B. auf einer Kugeloberfläche ist diese Unterscheidung unmöglich, weil diese planar ist.

Satz (Knoten- / Maschensatz und Euler-Charakteristik für Gebiete):

Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz, $G \subset P$ ein Gebiet mit r Randmaschen m_1, \dots, m_r . Die drei modifizierten topologischen Grundgleichungen für die Teilstruktur Γ_G (bzw. für das Gebiet G) lauten dann:

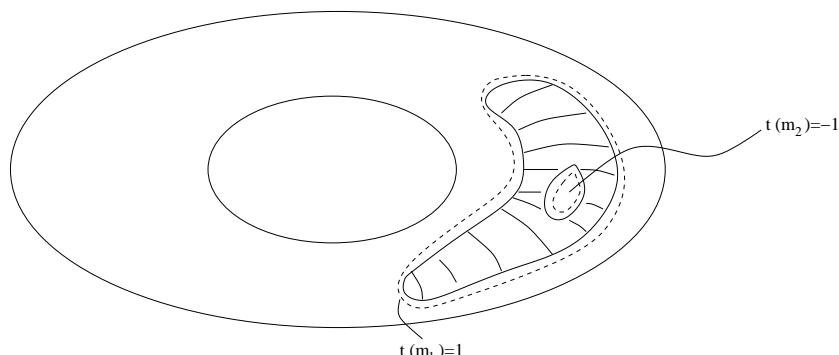
- 1') $\nu\epsilon - \sum_{i=1}^r n_i = 2\kappa$ **[Knotensatz für Gebiete]**
- 2') $\lambda(\mu - r) + \sum_{i=1}^r l_i = 2\kappa$ **[Maschensatz für Gebiete]**
- 3') $\epsilon - \kappa + \mu = \chi_G$ **[Euler-Charakteristik]**

Satz (Totale Krümmung von r Randmaschen):

Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz, $G \subset P$ ein Gebiet mit r Randmaschen m_i der Länge l_i und mit der Anzahl der Randkanten n_i .

$$T := \sum_{i=1}^r t_i = \sum_{i=1}^r \left(\frac{n_i}{\nu} - \frac{l_i}{\lambda} \right) = \chi_G - r$$

Beispiel:

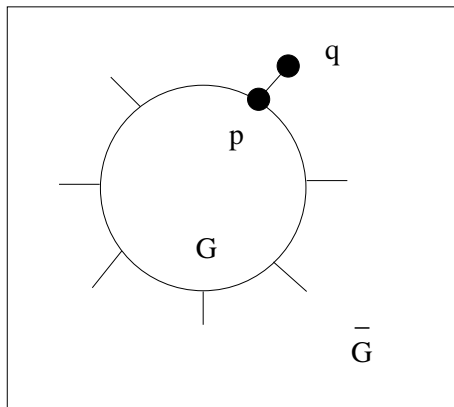


$$\chi_G = 2, r = 2 \longrightarrow T = 0!$$

Bemerkung (Streichung der Randkanten):

Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz, $G \subset P$ ein Gebiet mit einer *einzig*en Randmasche m .

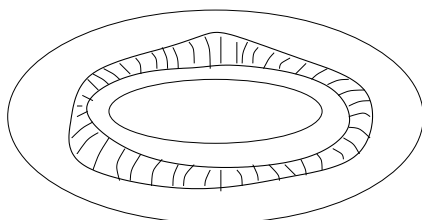
Streichung der Randkanten von $G \Rightarrow \Gamma$ zerfällt in Γ_G und $\Gamma_{\bar{G}}$.



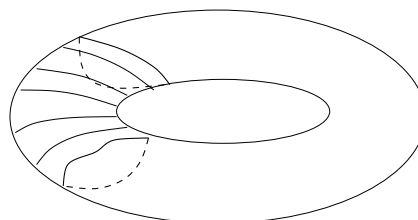
Offensichtlich gilt $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma_G) + \chi(\Gamma_{\bar{G}}) = 2$, da entweder G planar und \bar{G} toroidal oder G toroidal und \bar{G} planar ist.

Bemerkung (Ringgebiete):

Auf dem Torusnetz gibt es aber auch Ringgebiete mit zwei Randmaschen mit $t_1 = t_2 = 0$! Diese haben ebenfalls die Eulersche Charakteristik $\chi(\Gamma_G) = 2$, aber zwei indifferente Randmaschen, die weder als innere noch als äußere zu bezeichnen sind.



Ringgebiet



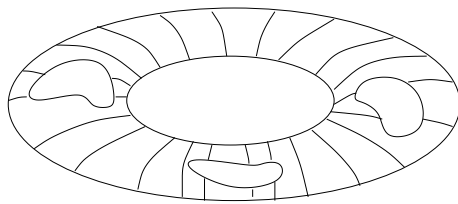
Ringgebiet

Satz (über die totale Krümmung):

Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz, $G \subset P$ ein Gebiet.

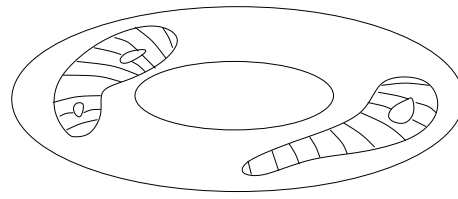
- G toroidal (also $\chi_G = 0$) \rightarrow alle Randmaschen m von G besitzen die totale Krümmung $t(m) = -1$
- G planar (also $\chi_G = 2$) \rightarrow eine Randmaschen m_1 von G besitzt die totale Krümmung $t(m_1) = 1$, alle anderen Randmaschen m von G besitzen die totale Krümmung $t(m) = -1$





$$\chi_G = 0$$

Torusgebiet



$$\chi_G = 2$$

Normalgebiete

Definition (Normalgebiet):

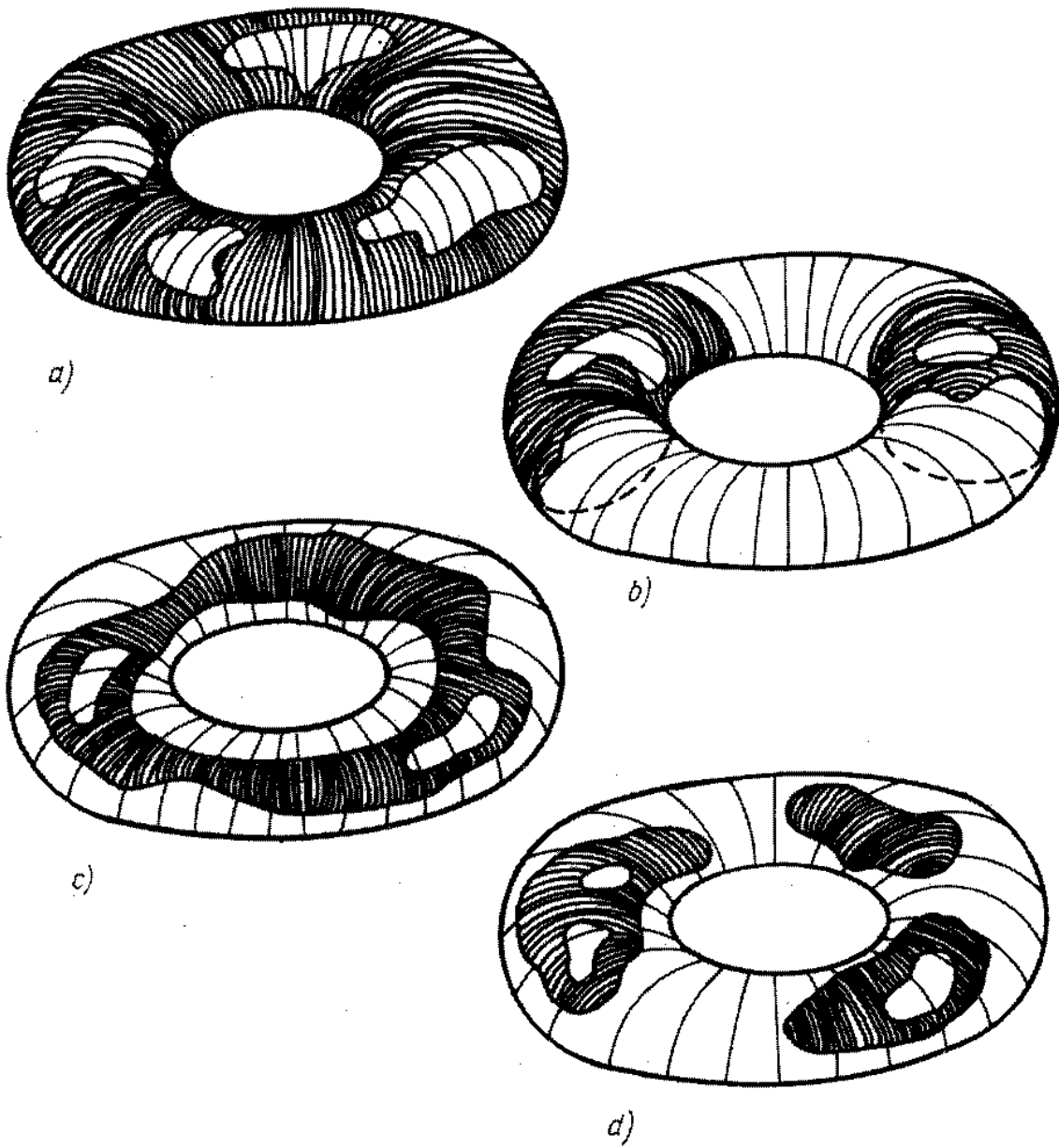
Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz.

G heißt *Normalgebiet* \Leftrightarrow

- $G \subset P$ ein Gebiet und
- $\chi(\Gamma_G) = 2$ und
- G besitzt genau eine äußere Randmasche und eventuell innere Randmaschen.



Beispiel:



Verschiedene Gebietsverteilungen auf einem Torus.



5.4.3 Bildgebiete

Normalgebiete ohne "Löcher" kann man als Träger digitaler Bilder verstehen:

Definition (Bildgebiet):

Sei $\Gamma(\mu, \lambda)$ ein Torusnetz.

B Bildgebiet \Leftrightarrow

- B Normalgebiet in Γ und
- B besitzt nur eine einzige äußere Randmasche und
- B besitzt nur eine einzige (toroidale) Komplementärkomponente.

■

Definition (Höhlen / Löcher):

Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz, $G \subset B \subset P$ ein Gebiet.

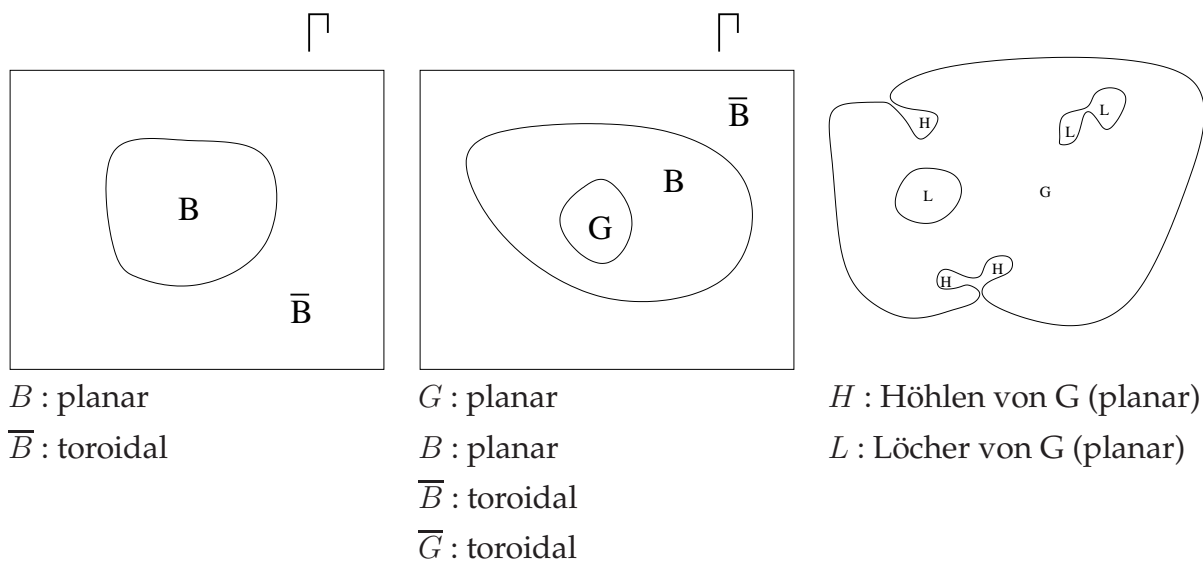
- *Höhlen* von G sind die der äußeren Randmasche von G zugeordneten planaren Komplementärkomponenten von G
- *Löcher* von G sind die den inneren Randmaschen von G zugeordneten planaren Komplementärkomponenten von G

■

Satz (Zerlegungssatz für Bildgebiete):

Jedes Gebiet G , das in einem Bildgebiet B eines Torusnetzes Γ liegt, besitzt genau eine toroidale Komplementärkomponente mit genau einer inneren Randmasche und möglicherweise weitere planare Komplementärkomponenten mit jeweils genau einer äußeren Randmasche.

■



5.5 Picksche Formeln

Satz (1. Picksche Formel):

Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz,

$B \subset P$ ein Bildgebiet von Γ ,

G ein lochfreies Gebiet in B ,

m Randmasche von G ,

$l = \lambda(m)$, $f = \mu - 1$ Anzahl der Kernmaschen von G . Dann gilt

$$\epsilon = \frac{\lambda}{\nu} f + \frac{l}{2} + 1$$

■

- Die erste Picksche Formel setzt also die Anzahl der Punkte ϵ , die Anzahl der Kernmaschen f und die Länge der Randmasche eines lochfreien Gebietes in Beziehung zueinander.

Beweis:

Sei also G ein lochfreies Gebiet in B .

Dann hat G genau eine äußere Randmasche m (und ev. Höhlen).

Die topologischen Grundgleichungen für G lauten:

$$1'' \quad \nu\epsilon - n = 2\kappa$$

$$2'' \quad \lambda(\mu - 1) + l = 2\kappa$$

$$3'' \quad \epsilon - \kappa + \mu = 2$$

Es folgt :

- 15) $\nu\epsilon - n = \lambda f + l$ [1''=2'']
 16) $\nu\epsilon - \nu\frac{l}{\lambda} - \nu = \lambda f + l$ [wegen $\frac{n}{\nu} - \frac{l}{\lambda} = 1$ für eine äußere Randmasche
 $\rightarrow n$ ersetzen.]
 17) $\epsilon - \frac{l}{\lambda} - 1 = \frac{\lambda}{\nu}f + \frac{l}{\nu}$ [Div. durch ν]
 18) $\epsilon = \frac{\lambda}{\nu}f + l\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\nu}\right) + 1$
 19) $\epsilon = \frac{\lambda}{\nu}f + \frac{l}{2} + 1$ [wegen $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2}$ für $\chi_{\Gamma} = 0$]

Bemerkung (Flächeninhalt):

- Mit der 1. Pickschen Formel ist die Fläche eines Gebietes berechenbar, wenn einer Kernmasche der Flächeninhalt 1 zugeordnet wird.

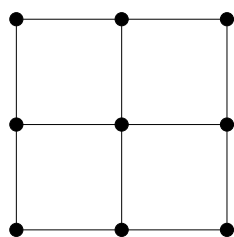
Satz (Satz von Pick (1899)):

Der Flächeninhalt F eines beliebigen nichtentarteten Polygons, dessen Eckpunkte Gitterpunkte sind und das im Inneren i Gitterpunkte und auf dem Rand a Gitterpunkte besitzt, läßt sich durch folgende Beziehung bestimmen :

$$F = i + \frac{a}{2} - 1.$$

■

Beispiel: zum Satz von Pick



$$\begin{aligned} i &= 1 \\ a &= 8 \\ F &= 4 \end{aligned}$$

■

Bemerkung (Verbindung zur 1. Pickschen Formel):

- ▶ im Viereckgitter : $\frac{\lambda}{\nu} = 1$
- ▶ $\epsilon = i + a$
- ▶ $F \equiv f, a \equiv l$
- ▶ $f = \frac{\nu}{\lambda} \left(\epsilon - \frac{l}{2} - 1 \right) = i + a - \frac{a}{2} - 1 = i + \frac{a}{2} - 1$

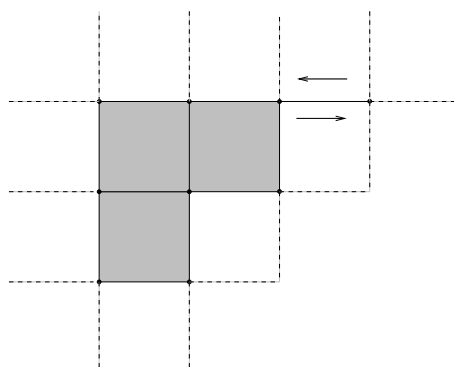
Bemerkung (Entartetes Polygon):

Die 1. Picksche Formel gilt auch für *entartete Polygone*:

Die Randmasche eines entarteten Polygons ist von der Form $\langle \dots, p, q, p, \dots \rangle$,
d.h. die Randmasche kann in sich selbst zurücklaufen (Nadel).

Beispiel: Entartetes Polygon

$$\epsilon = 9, f = 3, \mu = 4, l = 10, n = 14$$



Bemerkung (Feststellungen für die 1. Picksche Formel):

- ▶ gültig für alle Torusnetze
- ▶ gültig für entartete Polygone
- ▶ reine topologische Gesetzmäßigkeit

Satz (2. Picksche Formel):

Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz, $B \subset P$ ein Bildgebiet von Γ , G ein Gebiet in B mit 1 äußeren Randmasche m_a und mit 1 inneren Randmasche m_i , $\epsilon_L =$ Punktzahl des Loches L von m_i , $f_L =$ Anzahl aller Kernmaschen von L , $l_i = \lambda(m_i)$. Dann gilt

$$\epsilon_L = \frac{\lambda}{\nu} f_L - \frac{l_i}{2} + 1.$$

**Bemerkung (zur 2. Pickschen Formel):**

Die zweite Picksche Formel verknüpft die durch eine innere Randmasche der Länge l_i eingeschlossenen Punkte ϵ_L und Kernmaschen f_L miteinander. Die Punkte der inneren Randmasche gehören nicht zum Loch und werden nicht gezählt.

Beweis:

Seien l_a und l_i die Längen der äußeren und inneren Randmasche sowie n_a und n_i die Anzahlen ihrer Randkanten.

Die topologischen Grundgleichungen für G sind dann:

$$\begin{aligned} 1' \quad \nu \epsilon - n_i - n_a &= 2\kappa \\ 2' \quad \lambda(\mu - 2) + l_i + l_a &= 2\kappa \\ 3' \quad \epsilon - \kappa + \mu &= 2 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\nu \epsilon - n_i - n_a = \lambda f + l_i + l_a \quad [1' = 2']$$

Definiere weiterhin:

- $L := \{p | p \text{ Lochpunkt von } G\}$
- $G^* := G \cup L$ lochfreies Gebiet
- $\epsilon_L := \epsilon(L)$, $\epsilon^* := \epsilon(G^*)$
- $f^* := \mu(G^*) - 1$
- $f_L :=$ Anzahl aller Kernmaschen von G^* , die nicht Kernmaschen von G sind.

Dann gilt

$$\epsilon^* = \epsilon + \epsilon_L \quad \text{und} \quad f^* = f + f_L$$

Berücksichtigt man die erste Picksche Formel für ϵ^* und f^* , dann folgt aus obiger Gleichung

$$20) \quad \nu \epsilon_L = \lambda f_L - (1 - \frac{\nu}{2})l_a - n_a - l_i - n_i + \nu$$

In dieser Gleichung sollen die Bezüge auf die äußere Randmasche eliminiert werden, d.h. n_a, l_a , aber auch n_i . Wegen

$$21) \quad \frac{n_a}{\nu} - \frac{l_a}{\lambda} = 1 \quad [\text{totale Krümmung von } m_a]$$

$$22) \quad \frac{n_i}{\nu} - \frac{l_i}{\lambda} = -1 \quad [\text{totale Krümmung von } m_i]$$

und wegen $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ für $\chi_\Gamma = 0$ folgt

$$23) \quad n_a + (1 - \frac{\nu}{2})l_a = \nu \quad [\text{aus 21) mit 16)]$$

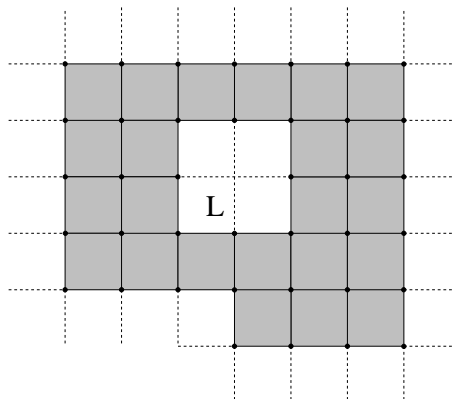
$$24) \quad n_i + l_i = -\nu + (1 + \frac{\nu}{2})l_i$$

Einsetzen in 20) liefert die zweite Picksche Formel

$$25) \quad \boxed{\epsilon_L = \frac{\lambda}{\nu} f_L - \frac{l_i}{2} + 1}$$

Beispiel: zur 2. Pickschen Formel

Es ist mit den obigen Abkürzungen: $l_a = 22, l_i = 8, n_a = 26, n_i = 4, \epsilon_L = 1, f_L = 4$



Satz (3. Picksche Formel):

(1 äußere und $r - 1$ innere Randmaschen)

Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz, $B \subset P$ ein Bildgebiet von Γ ,

G ein beliebiges Gebiet in B , l = Gesamtlänge der Randmaschen von G ,

f = Anzahl der Kernmaschen von G , r = Anzahl der Randmaschen von G .

$$\epsilon = \frac{\lambda}{\nu} f + \frac{l}{2} - (r - 2)$$

Beweis:

Sei G also irgendein Gebiet in B .

Sei r die Anzahl der Randmaschen von G .

Dann hat G eine äußere und $r - 1$ innere Randmaschen.

Sei G^* das lochfreie Gebiet von G , dann liefert die 1. Picksche Formel:

$$26) \epsilon^* = \lambda \frac{f^*}{\nu} + \frac{l_a}{2} + 1.$$

Außerdem gilt für alle Löcher von G nach der 2. Pickschen Formel:

$$27) \sum_{j=1}^{r-1} \epsilon_{L,j} = \frac{\lambda}{\nu} \sum_{j=1}^{r-1} f_{L,j} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r-1} l_{L,j} + (r - 1)$$

$$28) \boxed{\epsilon = \frac{\lambda}{\nu} f + \frac{l}{2} - (r - 2)} \quad [\text{Differenz von 26) und 27)]$$

Bemerkung (χ_G):

Sei G ein Gebiet eines Bildgebietes mit einer äußeren Randmasche,

$f =$ Anzahl der Kernmaschen von G , $r =$ Anzahl der Randmaschen von G .

Dann ist

$$\chi_G = \epsilon - \kappa + f + r = 2.$$

Definition (Eulersche Zahl):

Sei G ein Gebiet eines Bildgebietes, $f =$ Anzahl der Kernmaschen von G .

$$\psi_G^{(2)} := \epsilon - \kappa + f$$

heißt *Eulersche Zahl*. ■

Satz (zur Eulerschen Zahl (a)):

Sei G ein Gebiet eines Bildgebietes, $L =$ Anzahl der Löcher von G ,

$r =$ Anzahl der Randmaschen von G . Dann ist

$$\psi_G^{(2)} = 2 - r = 1 - L$$
■

Satz (zur Eulerschen Zahl (b)):

Sei G ein Gebiet eines Bildgebietes, $L =$ Anzahl der Löcher von G .

Besteht G aus C Komponenten, dann ist

$$\psi_G^{(2)} = C - L.$$
■

Bemerkung (Folgerung für Randmaschen- / Kontursuche-Verfahren):

Sei $\Gamma(\nu, \lambda) = [P, N, Z]$ ein Torusnetz, $G \subset B \subset P$ ein Gebiet, G planar.

- Die totale Krümmung ist entscheidend bzgl. der globalen Gestalt unter der Voraussetzung:

Die Randmaschen werden komplett "aufgenommen".

Für die äußere Randmasche gilt

$$\frac{n}{\nu} - \frac{l}{\lambda} = 1$$

und $t = 1$. Da bei der Bestimmung der Randmasche gleichzeitig n und l bestimmt werden, kann die globale Entscheidung zwischen äußerer und innerer Randmasche ($t = -1$) allein topologisch durch ein lokales Verfahren herbeigeführt werden.

- Sei

$N := \sum_{i=1}^r n_i$ die Anzahl der Randkanten des Gebietes G und

$L := \sum_{i=1}^r l_i$ die Länge der Randmaschen von G .

Dann folgt

$$T = \sum_{i=1}^r t_i = \frac{1}{\nu}N - \frac{1}{\lambda}L = 2 - r.$$

Also liefert

$$r = 2 + \frac{L}{\lambda} - \frac{N}{\nu}$$

die Anzahl der Randmaschen.

- Messung der totalen Krümmung:

Sei

$m_i :=$ Anzahl der inneren Randmaschen und

$m_a :=$ Anzahl der äußeren Randmaschen.

Dann ist

$$T = m_a - m_i = \frac{N}{\nu} - \frac{L}{\lambda}.$$

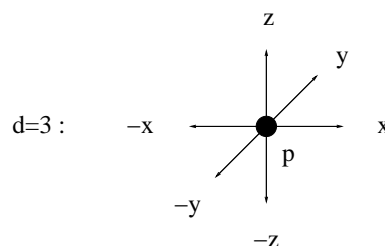
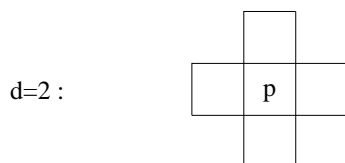
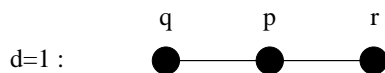
Kapitel 6

Kontursuche und Oberflächendetektion

6.1 Kontursuche

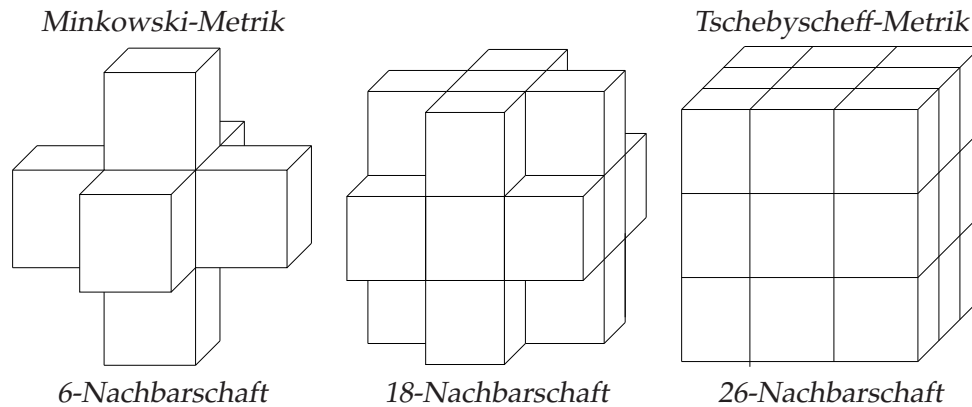
Bemerkung (zum Segmentierungsprädikat und zum Gitter):

- ▶ Segmentierungsprädikat P für $x \in R_O : P(f_{m,n}) = \text{TRUE}$
bzw. $x \in R_B : P(f_{m,n}) = \text{FALSE}$
- ▶ Segmentierungsprädikate festgelegt z.B. durch:
Intensität, Energie, Gradientenbetrag, Betrag der 2. Ableitung, Texturmaße.
- ▶ In einem Gitter \mathbb{Z}^d können höchstens d -dimensionale Objekte repräsentiert werden. Die Kodimension eines Objektes ist die Dimension des von ihm im Gitter \mathbb{Z}^d ausgefüllten Teilraumes. Die Kodimension ist höchstens gleich der (topologischen) Einbettungsdimension.
Ein Punkt $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ besitzt genau $2d$ Nachbarn (Minkowski-Metrik).



- ▶ Mit wachsender Dimension d sind Mischformen von Nachbarschaften der Minkowski-Metrik und Nachbarschaften der Tschebyscheff-Metrik möglich.

Beispiel: $d = 3$



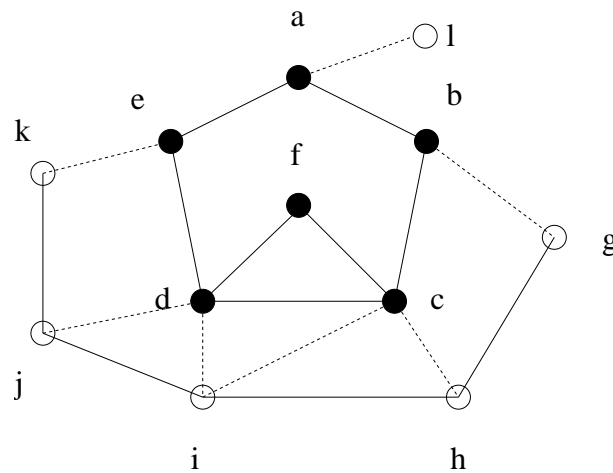
- ▶ Im Falle d -dimensionaler binärer Objekte interessieren nur die Randpunkte.
 - $d=2$: Die Menge aller Randpunkte heißt *Kontur*.
 - $d=3$: Die Menge aller Randpunkte heißt *Oberfläche*.
 - allgemein : Die Randpunkte bilden eine $(d - 1)$ -dimensionale Hyperfläche.
- ▶ Verfahren zur Kontursuche oder Oberflächendetektion beruhen auf einem allgemeinen topologischen Verfahren zur Bestimmung der Randmasche in (homogenen) orientierten Nachbarschaftsstrukturen.

6.1.1 Randmaschensuche-Verfahren

Problem: Bestimme die Randmasche eines Gebietes G , wenn die Liste der Randpaare und die Nachbarschaftszyklen gegeben sind.

Beispiel:

Sei $\Gamma = [P, N, Z]$ eine Struktur, $G \subset P$ ein Gebiet mit
 $G = \{a, \dots, f\}, P = G \cup \{g, \dots, l\}$



Die gestrichelten Kanten sind die Randkanten.

Nachbarschaftszyklen für alle $p \in P$:

- Zykluslänge kann unterschiedlich sein.

$$z(a) := \langle b, e, l \rangle$$

$$z(b) := \langle a, g, c \rangle$$

⋮

$$z(k) := \langle e, j \rangle$$

Randpunkte: a, b, c, d, e

Randpaare: $\{(a, l), (b, g), (c, h), (c, i), (d, i), (d, j), (e, k)\}$

Randmasche von G : $\langle b, c, d, e, a \rangle$

Bemerkung:

Sei p ein Randpunkt, dann

- $q \in z(p) \wedge q \in G \Rightarrow q$ Randpunkt oder Kernpunkt
- $q \in z(p) \wedge q \notin G \Rightarrow q$ Element einer Randkante



Randmaschensuche-Algorithmus

Gegeben: eine Struktur $\Gamma = [P, N, Z]$, ein Gebiet $G \subset P$ mit $|G| > 1$

Prozedur:

procedure border-mesh;

begin

 get a list $L = \{(p, q) | p \in G, q \in \bar{G} \cap N(p)\}$ // border-mesh list

$m := \{\}$; // initialise border-mesh

 while $L \neq \{\}$ do begin

 (1) $(p, q) := (p_0, q_0)$; // choose arbitrary border pair

$L := L \setminus (p, q)$;

$m := m \cup p$; // p_0 is a point of a border-mesh

 while (border mesh is not closed) do begin

 (2) choose $z(p) = \langle \dots, q, r, \dots \rangle$;

$r := [q] + 1$; // choose r following q as a neighbor of p

 if $r \in \bar{G}$ then begin

 (3) $L := L \setminus (p, r)$; // (p, r) gets the same border mesh as (p, q)

$q := r$;

 end;

 else begin // $r \in G$ is a further point of the border-mesh

 while $r \in G$ do begin

 (4) $m := m \cup r$;

 choose $z(r) = \langle \dots, p, s, \dots \rangle$;

$s := [p] + 1$;

$(p, r) := (r, s)$;

 end; // while

 (5) $L := L \setminus (r, s)$; // (r, s) is a further border pair

$(p, q) := (r, s)$;

 end; // if

 end; // border-mesh $\{p_0, \dots\}$ is closed

 end; // all border-meshes are found

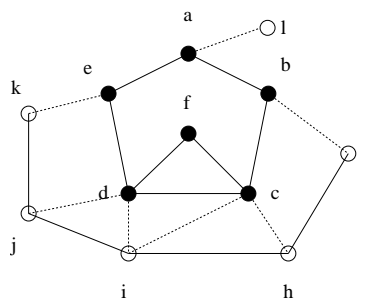
end;

Beispiel: zum Randmaschensuche-Algorithmus

Anwendung auf letztes Beispiel mit:

$$G = \{a, \dots, f\}, P = G \cup \{g, \dots, l\}$$

$$L = \{(b, g), (c, h), (c, i), (d, i), (d, j), (e, k), (a, l)\}$$



(a) $(p, q) = (p_0, q_0) = (c, h)$

$$m = \langle c \rangle$$

Streiche (c, h) in L

(b) $(p, q) = (c, h)$

$$z(c) = \langle b, \boxed{h}, i, d, f \rangle$$

$$r = i \notin G$$

(c) $L = \{(b, g), (d, i), (d, j), (e, k)\}$; **streiche** $(c, h), (c, i)$

$$(p, q) = (c, i)$$

$$z(c) = \langle b, h, \boxed{i}, \underline{d}, f \rangle$$

$$r = d \in G$$

(d) $m = \langle c, d \rangle$

$$z(d) = \langle f, \boxed{c}, \underline{i}, j, e \rangle$$

$$s = i \in \overline{G}$$

(e) $L = \{(b, g), (d, j), (e, k)\}$; **streiche** (d, i)

(f) $(p, q) = (d, i)$

$$z(d) = \langle f, c, \boxed{i}, \underline{j}, e \rangle$$

$$r = j \in \overline{G}$$

(g) $L = \{(b, g), (e, k)\}$; **streiche** (d, j)

⋮

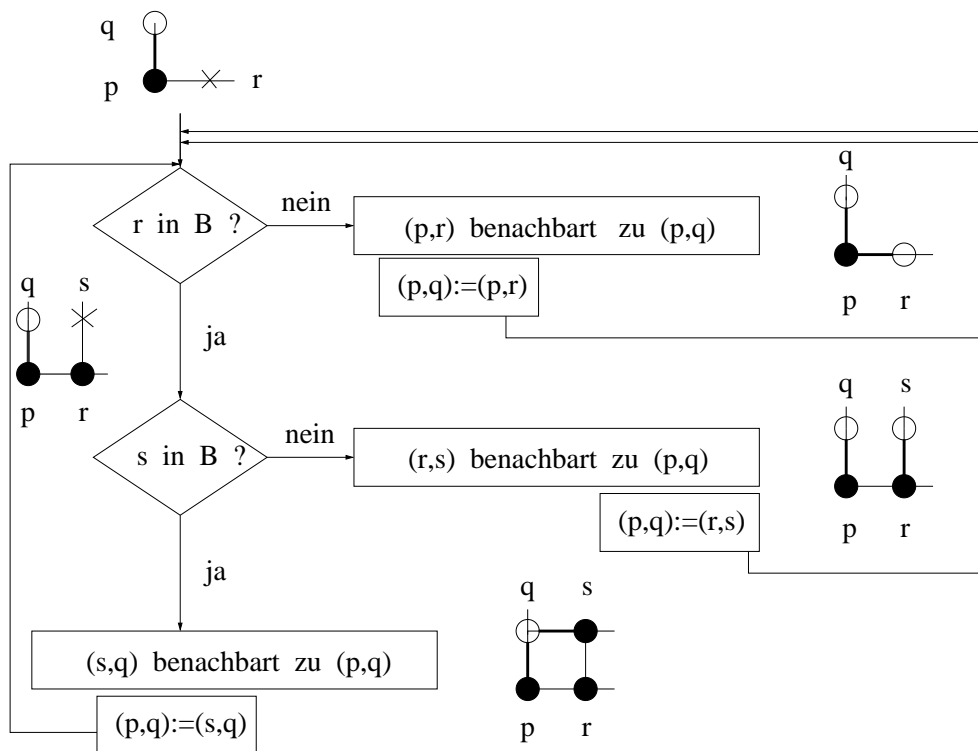


6.1.2 Kontursuche-Verfahren

Bemerkung (Nachbarsuche):

Sei B ein Objekt im homogenen toroidalen Gitter \mathbb{Z}^2 .

- Vorausgesetzt wird eine Randkanten-Liste.
- Jede Randkante von B besitzt genau zwei benachbarte Randkanten (\mathcal{N}_4).
- Der folgende Algorithmus ermittelt zu einer Randkante $\{p, q\}$ die benachbarte Randkante:
Gegeben sei die Randkante $\{p, q\}$. Ist $\{p, r\}$ auch eine Randkante oder Kante einer Randmasche ?



- Der klassische Kontursuchealgorithmus ist noch einfacher, da keine Listenverarbeitung erforderlich ist.

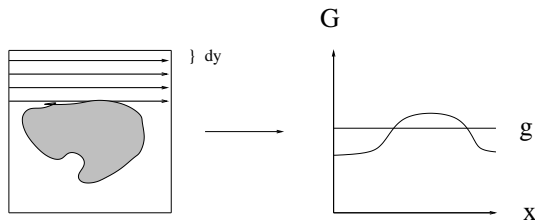
Kontursuche- / Konturfolge-Algorithmus

Gegeben:

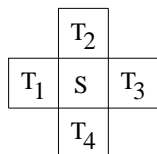
- B ein Objekt in \mathbb{Z}^2
- Orientierung "im Uhrzeigersinn"
- B festgelegt durch ein Segmentierungsprädikat P

Algorithmus:

- (a) Suche des Startpunktes
 → erster Bildpunkt, der das Segmentierungsprädikat erfüllt



- (b) Test der Umgebung in Uhrzeigerrichtung (modulo 4) für \mathcal{N}_4 :



Links des Randweges liegen stets Untergrundpunkte.

- (c) Schließen der Kontur, wenn die aktuelle Randkante den Startpunkt findet.

2	3	4	5
1			6
10	9	8	7

3	2/4	5	6
	1		7
11	10/12	9	8

1	2/12	3	4
	11		5
9	8/10	7	6

1		1	2
	9	10	3
7	6/8	5	4

2 Objekte, da 4-N
 (Annahme : Es existieren
 1-Punkt-Objekte)

Wählt man die 4-Nachbarschaft für den Objektzusammenhang, so erfordert die Definition der Randpunkte die 8-Nachbarschaft (und umgekehrt).

Gegeben:

- Bildspeicher $F : (X,Y) \in F = X_{MAX} \times Y_{MAX}$
- Markierungsspeicher $M : [X,Y] \in M = X_{MAX} \times Y_{MAX}$
- (X_{P_1}, Y_{P_1}) erster in der Zeile gefundener Objektpunkt
- (X_Q, Y_Q) letzter Untergrundpunkt
- Starte mit: $X_Q = X_{P_1} - 1, Y_Q = Y_{P_1}$ den Test der Nachbarschaftspunkte von (X_{P_1}, Y_{P_1})

Prozeduren: - INIT : Initialisierung des Markierungsspeichers
 - EVAL : Aktualisierung des Markierungsspeichers
 - TEST : Überprüfung des Segmentierungsprädikates

Implementierung:

```

proc INIT;
  for [X,Y] from [0,0] to [XMAX-1,YMAX-1] do f[X,Y]:=0;
  f[XP,YP]:=1;
end of proc;

proc EVAL(X,Y);
  ...
  f[X,Y]:=1; //Markierung anbringen
  ... //Ablegen Konturpunkt in Liste
end of proc;

proc TEST(X,Y): integer;
  RCODE : integer;
  if (X<0 or X>=XMAX) then RCODE:=0;
  else if (Y<0 or Y>=YMAX) then RCODE:=0;
  else if (f(X,Y)>=THRESHOLD and f[X,Y] = 0) then RCODE:=1;
  else RCODE:=0;
  return RCODE;
end of proc;

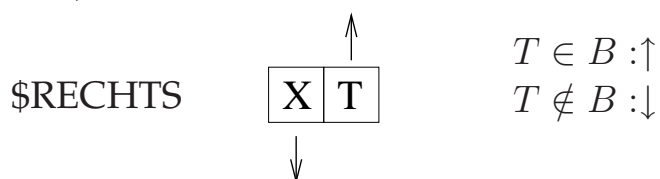
procedure CONTOUR;
begin
  ...
  INIT;
  ...
  $OBEN // Test oberer Nachbar
  begin
    (X,Y):=(XP,YP-1);
    if TEST(X,Y)=1 then { EVAL(X,Y); YP:=Y; goto LINKS; }
    else goto RECHTS;
  end

```

←	T	→
	X	

$T \in B : \leftarrow$
 $T \notin B : \rightarrow$

end;



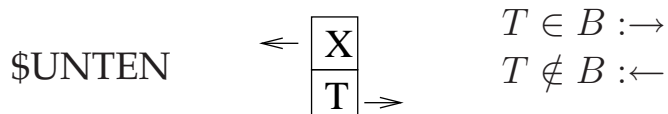
begin

(X,Y):=(XP+1,YP);

if TEST(X,Y)=1 then { EVAL(X,Y); XP:=X; goto OBEN; }

else goto UNTEN;

end;



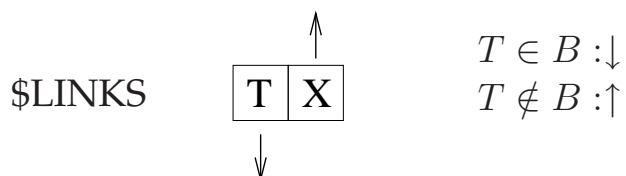
begin

(X,Y):=(XP,YP+1);

if TEST(X,Y)=1 then { EVAL(X,Y); YP:=Y; goto RECHTS; }

else goto LINKS;

end;



begin

(X,Y):=(XP-1,YP);

if TEST(X,Y)=1 then { EVAL(X,Y); XP:=X; goto UNTEN; }

else goto ENDE;

end;

\$ENDE

begin

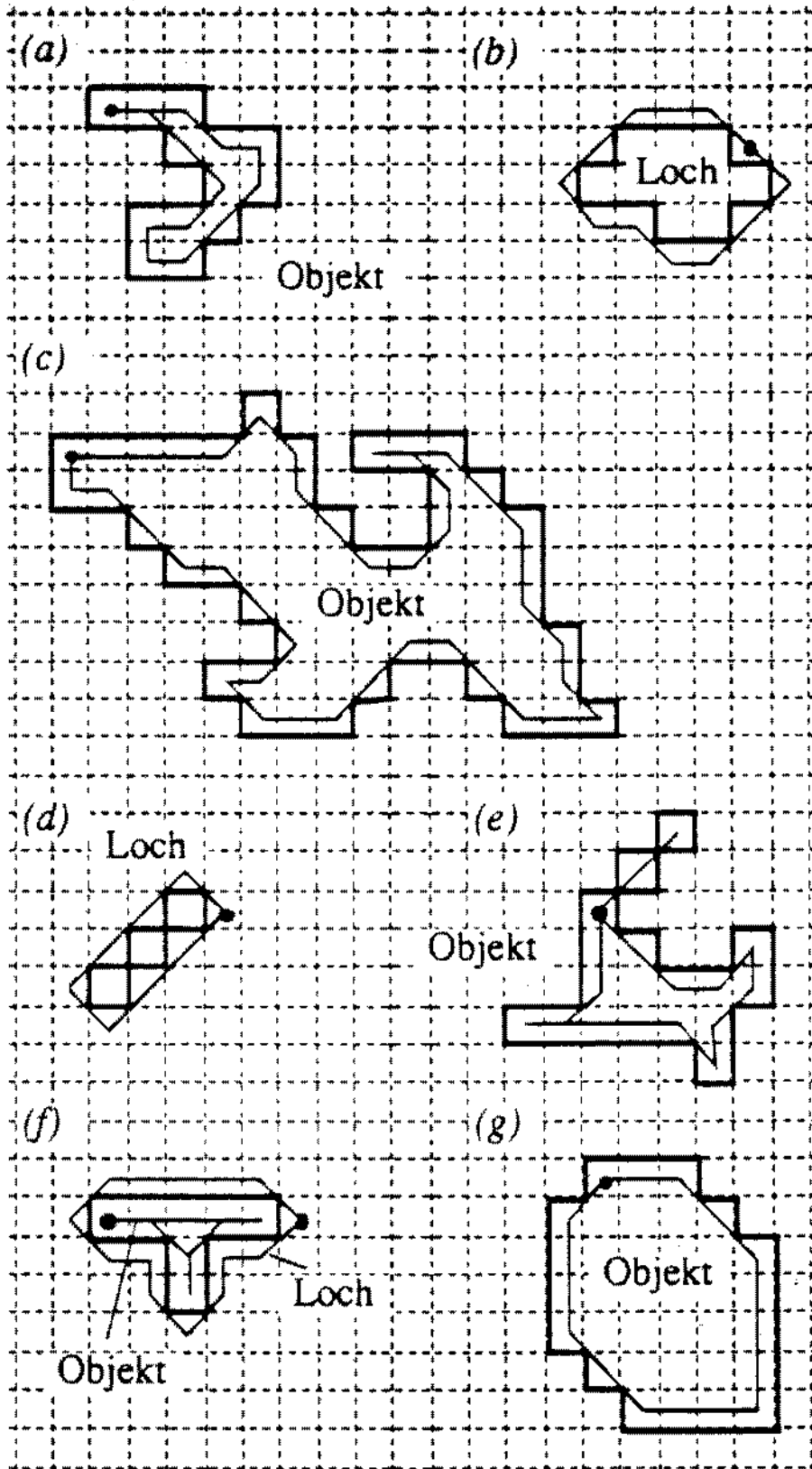
if not (X, Y) = (XP₁, YP₁) then goto OBEN;

end;

end of procedure;

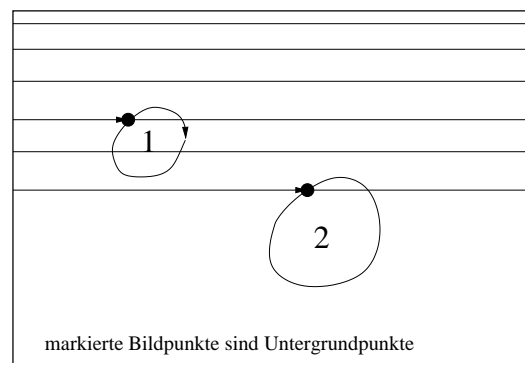
Beispiel: Ergebnisse des Kontursuche-Algorithmus

Objekt- und Lochstrukturen für 8-Nachbarschafts-Test

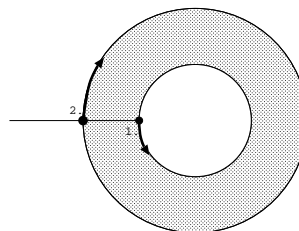


6.1.3 Erweiterungen des Kontursuche-Algorithmus

- ▶ Bei mehr als 1 Objekt:
 1. Objektsuche (Startpunktsuche)
 2. Kontursuche
(Ablegen der Kontur in Liste, Testprozedur fragt Markierungsspeicher ab)
 3. Füllen des Objektes (alle $[x, y]_{\text{Obj}} = 1$)



- ▶ bei Objekten mit Löchern: hierarchische Struktur von Kontursuche-Prozessen



1. Durchlauf:
 - a. Detektion Startpunkt und Kontursuche des Loches
 - b. Markieren des Lochgebietes
2. Durchlauf:
 - a. Detektion Startpunkt und Kontursuche des Objektgebietes
 - b. Markieren des Objektgebietes

Füllen:

- im 1. Durchlauf: $0 \rightarrow 1$
- im 2. Durchlauf: $0 \rightarrow 1$ und $1 \rightarrow 0$ (im Lochgebiet)

Analyse von Konturen erfolgt durch Listenverarbeitung:

Definition (Freeman-Code):

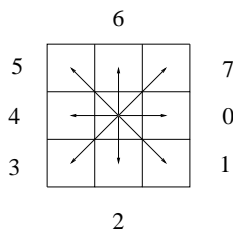
Sei $k = ((x_i, y_i))_{i \geq 0}$ eine Kontur eines Objektes.
 Es gilt für k : $x_{i+1} = x_i + dx_i$, $y_{i+1} = y_i + dy_i$.

k kann in eine neue Liste l von Richtungscodierungen transformiert werden,
 z.B. mittels *Freeman- / Richtungs- / Ketten-Code FC*:

l besteht dann aus $(L, (x_0, y_0), r_1, r_2, \dots)$

mit: L Länge, (x_0, y_0) Startpunkt, r_i Richtungen.

Die Richtungen r_i ergeben sich aus:



Lookup-Tabelle:

r	0	1	2	3	4	5	6	7
dx	1	1	0	-1	-1	-1	0	1
dy	0	1	1	1	0	-1	-1	-1

**Bemerkung (Eigenschaften des Kontursuche-Algorithmus):**

- ▶ sequentieller, nichtlinearer (kontextsensitiver) Operator
- ▶ $h_K = h_{Kf}\{h_{Kv}\}$

h_{Kf} : Konturfolge-Operator

entscheidet kontextsensitiv über die Richtung des Fortschreitens der Kontur.

h_{Kv} : Vorverarbeitungs-Operator

z.B. : Glättung, 1. Ableitung, 2. Ableitung, Binarisierung

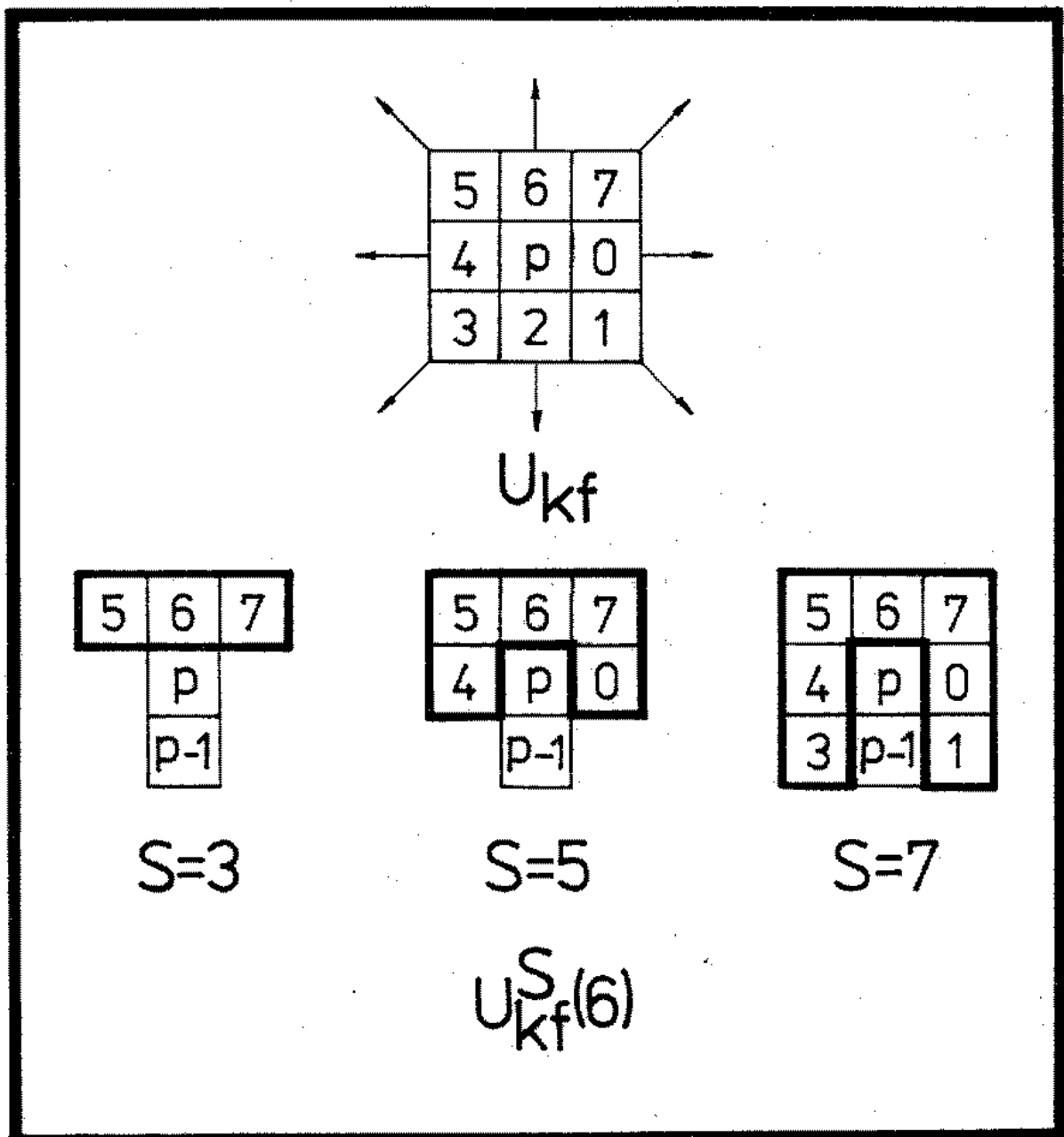
- ▶ Modifikationen des Kontursuchprogramms:

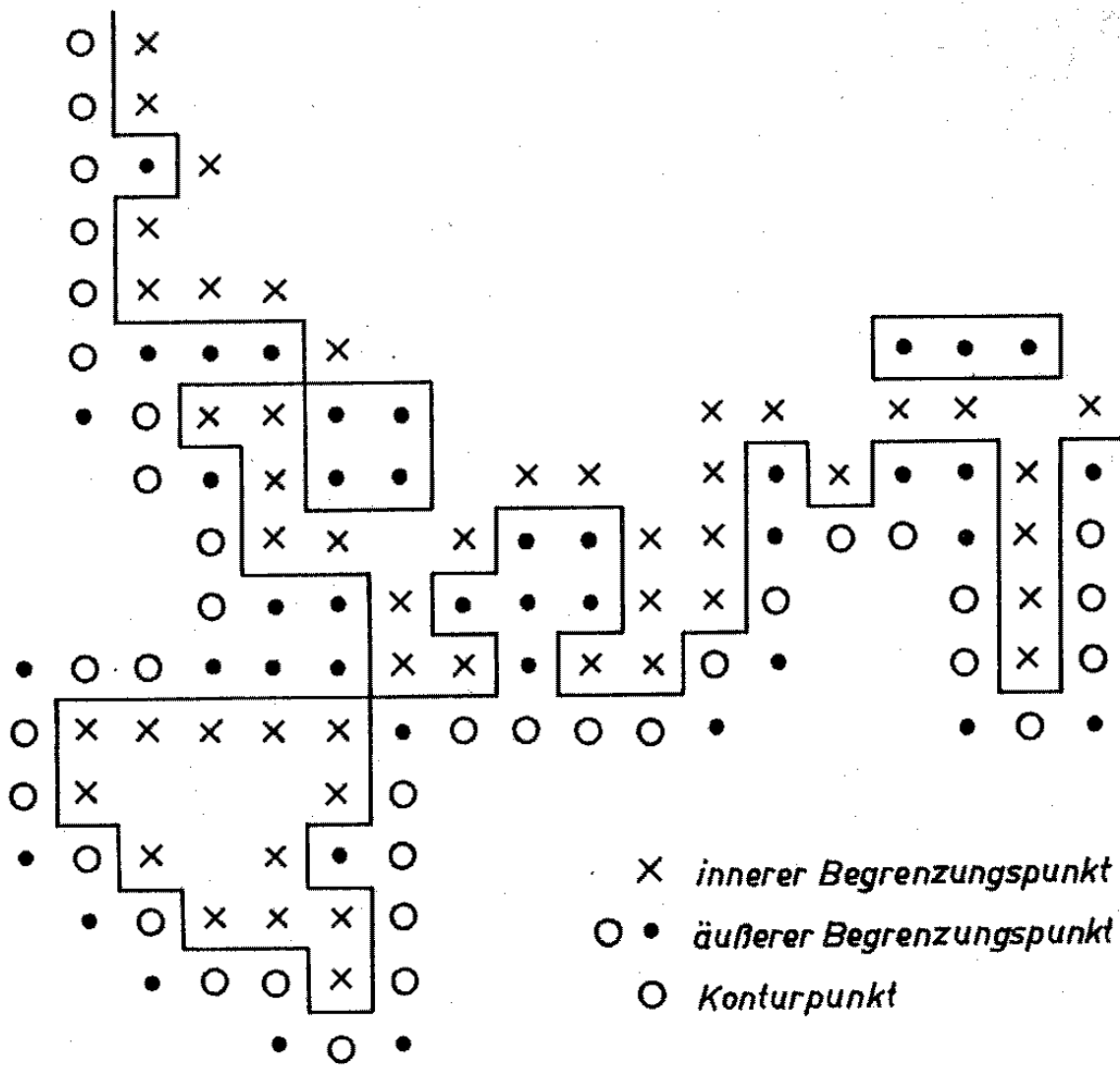
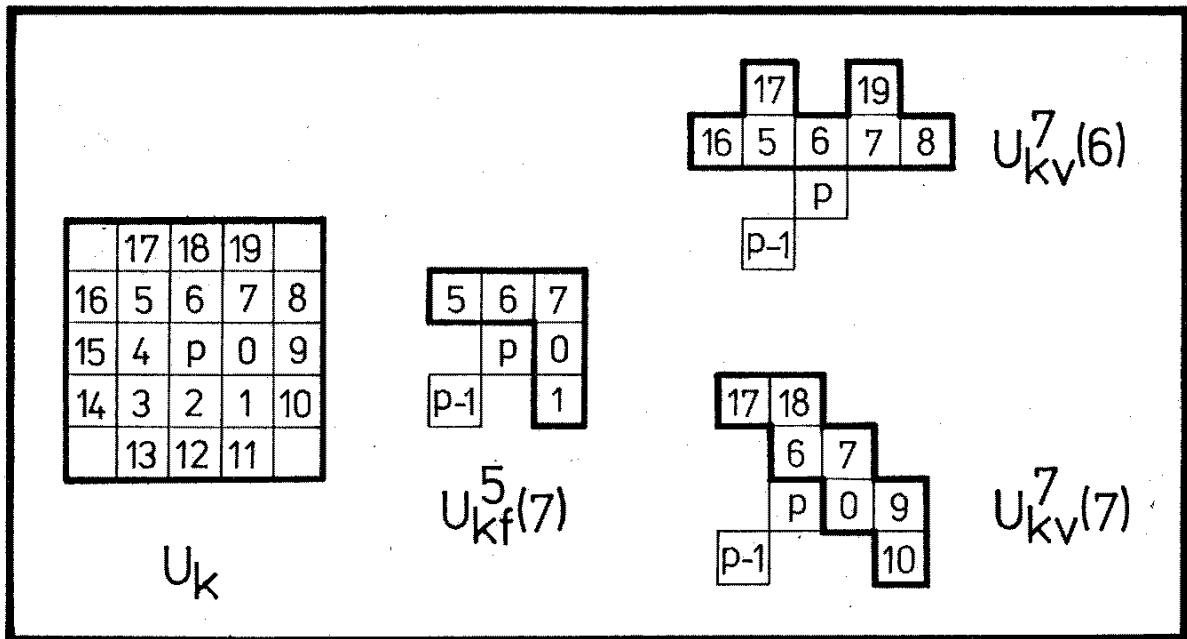
(a) bezüglich Segmentierungsprädikat

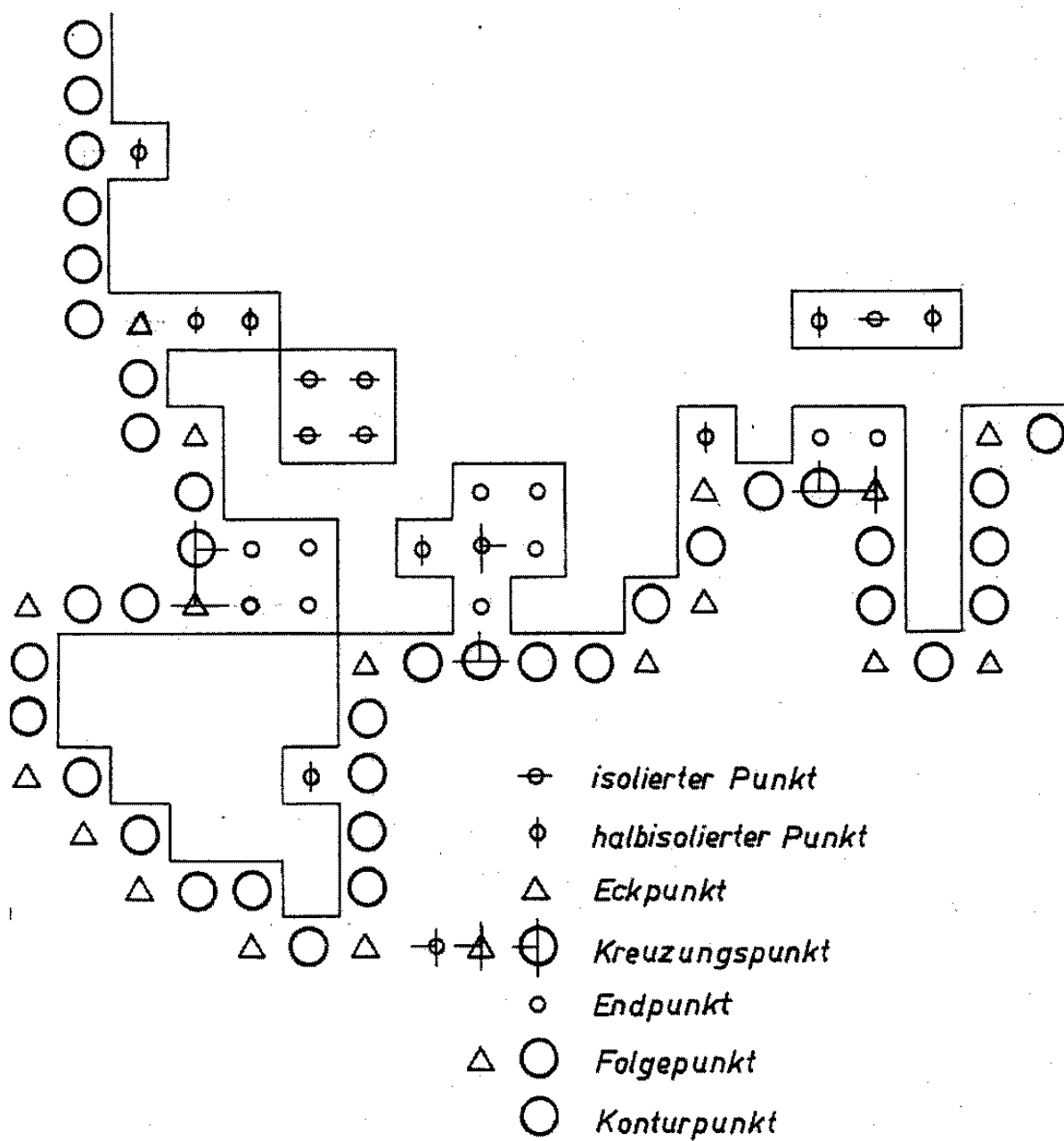
(Schwelle, Gradient, Krümmung, ..., Textur)

(b) Modifikation des Suchraums des Operators

ergibt völlig andere Operatoren als Grundschema in 4-N, insbesondere wenn h_{Kv} und h_{Kf} miteinander verbunden werden.

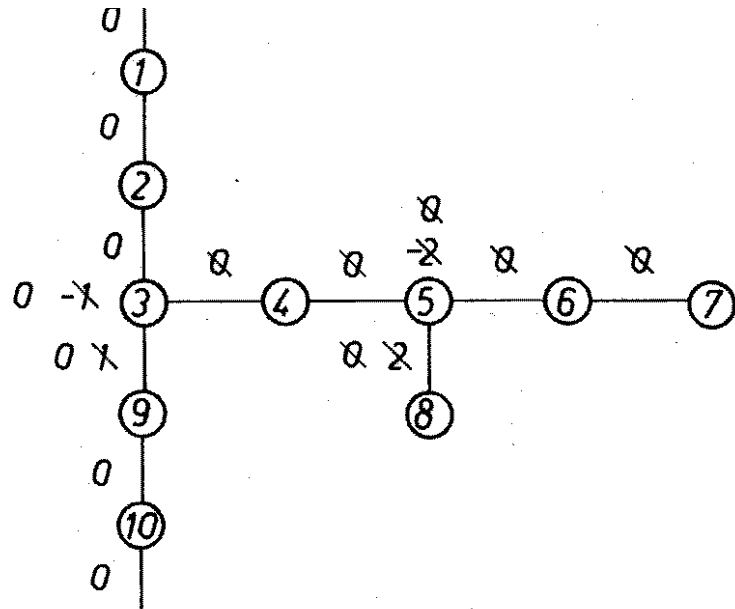
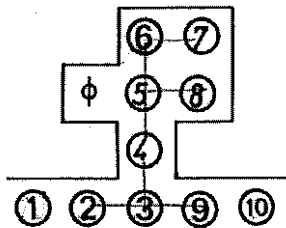






Redundanzbeseitigung mittels Konturbaum

1. Paß : halbisolierte Punkte
2. Paß : isolierte Punkte
3. Paß : Baum



6.2 3D-Objekte

Bemerkung (Modellierung von N-dimensionalen Objekten):

- (a) Theorie N -dimensionaler Zellenkomplexe C^N :
 N -dimensionale Zellen sind definiert durch N -dimensionale Einheitswürfel, die den Zellenraum C^N aufspannen.
- (b) Theorie N -dimensionaler Gitterpunkträume \mathbb{Z}^N :
 Gitterpunkte bilden die Basis des N -dimensionalen Gitters.
 Gitterpunkte sind die Schnittpunkte der das Orthogonalgitter erzeugenden Gitterlinien.

Beide Zugänge sind zueinander dual.

Beispiel: $N = 3$

	C^3	\mathbb{Z}^3
Basiselemente	Einheitswürfel	Gitterpunkte
Begrenzungen der BE	Flächen	Kanten
Begrenzungen der Begrenzungen der BE	Kanten	Flächen
konstruierte Elemente	Punkte	Würfel



6.2.1 Zellenkomplexe

Definition (Zellenkomplex):

- $[E, B]$ heißt Zellenkomplex \Leftrightarrow
 E (endliche) Menge und $B \subset E \times E$ irreflexive, antisymmetrische, transitive Relation.
- B heißt Berandungsrelation.



Erinnerung: Eine Nachbarschaftsrelation $N \subset P \times P$ einer Nachbarschaftsstruktur $[P, N]$ ist symmetrisch!

Definition ((Zellen-)Dimension):

Sei $C = [E, B]$ ein Zellenkomplex.

- Zum Zellenkomplex C gehört eine Funktion $\dim: E \rightarrow \mathbb{N}$, für die gilt:

$$\forall e, e' \in E : (e, e') \in B \Leftrightarrow \dim(e) < \dim(e')$$

- Die Zahl $\dim(e)$ heißt *Dimension der Zelle* e .

**Definition (Zelle / Punkt / Strecke / Kante / Würfel):**

Sei $C = [E, B]$ ein Zellenkomplex und \dim die Zellendimension von C .

- e (k -dimensionale) Zelle $:\Leftrightarrow e \in E$ und $\dim(e) = k$
- e Punkt $:\Leftrightarrow$ 0-dimensionale Zelle
- e Kante / Strecke $:\Leftrightarrow$ 1-dimensionale Zelle
- e Fläche / Pixel $:\Leftrightarrow$ 2-dimensionale Zelle
- e Würfel / Voxel $:\Leftrightarrow$ 3-dimensionale Zelle

**Bemerkung (Spezielle Zellenkomplexe):**

Sei $C = [E, B]$ ein Zellenkomplex und \dim die Zellendimension von C .

- ▶ C 0-dimensional $\rightarrow B = \emptyset$ (da für $e, e' \in E$ gilt: $\dim(e) = \dim(e') = 0$)
 \rightarrow **Mengentheorie** mit $E = E_0$ Elemente / Punkte
- ▶ C 1-dimensional $\rightarrow B \subset E_0 \times E_1$
 \rightarrow **Graphentheorie** mit E_0 Knoten, E_1 Kanten
 (sehr allgemeine GT, da eine Kante mit mehr als zwei Knoten verbunden sein kann).
 In Nachbarschaftsgraphen gilt:

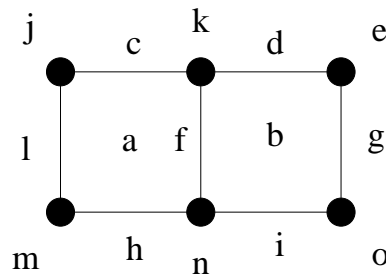
$$\forall \text{ Kante } e \in E_1 \stackrel{=2}{\exists} \text{ Punkte } e', e'' \in E_0$$

$$\forall \text{ Punkte } e', e'' \in E_0 \stackrel{\leq 1}{\exists} \text{ Kante } e \in E_1$$

- ▶ C 2-dimensional $\rightarrow B \subset (E_0 \times E_1) \cup (E_0 \times E_2) \cup (E_1 \times E_2)$
 \rightarrow **orientierte Nachbarschaftsgraphen** mit E_0 Knoten, E_1 Kanten, E_2 Maschen

Beispiel: für 2D-Zellenkomplex

Sei $C = [E, B]$ der folgende Zellenkomplex:



Dann ist:

$$E_2 = \{a, b\}, E_1 = \{c, d, f, g, h, i, l\}, E_0 = \{j, k, e, m, n, o\}$$

$$E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$$

$$B_0 = \{(j, c), (k, c), (k, d), \dots\} \subset E_0 \times E_1$$

$$B_1 = \{(j, a), (k, a), \dots\} \subset E_0 \times E_2$$

$$B_2 = \{(c, a), (d, b), \dots\} \subset E_1 \times E_2$$

$$B = B_0 \cup B_1 \cup B_2$$

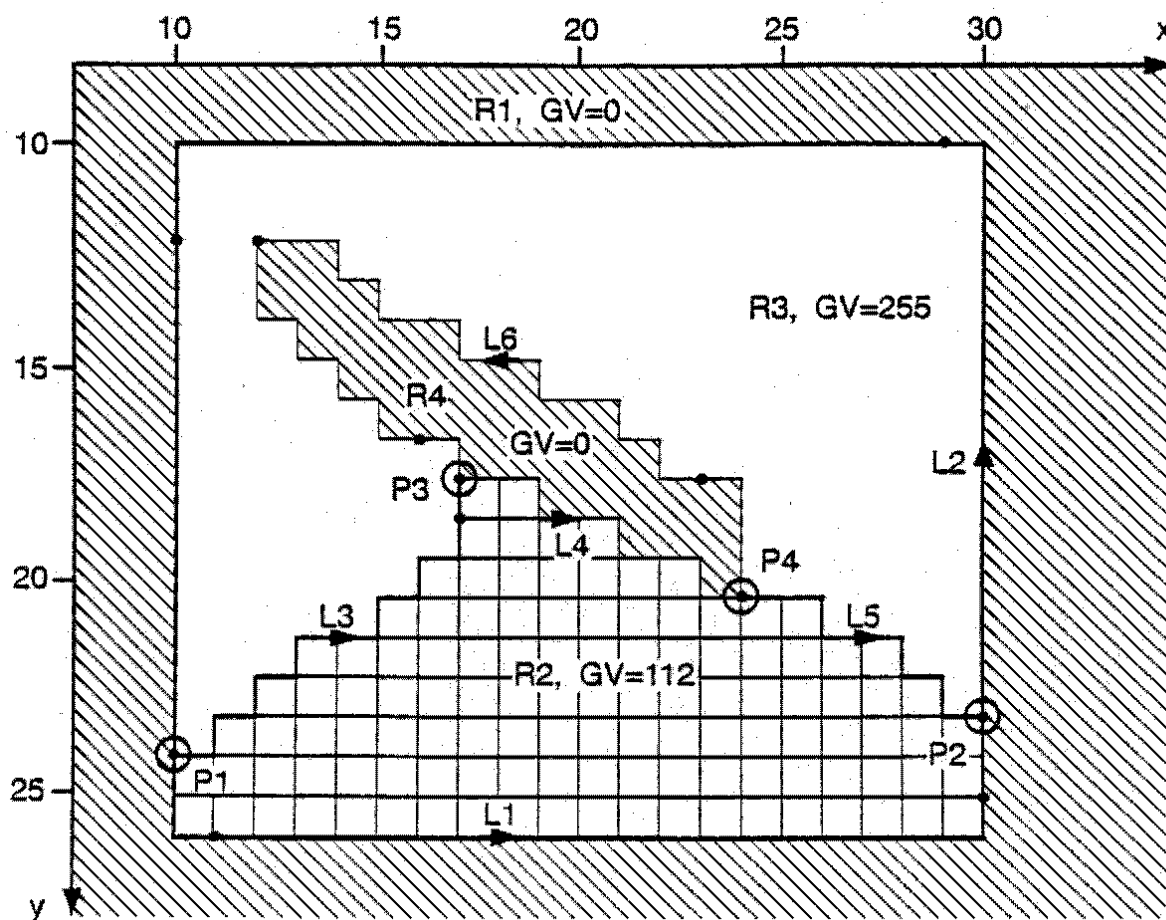
Aber: $(c, j), (a, j), \dots \notin B!$

■

Bemerkung (Anwendungen der Zellenkomplexe):

- ▶ **Strukturanalyse mittels Zellenkomplexen:**
 Listenverarbeitung: Eine Liste i -dimensionaler Zellen wird assoziiert mit Listen $(i - 1)$ -dimensionaler Zellen und $(i + 1)$ -dimensionaler Zellen.
 - Berandungsrelationen
 - zu jeder Linie existiert fester Richtungssinn
 - außer topologischen auch metrische Eigenschaften
 - weitere Eigenschaften: Farbe, Textur, Geschwindigkeit
 s. Kovalsky: CVGIP, 46, (1989), 141-161

- ▶ **Visualisierung von 3D-Objekten:**
 Oberflächen von Objekten werden durch Voxel repräsentiert.

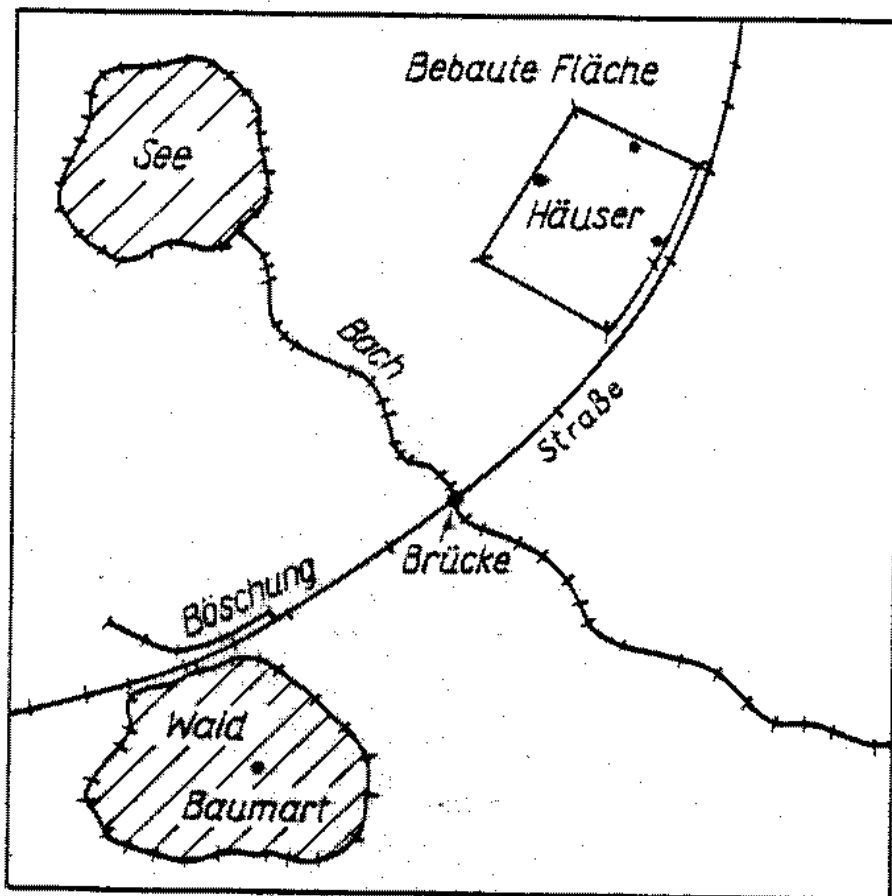


Punkt-Liste						
Nr.	Koord.		Linien			
	x	y	O	S	W	N
P1	10	24	-L3	-L1	0	+L2
P2	30	23	0	+L1	+L5	-L2
P3	17	17	-L4	+L3	0	+L6
P4	24	20	-L5	0	+L4	-L6

Regionen-Liste		
Nr.	Label	Start-Randlinie
R1	0	+L1
R2	112	+L3
R3	255	-L5
R4	0	-L6

Linien-Liste						
Nr.	Randpkt.		Regionen		Metrik	
	Anf.	End.	r	l	Anf.	End.
L1	P1	P2	R1	R2	1	4
L2	P2	P1	R1	R3	5	8
L3	P1	P3	R2	R3	9	11
L4	P3	P4	R2	R4	12	13
L5	P4	P2	R2	R3	14	15
L6	P4	P3	R3	R4	16	20

Liste der metrischen Daten			
Adr.	Koord.	Adr.	Koord.
1	10,24	11	17,17
2	11,26	12	17,17
3	30,25	13	24,20
4	30,23	14	24,20
5	30,23	15	30,23
6	29,10	16	24,20
7	10,11	17	23,17
8	10,24	18	12,11
9	10,24	19	16,16
10	17,18	20	17,17



6.2.2 Inzidenzstrukturen

Definition (Inzidenzstruktur):

- $\Sigma_N := [E, I]$ heißt *Inzidenzstruktur* \Leftrightarrow
 $E = \bigcup_{i=0}^N E_i$ (endliche) Menge und
 E_i paarweise disjunkte Mengen und
 $I \subset \bigcup_{i,k} E_i \times E_k$ reflexive, symmetrische, nicht-transitive Relation.
- I heißt *Inzidenzrelation*.
- N heißt die *Dimension der Inzidenzstruktur* Σ_N

■

Bemerkung (zur Indizienrelation):

Eine Indizienrelation ist im Gegensatz zur Nachbarschaftsrelation und Berandungsrelation reflexiv und nicht-transitiv. Sie hat mit der Nachbarschaftsrelation die Symmetrieeigenschaft gemeinsam.

► Aus Inzidenzstrukturen läßt sich eine *kombinatorische Topologie* ableiten.

Definition (Strukturkonstante):

Sei $\Sigma_N = [E, I]$ eine Inzidenzstruktur.

- e *k-dimensional* $\Leftrightarrow e \in E_k$.
- Sei desweiteren $e' \in E_l$, dann heißt

$$b_{kl}(e) := |\{ e' \mid (e, e') \in I \}|$$

Strukturkonstante von Σ_N .

■

Die Strukturkonstante gibt also die Zahl der l -dimensionalen Elemente an, die mit einem k -dimensionalen Element inzidieren.

Satz (Struktursatz):

Sei Σ_N eine Inzidenzstruktur.

- $b_{kk}(e) = 1$ (wegen Reflexivität)
Jedes k -dimensionale Element kann nur mit sich selbst als einzigem k -dimensionalen Element inzidieren.
- **[Struktursatz]** (wegen Symmetrie)

$$\sum_{e \in E_k} b_{kl}(e) = \sum_{e' \in E_l} b_{lk}(e')$$

Die Anzahl der Inzidenzen von k -dimensionalen Elementen mit l -dimensionalen Elementen ist gleich der von l -dimensionalen mit k -dimensionalen Elementen. ■

Der Struktursatz stellt die Verallgemeinerung von Knotensatz und Maschensatz dar.

Definition (Homogene Inzidenzstruktur):

$\Sigma_N = [E, I]$ heißt *homogene Inzidenzstruktur* \Leftrightarrow

$\Sigma_N = [E, I]$ Inzidenzstruktur und

$\forall 0 \leq k; l \leq N; e \in E_k : b_{kl} = b_{kl}(e) = \text{const.}$ ■

Bemerkung (Interpretation der Strukturkonstanten):

$\nu := b_{01}$ ["Nachbarschaftsgrad"]

$\lambda := b_{21}$ ["Maschenlänge"]

$b_{10} = 2$ 2 Punkte inzidieren mit einer Kante

$b_{12} = 2$ 2 Maschen inzidieren mit einer Kante.

Bemerkung:

zu Gittern

- ▶ Das unendliche planare Gitter \mathbb{Z}^2 bzw. das toroidale endliche (aber unbegrenzte) Gitter \mathbb{Z}^2 sind spezielle homogene Inzidenzstrukturen, die den Gitterraum beschreiben.
(s. auch die Bemerkungen zu \mathbb{Z}^2 im Abschnitt "Homogene Nachbarschaftsstrukturen")
- ▶ Analoges gilt für beliebige Gitter \mathbb{Z}^N .
- ▶ In den folgenden Abschnitten werden hauptsächlich diese Gitter untersucht.

Bemerkung (Strukturkonstanten für \mathbb{Z}^N):

In der homogenen Inzidenzstruktur \mathbb{Z}^N gilt:

$$b_{kl}^{(N)} = \begin{cases} 2^{l-k} \binom{N-k}{N-l} & : k < l \\ 1 & : k = l \\ 2^{k-l} \binom{k}{l} & : k > l \end{cases}$$

Definition (Zahl der k -dimensionalen Elemente):

Sei Σ_N eine (homogene) Inzidenzstruktur.

$$a_k := |E_k|$$

$$\epsilon := a_0 \quad [\text{Knotenzahl}]$$

$$\kappa := a_1 \quad [\text{Kantenzahl}]$$

$$\mu := a_2 \quad [\text{Flächenzahl}]$$

$$\zeta := a_3 \quad [\text{Würfelzahl}]$$

■

Satz (Strukturformel für homogene IS):

Sei Σ_N eine homogene IS, dann gilt

$$\forall 0 \leq k, l \leq N : a_k b_{kl} = a_l b_{lk}$$

■

Dies ist eine Folge der Symmetrie der Inzidenzrelation.

Satz (Strukturformel für homogene IS mit der Dimension 1):

Sei Σ_1 eine homogene IS der Dimension 1, dann gilt

- $a_0 b_{01} = a_1 b_{10}$
- $b_{10} = 2 \Rightarrow \epsilon \cdot \nu = \kappa \cdot 2 \quad [\text{Knotensatz}]$
- Σ_1 läßt sich durch das Tupel $(a_0, a_1, b_{00}, b_{10}, b_{01}, b_{11})$ beschreiben.

■

Satz (Strukturformel für homogene IS mit der Dimension 2):

Sei Σ_2 eine homogene IS der Dimension 2, dann gilt

- 1) $a_0 b_{01} = a_1 b_{10}$
- 2) $a_0 b_{02} = a_2 b_{20}$
- 3) $a_1 b_{12} = a_2 b_{21}$
- Σ_2 lässt sich durch ein 12-Tupel der Werte a_i, b_{ij} beschreiben.

**Bemerkung (IS und NS):**

Sei Σ_2 eine homogene IS der Dimension 2.

Wenn Σ homogener orientierter NS entspricht, dann gilt:

$$b_{21} = b_{20} = \lambda \quad [\lambda \text{ Kanten/Punkte inzidieren mit einer Masche}]$$

$$b_{10} = b_{12} = 2 \quad [2 \text{ Punkte/Maschen inzidieren mit einer Kante}]$$

$$b_{01} = b_{02} = \nu \quad [\nu \text{ Kanten/Maschen inzidieren mit einem Punkt}]$$

$$1) \rightarrow \epsilon \cdot \nu = \kappa \cdot 2 \quad [\text{Knotensatz}]$$

$$2) \rightarrow \epsilon \cdot \nu = \mu \cdot \lambda$$

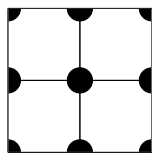
$$3) \rightarrow \kappa \cdot 2 = \mu \cdot \lambda \quad [\text{Maschensatz}]$$

Bemerkung (Strukturformel für homogene IS mit der Dimension 3):

Sei Σ_3 eine homogene IS der Dimension 3, dann lässt Σ_3 sich durch ein 20-Tupel der Werte a_i, b_{ij} beschreiben.

Beispiel: IS der Dimension 2

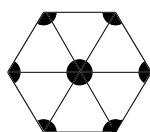
- Torus $(\nu, \lambda) = (4, 4)$ (Vierecknetz):



1/4 - Knoten

$$\begin{aligned}\mu &= a_2 = 4 \\ \kappa &= a_1 = 4 + \frac{8}{2} = 8 \\ \epsilon &= a_0 = 1 + \frac{4}{4} + \frac{4}{2} = 4\end{aligned}$$

- Torus $(\nu, \lambda) = (6, 3)$ (Dreiecknetz):



1/3 - Knoten

$$\begin{aligned}\mu &= a_2 = 6 \\ \kappa &= a_1 = 6 + \frac{6}{2} = 9 \\ \epsilon &= a_0 = 1 + \frac{6}{3} = 3\end{aligned}$$

Satz (Eulersche Gleichung für IS):

Sei Σ_N eine N -dimensionale homogene IS, d.h. ein N -dim. Torusgitter, dann ist

$$\chi^{(N)} = \sum_{k=0}^N a_k (-1)^k = 0$$

Erinnerung : $N = 2$ hat zur Folge $\chi^{(2)} = \epsilon - \kappa + \mu$.

Satz (Verallgemeinerung):

Sei Σ_N eine N -dimensionale homogene IS, dann gilt wegen des Struktursatzes

$$\forall l = 0, 1, \dots, N : \frac{\chi^{(N)}}{a_l} = \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{a_l} (-1)^k = \sum_{k=0}^N \frac{b_{lk}}{b_{kl}} (-1)^k = 0$$

Satz (Charakteristische diophantische Gleichung):

In der homogenen toroidalen IS Σ_2 gilt:

$$\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

Beweis:

Es gilt :

$$l = 0 : \frac{b_{00}}{b_{00}} - \frac{b_{01}}{b_{10}} + \frac{b_{02}}{b_{20}} = 0 \rightarrow 0) 1 - \frac{\nu}{2} + \frac{\nu}{\lambda} = 0$$

$$l = 1 : \frac{b_{10}}{b_{01}} - \frac{b_{11}}{b_{11}} + \frac{b_{12}}{b_{21}} = 0 \rightarrow 1) \frac{2}{\nu} - 1 + \frac{2}{\lambda} = 0$$

$$l = 2 : \frac{b_{20}}{b_{02}} - \frac{b_{21}}{b_{12}} + \frac{b_{22}}{b_{22}} = 0 \rightarrow 2) \frac{\lambda}{\nu} - \frac{\lambda}{2} + 1 = 0$$

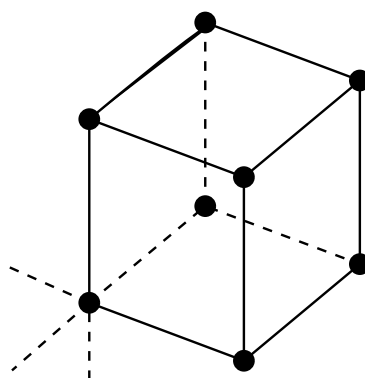
Dann:

$$0)/\nu + 1)/2 + 2)/\lambda \rightarrow \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

Bemerkung (Toroidales 3D-Punktgitter als homogene 3D-Inzidenzstruktur):

Das Gitter \mathcal{Z}^3 ist eine spezielle homogene IS Σ_3 mit den folgenden Strukturkonstanten b_{kl} :

(Ein:) b_{kl}	(inzidiert mit:)			
	$l = 0$ (Punkt)	$l = 1$ (Kante)	$l = 2$ (Fläche)	$l = 3$ (Würfel)
$k = 0$ (Punkt)	$1 = 2^0$	$\nu_k := 6$	$\nu_m := 12$	$\nu_w := 8$
$k = 1$ (Kante)	$2 = 2^1$	1	$\varphi_m := 4$	$\varphi_w := 4$
$k = 2$ (Fläche)	$\lambda_p := 4 = 2^2$	$\lambda_k := 4$	1	2
$k = 3$ (Würfel)	$\delta_p := 8 = 2^3$	$\delta_k := 12$	$\delta_m := 6$	1



Bemerkung (Anzahl homogener Inzidenzstrukturen mit $\chi^{(N)} = 0$):

N	Anzahl
1	1
2	3
3	11

6.2.3 Objekte in N-dimensionalen Inzidenzstrukturen

Sei Σ_N die homogene Inzidenzstruktur des unendlichen Gitters \mathbb{Z}^N (spezielle homogene IS) bzw. des endlichen aber unbegrenzten toroidalen Gitters \mathcal{Z}^N .

Für Objekte in Σ_N muß die Strukturformel korrigiert werden, da sie keine homogenen Inzidenzstrukturen darstellen.

Definition (Objekt):

O heißt Objekt in $\Sigma_N \Leftrightarrow O \subset E_0$ (von Σ_N) und O endlich. ■

Ein Objekt wird also durch eine endliche Menge von Gitterpunkten (Objektpunkten) gebildet.

Definition (Objektelement):

Sei O ein Objekt in Σ_N .

- e (k -dimensionales) Objektelement (von O) \Leftrightarrow
 $e \in E_k$ und $\forall e' \in E_0 : (e, e') \in I \rightarrow e' \in O$
 Ein k -dimensionales Element heißt Objektelement, wenn alle $b_{k0} = 2^k$ mit e inzidierenden Gitterpunkte Objektpunkte sind.
- p Objektpunkt $\Leftrightarrow p$ 0-dimensionales Objektelement
 p Objektkante $\Leftrightarrow p$ 1-dimensionales Objektelement
 p Objektfläche $\Leftrightarrow p$ 2-dimensionales Objektelement
 p Objektwürfel $\Leftrightarrow p$ 3-dimensionales Objektelement

Definition (Randelement):

Sei O ein Objekt in Σ_N .

- e (k -dimensionales) Randelement (von O) \Leftrightarrow
 $e \in E_k$ und
 e kein Objektelement von O und
 $\exists_{\geq 1} e' \in O : (e, e') \in I$
 Ein k -dimensionales Randelement heißt Randelement eines Objektes, wenn es selbst kein Objektelement ist, aber mit wenigstens einem Objektpunkt inzidiert.
- p Randkante $\Leftrightarrow p$ 1-dimensionales Randelement
 p Randfläche $\Leftrightarrow p$ 2-dimensionales Randelement
 p Randwürfel $\Leftrightarrow p$ 3-dimensionales Randelement
 Es existieren keine Randpunkte, da diese nicht mit Objektpunkten inzidieren können. ■

Definition (Randzahlen):

Sei O ein Objekt in Σ_N .

- Sei $k < l$ und $e \in E_k$ ein Objektelement.
 $c_{kl}(e) := |\{ e' \mid e' \text{ ist } l\text{-dimensionales Randelement von } O, (e, e') \in I \}|$

-

$$c_{kl} := \sum_{e \in E_k} c_{kl}(e)$$

heißen *Randzahlen*.

■

Die Randzahlen können als Strukturkonstante der Randelemente betrachtet werden.

Bemerkung (zu den Randzahlen):

Welche l -dimensionalen Randelemente des Objektes mit k -dimensionalen Objektelementen inzidieren, hängt von der verwendeten Nachbarschaft ab.

Für $N = 2$, 4-Nachbarschaft, sind folgende Randzahlen erlaubt:

$$n = c_{01} \quad [\text{Anzahl der Randkanten (bzgl. Objektpunkten)}]$$

$$l = c_{12} \quad [\text{Anzahl der Randflächen (bzgl. Objektkanten),} \\ \text{d.h. die Länge der Randmasche}]$$

Für $N = 3$, 6-Nachbarschaft, gilt:

$$n := c_{01} \quad [\text{Anzahl der Randkanten (bzgl. Objektpunkten)}]$$

$$f := c_{12} \quad [\text{Anzahl der Randflächen (bzgl. Objektkanten)}]$$

$$z := c_{23} \quad [\text{Anzahl der Randwürfel (bzgl. Objektflächen)}]$$

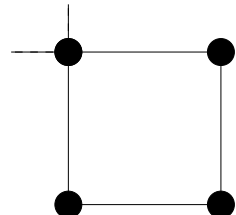
Offensichtlich existieren in der (erweiterten) 4-Nachbarschaft Randzahlen für $|l - k| = 1$. Gilt aber $|l - k| > 1$, so sind die Randzahlen vom Wert Null.

Beispiel : $N = 3$

$$c_{02} = c_{03} = c_{13} = 0$$

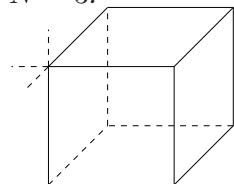
Beispiel: für Einheitszellen

$N = 2$:



$$n = c_{01} = 2 \cdot 4 = 8$$

$$l = c_{12} = 1 \cdot 4 = 4$$

$N = 3:$ 

$$\begin{aligned}n &= c_{01} = 3 \cdot 8 = 24 \\f &= c_{12} = 2 \cdot 12 = 24 \\z &= c_{23} = 1 \cdot 6 = 6\end{aligned}$$

■

Zahl der Objektelemente: Für Σ_3 gilt

$a_0 = \epsilon$ Zahl der Objektpunkte

$a_1 = \kappa$ Zahl der Objektkanten

$a_2 = \mu$ Zahl der Objektflächen(maschen)

$a_3 = \zeta$ Zahl der Objektwürfel

Satz (Strukturformel für Objekte):

Für ein Objekt O in Σ_N gilt:

$$a_l b_{lk} - c_{lk} = a_k b_{kl} \text{ für } l < k$$

$$a_l b_{lk} + c_{kl} = a_k b_{kl} \text{ für } k < l$$

■

Beispiel: $N = 2$

$$l = 0, k = 1: a_0 b_{01} - c_{01} = a_1 b_{10}$$

$$a_0 = \epsilon, a_1 = \kappa, b_{01} \equiv \nu, b_{10} = 2, c_{01} \equiv n$$

Hieraus folgt der Knotensatz: $\nu \epsilon - n = 2\kappa$

$$l = 1, k = 2: a_1 b_{12} - c_{12} = a_2 b_{21}$$

$$a_2 \equiv m = \mu - 1 \text{ (Anzahl der Kernmaschen)}$$

$b_{12} = 2$ (eine Kante wird durch 2 Maschen begrenzt)

$b_{21} \equiv \lambda$ (Maschenlänge: Eine Masche wird durch λ Kanten begrenzt)

Hieraus folgt Maschensatz: $\lambda m + l = 2\kappa$

■

Beispiel: $N = 3$

$$l = 0, k = 1: a_0 b_{01} - c_{01} = a_1 b_{10}$$

$$b_{01} \equiv \nu_k = 6 \quad (\text{ein Punkt wird durch 6 Kanten begrenzt})$$

$$b_{10} = 2 \quad (\text{eine Kante wird durch 2 Punkte begrenzt})$$

$$c_{01} \equiv n \quad (\text{Anz. Randkanten bzgl. Objektpunkten})$$

$$\text{für } \zeta = 1: n = 24$$

Hieraus folgt Knotensatz: $\nu_k \epsilon - n = 2\kappa$

$$l = 1, k = 2: a_1 b_{12} - c_{12} = a_2 b_{21}$$

$$b_{12} \equiv \phi_m = 4 \quad (\text{eine Kante wird durch 4 Flächen begrenzt})$$

$$b_{21} \equiv \lambda_k = 4 \quad (\text{eine Fläche wird durch 4 Kanten begrenzt})$$

$$c_{12} \equiv f \quad (\text{Anz. Randflächen bzgl. Objektkanten})$$

$$\text{für } \zeta = 1: f = 24$$

Hieraus folgt Maschensatz: $\phi_m \kappa - f = \lambda_k \mu$

$$l = 2, k = 3: a_2 b_{23} - c_{23} = a_3 b_{32}$$

$$b_{23} = 2 \quad (\text{eine Fläche wird durch 2 Würfel begrenzt})$$

$$b_{32} \equiv \delta_m = 6 \quad (\text{ein Würfel wird durch 6 Flächen begrenzt})$$

$$c_{23} \equiv z \quad (\text{Anzahl der Randwürfel bzgl. Objektflächen})$$

$$\text{für } \zeta = 1: z = 6$$

Hieraus folgt Würfelsatz: $2\mu - z = \delta_m \zeta$

Satz (Knoten- / Maschen- / Würfelsatz für Objekte):

Für ein Objekt O in Σ_3 gilt:

$$\epsilon \nu_k - n = 2\kappa \quad [\text{Knotensatz für Objekte}]$$

$$\kappa \phi_m - f = \mu \lambda_k \quad [\text{Maschensatz für Objekte}]$$

$$2\mu - z = \zeta \delta_m \quad [\text{Würfelsatz für Objekte}]$$

Definition (Eulersche Zahl für Objekte):

Für ein Objekt O in \mathcal{Z}^N definiere:

$$\psi_O^{(N)} := \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k(O)$$

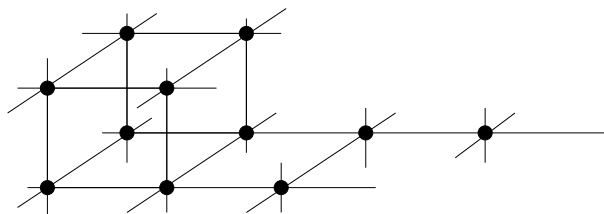
heißt *Eulersche Zahl von O* .

Bemerkung (über die Eulersche Zahl für Objekte):

Für ein Objekt O in \mathcal{Z}^2 gilt:

- O besitzt β Randmaschen (d.h. 1 äußere und $(\beta - 1)$ innere)
 $\longrightarrow \chi_O^{(2)} = \epsilon - \kappa + \mu + \beta = 2$
- $\psi_O^{(2)} = \chi_O^{(2)} - \beta = 1 - L$, L ist die Anzahl der Löcher : $L = \beta - 1$
- O hat kein Loch $\rightarrow \psi_O^{(2)} = \chi_O^{(2)} - 1$

Beispiel: ($N = 3$)



$$a_0 \equiv \epsilon = 11 \quad a_1 \equiv \kappa = 16 \quad a_2 \equiv \mu = 7 \quad a_3 \equiv \zeta = 1$$

$$c_{01} \equiv n = 34 \quad c_{12} \equiv f = 36 \quad c_{23} \equiv z = 8 \quad (\text{durch Abzählen})$$

oder systematisch:

$$\begin{aligned} \text{Knotensatz:} \quad n &= \nu_k \epsilon - 2\kappa = 6\epsilon - 2\kappa \\ &= 66 - 32 = 34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Maschensatz:} \quad f &= \psi_m \kappa - \lambda_k \mu \\ &= 64 - 28 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Würfelsatz:} \quad z &= 2\mu - \delta_m \zeta = 2\mu - 6\zeta \\ &= 14 - 6 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Eulersche Zahl:} \quad \psi_O^{(3)} &= \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k \\ &= \epsilon - \kappa + \mu - \zeta \\ &= 11 - 16 + 7 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\chi_O^{(3)} = 2$, d.h. die Planarität des Objektes.



Satz (über Objekte ohne Löcher):

Für Objekte ohne Löcher gilt unabhängig von der Dimension

$$\psi_O^{(N)} = \chi^{(N)} + 1 = 1,$$

wenn $\chi^{(N)} = 0$ die Eulersche Charakteristik des (toroidalen) Trägers der Objekte ist. Da N -dimensionale Objekte endliche, planare, inhomogene Strukturen mit der Eulerschen Charakteristik $\chi_O^{(N)} = 2$ sind, gilt für lochfreie Objekte mit nur einer " N -dimensionalen Randmasche" ($\beta = 1$), das heißt mit einer $(N - 1)$ -dimensionalen begrenzenden Hyperfläche,

$$\psi_O^{(N)} = \chi_O^{(N)} - 1 = 1.$$

■

Wie sehen die Zusammenhänge aus für N -dimensionale Objekte mit mehreren Komponenten und Löchern aus?

Die *Strukturformeln* stellen den Zusammenhang zwischen den Objektelementen, Randelementen und Inzidenzrelationen dar. Deshalb kann mit ihrer Hilfe die Eulersche Zahl in verschiedenen nützlichen Darstellungen formuliert werden.

Satz (Zusammenhang: Eulersche Zahl und Randzahlen):

Für ein Objekt O in Σ_N gelten

$$\forall 0 \leq l \leq N : \psi_O^{(N)} = \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \frac{c_{kl}}{b_{kl}} - \sum_{k=l+1}^N (-1)^k \frac{c_{lk}}{b_{kl}}$$

und

$$\psi_O^{(N)} = \frac{1}{2N} \sum_{l=1}^N (-1)^{l+1} c_{l-1,l}$$

■

Die Eulersche Zahl eines N -dimensionalen Objektes ist durch die Randzahlen bestimmbar.

Diese Beziehung erhält man aus der vorhergehenden, indem in der Strukturformel alle a_k , $k > l$ ersetzt werden:

$$a_k = a_0 \frac{b_{0k}}{b_{k0}} - \sum_{l=1}^k \frac{c_{l-1,l}}{b_{l-1,l}} \cdot \frac{b_{l-1,k}}{b_{k,l-1}}$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

Bemerkung:

Für ein Objekt O ohne Loch in \mathcal{Z}^2 bzw. \mathcal{Z}^3 gilt:

$$\psi_O^{(2)} = \frac{1}{4}(n - l) \quad \text{wegen} \quad \psi_O^{(2)} = \frac{1}{4}(c_{0,1} - c_{1,2})$$

$$\psi_O^{(3)} = \frac{1}{6}(n - f + z) \quad \text{wegen} \quad \psi_O^{(3)} = \frac{1}{6}(c_{0,1} - c_{1,2} + c_{3,2})$$

Für eine Menge von C Objekten ohne Löcher gilt in \mathcal{Z}^N :

$$\psi_O^{(N)} = \sum_{i=1}^C \psi_{O_i}^{(N)}$$

mit

$$\psi_{O_i}^{(N)} = \frac{1}{2^N} \sum_{l=1}^N (-1)^{l+1} c_{l-1,l}$$

- ▶ Das Ermitteln der Eulerschen Zahl liefert also die Anzahl der Komponenten der Objektmenge.
- ▶ Die Eulersche Zahl von N -dimensionalen Objekten wird durch deren "Oberflächen" bestimmt. Wie wir wissen, kennen wir für $N = 2$ innere und äußere "Oberflächen", d.h. Randmaschen. Die Anzahl der Löcher entspricht der Anzahl innerer Randmaschen. Was gilt für beliebiges N ?

$N = 1$: Es existieren keine Löcher in Objekten. Die Objekte sind also vom Geschlecht Null ($g = 0$ entspricht $L = 0$).

$N = 2$: Das Geschlecht der Objekte gibt die Anzahl an Löchern an, d.h. $g \equiv L \geq 0$.
Hat das Objekt β Randmaschen, so hat es $L = \beta - 1$ Löcher mit ebensovielen inneren Randmaschen und einer äußeren. Solche planaren Objekte besitzen die Eulersche Zahl $\psi_O^{(2)} = 2 - \beta$. Bestehen die Objekte aus C Komponenten mit insgesamt L Löchern, so gilt $\psi_O^{(2)} = C - L$.

Ein Objekt in \mathcal{Z}^2 mit dem Geschlecht $g = 1$ hat also die Eulersche Zahl $\psi_O^{(2)} = 0$. Dies ist die Folge davon, daß $\psi_O^{(2)}$ durch die Krümmungseigenschaften der Randmaschen bestimmt wird; es gilt

$$\psi_O^{(2)} = \psi_{O,aussen}^{(2)} + \psi_{O,innen}^{(2)} = 1 + (-1) = 0.$$

Die Berechnung der Eulerschen Zahl beliebiger Objekte in N Dimensionen setzt voraus, innere und äußere Oberflächen unterscheiden zu können. Zur Erinnerung: Oberflächen sind $(N - 1)$ -dimensionalen Untermengen der Menge der Objektpunkte. Diese Unterscheidung ist aber nur für gerades N möglich!

$N = 1$: "dünner Ring"

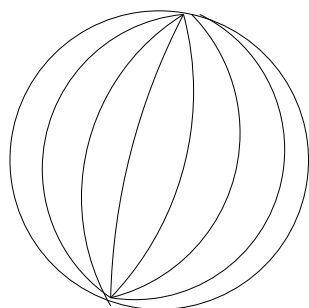
Für die 0-dimensionale Oberfläche ist topologisch nicht entscheidbar, ob sie innen oder außen liegt.

$N = 2$: siehe oben

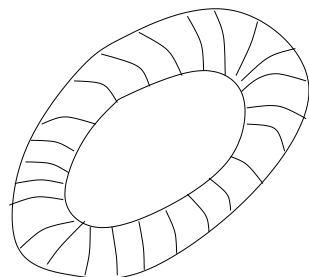
$N = 3$: Zusätzlich zu *Oberflächen* treten als weitere topologische Entitäten die *Tunnel* auf.

Tunnel sind N -dimensionale Löcher, die topologisch dem Geschlecht der $(N - 1)$ -dimensionalen Oberflächen entsprechen.

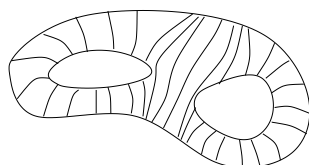
Beispiele : S sei die Anzahl der Oberflächen, T sei die Anzahl der Tunnel.



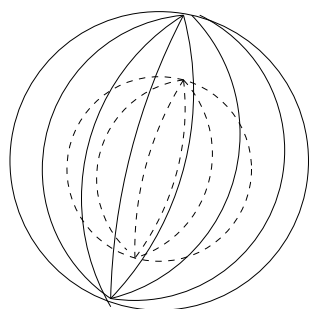
Kugel : $T = g = 0$
 $S = 1$



Fahrradschlauch : $T = g = 1$
 $S = 1$



Brezel : $T = g = 2$
 $S = 1$



Hohlkugel : $T = g = 0$
 $S = 2$

Die Unterscheidung von "innen" und "außen" ist nur für gerade N möglich. Für beliebiges N kann dieses eigenartige Verhalten der Struktur von Objekten gezeigt werden, wenn das N -dimensionale Objekt nur aus einem Punkt p besteht :

$$\overline{O^{(N)}} = p, a_0 = 1$$

$$\overline{O^{(N)}} = q = \Sigma_N \setminus p, a_0 = |\Sigma_N| - 1$$

$\overline{O^{(N)}}$ ist die N -dimensionale (endliche) Trägerstruktur außer dem Punkt p .

$$\begin{aligned}
\psi_p^{(N)} &= \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k = 1 \\
\psi_q^{(N)} &= \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k \\
&= \sum_{k=0}^N [(-1)^k a_k^\Sigma - (-1)^k b_{0k}] \\
&= - \sum_{k=0}^N (-1)^k 2^k \binom{N}{k} = (-1)^{N+1}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\psi_p^{(N)} &= 1 \\
\psi_q^{(N)} &= \begin{cases} 1 & \text{für } N \text{ ungerade} \\ -1 & \text{für } N \text{ gerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Satz (Eulersche Zahl für 3D-Objektmengen):

$$\psi_O^{(3)} = \sum_{i=1}^C \psi_{O_i}^{(3)} = \sum_{i=1}^C (S_i - T_i)$$

■

Bemerkung (zu den Pickschen Formeln):

Die Pickschen Formeln verknüpfen das Maß des N -dimensionalen Einheitsvolumens mit Maßen der $(N-1)$ -dimensionalen Oberfläche eines Objektes.

$N = 2$: 1. Picksche Formel $\epsilon = f + \frac{l}{2} + 1$

f Anzahl der Kernmaschen (Kernmasche ist Einheitsvolumen)

l Länge der Randmasche als Maß der "Oberfläche"

Dabei steht der Summand "1" für $\psi_O^{(2)} = 1$.

Es gilt also auch

$$\epsilon = f + \frac{l}{2} + \psi_O^{(2)}.$$

Da die Eulerzahl allein durch die Randelemente ausgedrückt werden kann $(\psi_O^{(2)} = \frac{n-l}{4})$, folgt

$$\epsilon = f + \frac{1}{4}(l + n).$$

$N = 3 : 4$. Picksche Formel $\epsilon = \zeta + \frac{f}{4} + \psi_O^{(3)}$

ζ Anzahl der Würfel (Würfel ist Einheitsvolumen)

f Anzahl der Randflächen als Maß der Oberfläche

Wegen $\psi_O^{(3)} = \frac{1}{6}(n - f + z)$ folgt

$$\epsilon = \zeta + \frac{f}{4} + \frac{1}{6}(n - f + z)$$

6.2.4 Ähnlichkeit von Objekten

Hier soll untersucht werden, welche der Objektcharakteristika ($N = 3 : \epsilon, \kappa, \mu, \zeta, n, f, z$) sich bei Skalierung ändern (und wie) und welche Maße erhalten bleiben.

Eine geometrische *Invariante* ist eine dimensionslose Maßzahl eines Objekts, die sich bei geometrischen Transformationen nicht ändert. Man erhält sie aus geeigneter Kombination der Objektcharakteristika. Eine Invariante drückt also die Ähnlichkeit aus.

Hier soll als geometrische Transformation nur die Skalierung betrachtet werden.

Definition (Invariante):

Sei E eine Menge und $f : E \rightarrow W$ eine Funktion in einen Bildbereich W .

E heißt *invariant* (bzgl. f) $\Leftrightarrow \forall x \in E : f(x) \in E$



Es werden hier folgende Invarianten unterschieden :

- a) topologische Invariante
- b) geometrische Invariante.

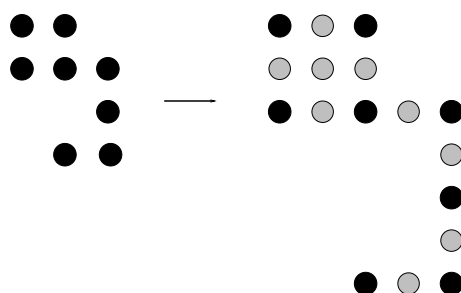
Eine *topologische Invariante* wird nur durch die Zusammenhangseigenschaften eines Objekts bzw. seiner Oberfläche bestimmt. Die *Eulersche Zahl* ist eine topologische Invariante.

Eine *geometrische Invariante* wird durch die Gestalt eines Objektes bestimmt. *Formfaktoren* sind geometrische Invarianten bezüglich der Skalierungstransformation.

Eine Skalierung um den Faktor $v \in \mathbb{Z}$ bewirkt für zwei benachbarte Punkte mit den Koordinaten x_m, x_{m+1} ; $x_{m+1} = x_m + 1$ folgende Transformation:

$$x_m, x_{m+1} \longrightarrow vx_m, vx_m + 1, vx_m + 2, \dots, vx_m + v = vx_{m+1}$$

Beispiel: $v = 2$ ($N = 2$)



■

Bemerkung (k -dimensionale v -Würfel):

Sei O ein Objekt in \mathcal{Z}^N .


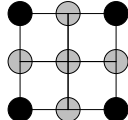
Jedes k -dimensionale Objektelelement von O erzeugt bei Skalierung mit dem Faktor v einen k -dimensionalen v -"Würfel", d.h. einen "Würfel" mit $(v + 1)^k$ Objektpunkten.

Beispiel: zu k -dim. v -Würfeln

Skalierung mit $v = 2$ ($N = 2$):

$k = 0$ (Punkt): ● $\rightarrow (2 + 1)^0 = 1$ Objektpunkt: ● (0-dim. 2-Würfel)

$k = 1$ (Kante): ●—● $\rightarrow (2 + 1)^1 = 3$ Objektpunkte: ●—●—● (1-dim. 2-Würfel)

$k = 2$ (Masche):  $\rightarrow (2 + 1)^2 = 9$ Objektpunkte:  (2-dim. 2-Würfel)

■

Satz (Anzahl der Objektelemente eines skalierten Objektes):

Sei O ein Objekt in \mathcal{Z}^N .

- Jedes k -dimensionale Objektelement von O im alten Gitter liefert bei Skalierung mit v $\binom{k}{l} v^l (v-1)^{k-l}$ l -dimensionale Objektelemente im neuen Gitter für $l \leq k$. Dabei beschreibt $v^l (v-1)^{k-l}$ die Anzahl der Möglichkeiten, wie l -dimensionale Objekte im k -Würfel liegen.
- Daraus ergibt sich die Anzahl der l -dim. Objektelemente a'_l des skalierten Objektes O' unter Verwendung der Werte a_k von O :

$$a'_l = \sum_{k=1}^N \binom{k}{l} v^l (v-1)^{k-l} a_k ; l \leq k$$

Beispiel: Skalierung

Im obigen Beispiel erhält man : $v = 2$

$$a_0 \equiv \epsilon = 8 \quad a'_0 \equiv \epsilon' = 17$$

$$a_1 \equiv \kappa = 8 \quad a'_1 \equiv \kappa' = 20$$

$$a_2 \equiv \mu = 1 \quad a'_2 \equiv \mu' = 4$$

Satz (über die Skalierung):

Für ein skaliertes Objekt O' in \mathcal{Z}^2 bzw. \mathcal{Z}^3 gilt:

- bei $N = 2$:

$$a'_0 = \epsilon' = \epsilon + (v-1)\kappa + (v-1)^2\mu$$

$$a'_1 = \kappa' = v\kappa + 2v(v-1)\mu$$

$$a'_2 = \mu' = v^2\mu$$

- bei $N = 3$:

$$a'_0 = \epsilon' = \epsilon + (v-1)\kappa + (v-1)^2\mu + (v-1)^3\zeta$$

$$a'_1 = \kappa' = v\kappa + 2v(v-1)\mu + 3v(v-1)^2\zeta$$

$$a'_2 = \mu' = v^2\mu + 3v^2(v-1)\zeta$$

$$a'_3 = \zeta' = v^3\zeta$$

Satz (Darstellung der Eulerschen Zahl als Potenz des Skalierungsfaktors):

Sei O ein Objekt in \mathcal{Z}^3 und Skalierung v .

$$\begin{array}{rcl}
\epsilon' - \kappa' + \mu' - \zeta' & = & (\epsilon - \kappa + \mu - \zeta)v^0 = 1 \quad \text{Invarianz} \\
\kappa' - 2\mu' - 3\zeta' & = & (\kappa - 2\mu - 3\zeta)v^1 \quad \text{schwache Invarianz} \\
\mu' - 3\zeta' & = & (\mu - 3\zeta)v^2 \quad \text{---||---} \\
\zeta' & = & \zeta v^3 \quad \text{---||---}
\end{array}$$

■

- ▶ Aus der ersten Gleichung folgt $\psi^{(3)'} = \psi^{(3)}$. Das gilt für alle $\psi^{(N)}$.
- ▶ Also ist die Eulersche Zahl eine topologische Invariante gegenüber Skalierung.
- ▶ Die anderen Gleichungen stellen Linearkombinationen der a_k dar, die sich als Objektcharakteristika proportional zu Potenzen des Vergrößerungsfaktors v ändern.

Beweis:

Die Gleichungen ergeben sich durch Umformung der linken Seiten der Gleichungen unter Verwendung der Gleichungen des Satzes über die Skalierung (für den Fall $N = 3$).

Satz (Objektcharakteristika):

Sei O ein Objekt in \mathcal{Z}^N und Skalierung v .
Definiere für $0 \leq k \leq N$:

$$q_k := \frac{1}{2(N-k)} \sum_{l=k+1}^N (-1)^{l-k+1} \binom{l-1}{k} c_{l-1,l}$$

als Objektcharakteristika für den Ähnlichkeitsgrad k .

Dann gilt nach Skalierung (Darstellung als Potenz des Skalierungsfaktors):

$$\begin{aligned}
q'_k &= v^k q_k \\
a'_l &= \sum_{k=1}^N \binom{k}{l} v^k q_k
\end{aligned}$$

■

Man erhält die q_k durch geeignete Umformung von der Darstellung durch Objektelemente

$$q_k = \sum_{j=0}^{N-k} (-1)^j \binom{j+k}{j} a_{j+k}$$

in eine Darstellung durch Randelemente.

Beispiel:

$$N = 0: q_0^{(0)} = a_0 = \epsilon = \psi^{(0)}$$

$$N = 1: q_0^{(1)} = \epsilon - \kappa = n = \psi^{(1)}$$

Anzahl der Randkanten

$$q_1^{(1)} = a_1 = \kappa$$

$$N = 2: q_0^{(2)} = \epsilon - \kappa + \mu = \frac{1}{4}(n - l) = \psi^{(2)}$$

$$q_1^{(2)} = \kappa - 2\mu = \frac{1}{2}l$$

$$q_2^{(2)} = a_2 = \mu$$

$$N = 3: q_0^{(3)} = \epsilon - \kappa + \mu - \zeta = \frac{1}{6}(n - f + z) = \psi^{(3)}$$

dimensionsloses Maß

$$q_1^{(3)} = \kappa - 2\mu - 3\zeta = \frac{1}{4}(f - 2z)$$

"lineares" Maß der Objektpunkte

(mittleres Krümmungsintegral für Objekte in \mathbb{R}^3)

$$q_2^{(3)} = \mu - 3\zeta = \frac{1}{2}z$$

quadratisches Maß für Oberflächeninhalt

$$q_3^{(3)} = a_3 = \zeta$$

kubisches Maß

■

► $q_1^{(3)}$ entspricht der mittleren integralen Krümmung von Objekten in E^3 .

Definition (Formfaktor):

Geometrische Invariante (bzgl. Skalierung)

- In der euklidischen Ebene E^2

$$F := \frac{U^2}{A} \geq 1$$

für Kreis minimal.

Sei O ein Objekt in \mathcal{Z}^N .

- $N = 2$:

$$F := \frac{q_1^2}{4q_2} = \frac{l^2}{16\mu} \geq 1 \text{ für } \mu > 0$$



$$: F = \frac{4^2}{16 \cdot 1} = 1 \rightsquigarrow \text{Formfaktor ist minimal für quadratische Objekte.}$$

- $N = 3$:

$$F_1 := \frac{q_1^2}{3q_2} = \frac{(f-2z)^2}{24z} \geq 1$$

$$F_2 := \frac{q_1 q_2}{9q_3} = \frac{(f-2z)z}{72\zeta} \geq 1 \text{ für } \zeta > 0$$

■

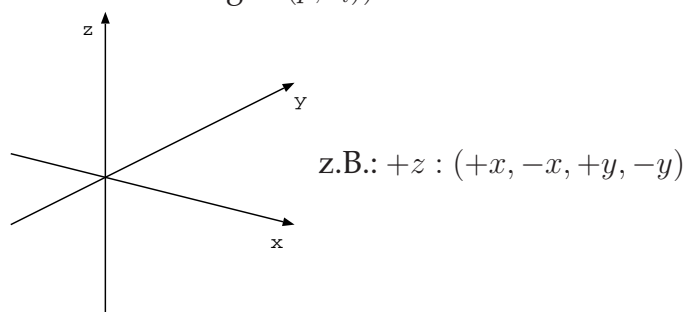
6.3 Oberflächendetektions-Verfahren

Erinnerung : Der Konturfolgealgorithmus ist ein Spezialfall des Randmaschenalgorithmus für Objekte im homogenen Gitter \mathbb{Z}^2 .

In \mathbb{Z}^2 hat jeder Randpunkt genau zwei Nachbarn in der Menge der Randpunkte. Mit der Entscheidung für einen bestimmten Umlaufsinn der Randzyklen (z.B. in Uhrzeigerichtung) ist die Bewegungsrichtung der Kontur eindeutig vorgegeben. Das Wesentliche sind für den Algorithmus aber nicht die Konturpunkte (diese ergeben sich), sondern die Randkanten (p, q) mit $p \in O, q \in \bar{O}$.

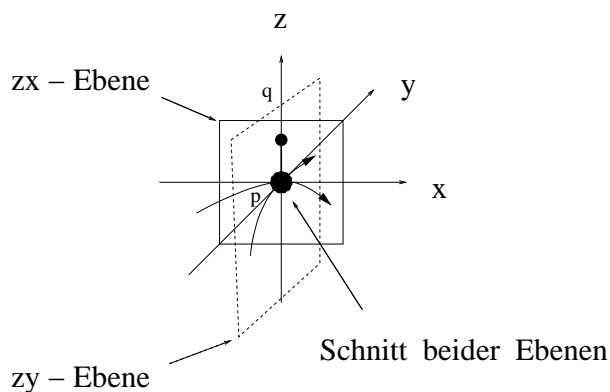
Sei O ein Objekt im \mathbb{Z}^3 und sei die 6-Nachbarschaft von Objektpunkten angenommen.

- Zu jeder Richtung (p, q) gehören vier Richtungen (p, r_i) . (In \mathbb{Z}^N : Zu (p, q) gehören $2N - 2$ Richtungen (p, r_i))



Jede Randkante hat vier benachbarte Randkanten.

- Die Teilgraphen der entsprechenden Randkanten-Nachbarschaftsstruktur repräsentieren die vorhandene Oberfläche.

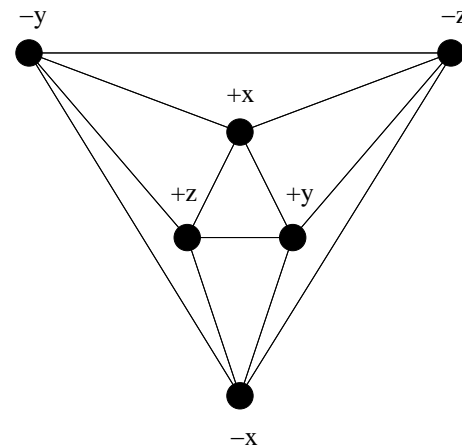


In den Schnittebenen treten $2D$ -Objekte auf (müssen für ein $3D$ -Objekt nicht zusammenhängend sein wegen Konkavitäten).

Die beiden durch die Randkante (p, q) festgelegten Konturen des xz -Schnittes bzw. des yz -Schnittes sind gleichzeitig Bestandteile der durch (p, q) bestimmten Oberfläche des Objektes. Es muß möglich sein, Oberflächensuche durch Kontursuche zu realisieren.

- Wie bei der Kontursuche kann auch hier die *Randkanten-Nachbarschaftsstruktur* auf eine *orientierte Nachbarschaft* abgebildet werden. Der Graph der Randkanten-Nachbarschaftzyklen kann z.B. im Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Da die Oberflächen planar sind, erhält man eine kreuzungs-

freie Darstellung des Graphen der Randkanten - Nachbarschaftszyklen.



Nachbarschaftszyklen (6 Zyklen)

$c_{+x} := \langle +y, +z, -y, -z \rangle$ (ist der NS-Zyklus für die Richtung +x)

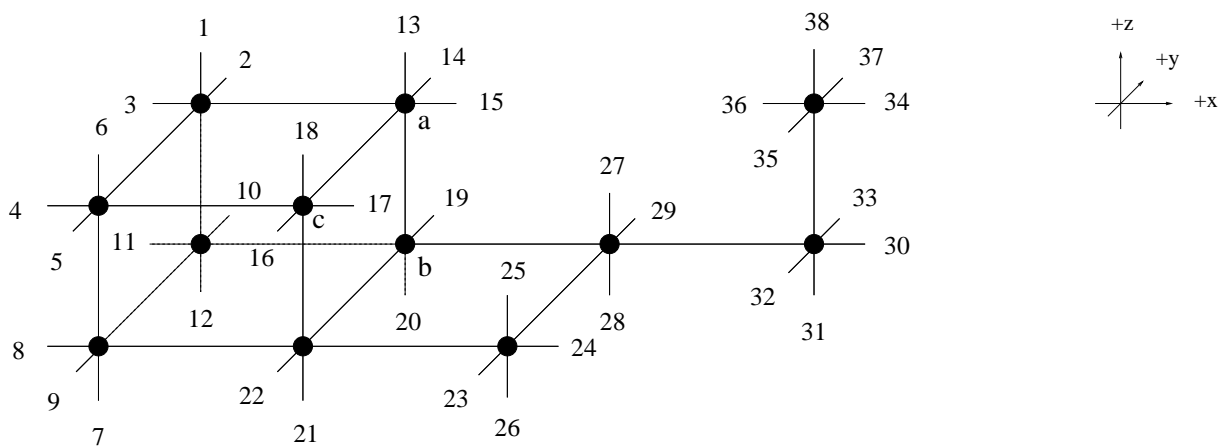
$c_{-x} := \langle -y, +z, +y, -z \rangle$

...

$c_{-z} := \langle -x, +y, +x, -y \rangle$

Beispiel:

Gegeben sei das Objekt:



Beispiele für die Randnachbarn entsprechend den Nachbarschaftszyklen :

von Punkt a für Randkante 13: 15, 14, 1, 18

$$c_{+z} = \langle +x, +y, -x, -y \rangle$$

von Punkt b für Randkante 20: 28, 21, 12, 19

$$c_{-z} = \langle +x, -y, -x, +y \rangle$$

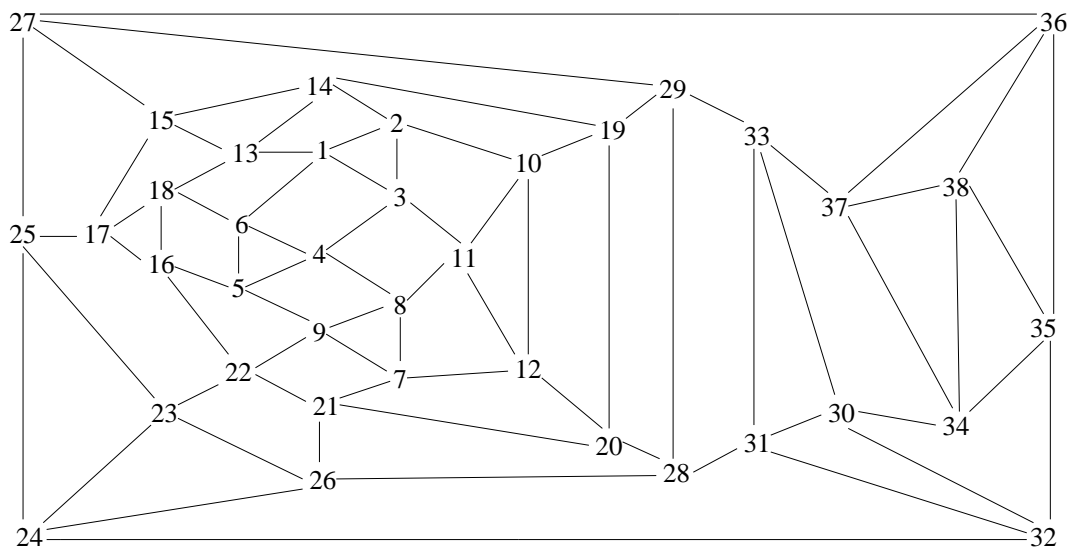
von Punkt c für Randkante 17: 18, 16, 25, 15

$$c_{+x} = \langle +z, -y, -z, +y \rangle$$

Die unterstrichenen Randkanten tragen zur Oberfläche bei. Sie sind Nachbarn von (p, q) , die über eine Objektkante verbunden sind.

Randpaar-Nachbarschaftsstruktur zum Objekt:

Jede Randkante hat vier Randnachbarn.



Bemerkung (Oberflächendetektion-Algorithmus):

Sei $O \subset \mathbb{Z}^3$ ein Objekt.

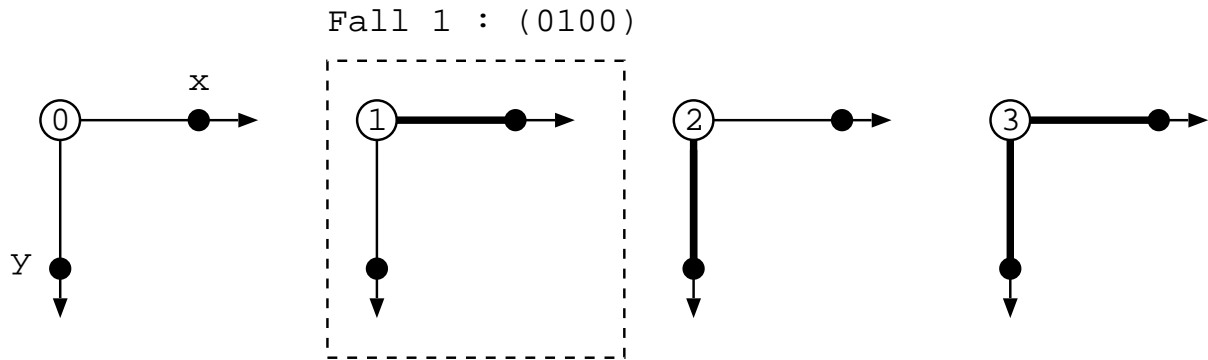
- (a) Gegeben:
 - Segmentierungskriterium
 - Startrandkante $k_0 = (p_0, q_0)$ mit $p_0 \in O$
- (b) Initialisiere die Liste L der Randpaare.
 Lege k_0 in Liste ab.
 Markiere das Randpaar (p_0, q_0) .
- (c) Nimm ein Randpaar k aus der Liste und lösche dieses in der Liste.
 Überprüfe für jedes der zu k benachbarten Paare k_1, k_2, k_3, k_4 , ob diese markiert sind.
 Ist k_i nicht markiert, dann markiere und nimm es in Liste auf.
- (d) Solange Randpaarliste nicht leer ist, gehe zu (c).
 Sonst ist die zum Randpaar k_0 gehörende Oberfläche detektiert.

Bemerkung (Markierungsproblematik im Algorithmus):

- (a) Die Randkantenmarkierung muß unabhängig von der Randpunktmarkierung, d.h. der Oberflächenmarkierung, erfolgen.
- (b) *Randpunktmarkierung*
 Im N -dimensionalen Gitter \mathcal{Z}^N können jedem Punkt p die in positiver Koordinatenrichtung verlaufenden Kanten $(p, q_1), (p, q_2), \dots, (p, q_N)$ zu den Nachbarpunkten q_1, q_2, \dots, q_N zugewiesen werden.
 Damit ist eine Markierung der Randpaare über 2^N Markierungswerte an jedem Randpunkt möglich.

($N = 2 : 4$ Markierungswerte, $N = 3 : 8$ Markierungswerte pro Punkt)

Beispiel: $N = 2$



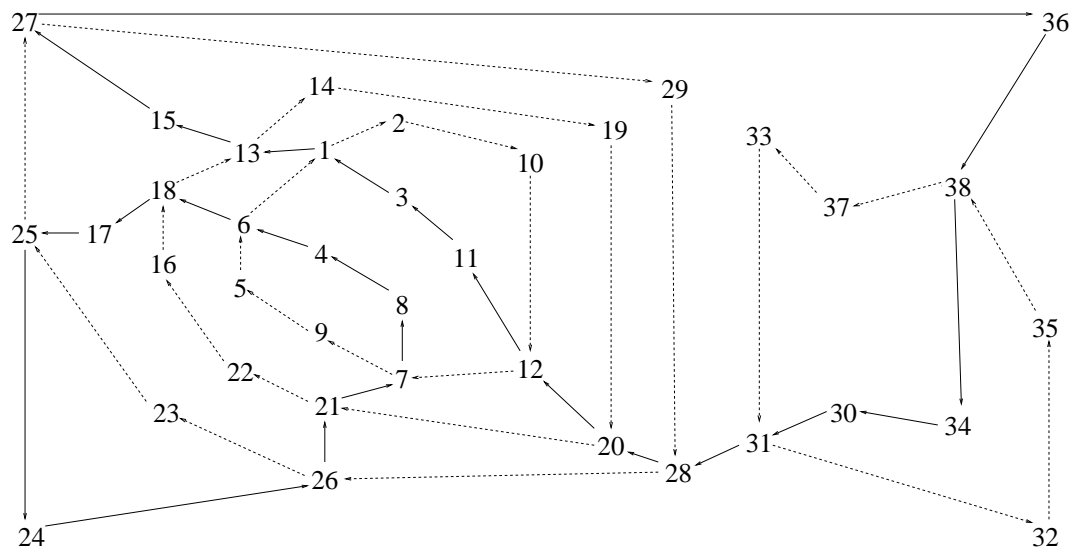
Bemerkung (Effektivierung der Oberflächendetektion):

- Erinnerung: Durch jede Randkante kann man zwei Zyklen legen, die den zugeordneten Konturen entsprechen:

Richtung Randpaar	Konturen in Ebene		
	xy	yz	zx
$+x / -x$	+	-	+
$+y / -y$	+	+	-
$+z / -z$	-	+	+

- Idee von Gordon, Udupa, (1989): Auf einen der Zyklentypen kann man prinzipiell verzichten (z.B. in der xy -Ebene).
- Wirkung: Nur $\frac{1}{3}$ aller Randkanten (in positiver oder negativer Richtung) besitzen zwei nachfolgende benachbarte Randkanten. Nur für diese benachbarten Randkanten erfolgt der Eintrag in die Liste. Für alle anderen Randkanten erfolgt die Suche nach benachbarten Randkanten wie beim klassischen Kontursuchverfahren (in Nachfolgerichtung).

Beispiel: Objekt von oben: Weglassen der xy -Zyklen



Die Objektfläche ist aus sechs Konturen rekonstruierbar.



Kapitel 7

Topologische Gestaltstransformationen

Topologische Gestaltstransformationen transformieren die Gestalt binärer Objekte oder leiten hieraus Repräsentationen ab, die gewisse Aussagen über die Gestalt darstellen. Anstelle metrischer Eigenschaften der Signale im Signalraum nutzen diese Transformationen also Nachbarschaft und Zusammenhang als Eigenschaften in einem topologischen Raum.

Sie sind *verschiebungsvariant*, weil sie, als Operatoren interpretiert, lokale Gestaltstransformationen durchführen, die eben von der spezifischen lokalen Gestalt abhängen. Man kann für diese Operatoren keine Impulsantwort bzw. Frequenzübertragungsfunktion angeben. Sie sind auch *nichtlinear*, weil ihre Wirkung vom (lokalen) Signal abhängt. Es existiert also auch keine Matrixform im Signalraum.

Es gibt zur Zeit kaum theoretisch begründbare Zugänge zu ihrem Entwurf (außer bei den Rangordnungsoperatoren). In jüngster Zeit zeichnet sich aber eine theoretische Basis in den nichtlinearen Diffusionsprozessen für eine (nichtlineare) Theorie der Skalenräume ab. Dabei stehen Grauwertbilder im Vordergrund des Interesses. Die Repräsentationen sind hierbei partielle Differentialgleichungen. Wir werden hierauf nicht eingehen.

Zu den topologischen Gestaltstransformationen gehören im engen oder weiteren Sinn

- (a) morphologische Operatoren
- (b) Dünnen und Skelettieren (nicht behandelt)
- (c) Distanztransformationen
- (d) Rangordnungsoperatoren.

7.1 Morphologische Operatoren

Wir werden zwei Zugänge kennenlernen:

- als Mengenoperationen auf Nachbarschaftsstrukturen
- als Minkowski-Operationen auf Punktfolgen

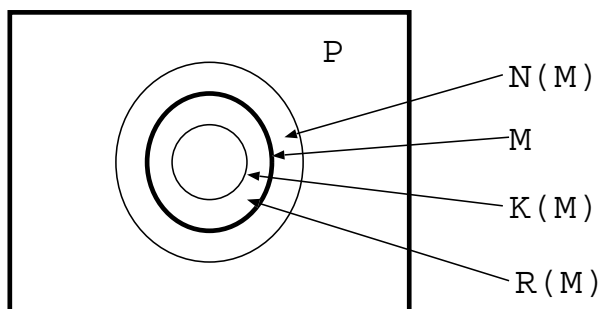
7.1.1 Morphologische Operatoren auf Nachbarschaftsstrukturen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit morphologische Operatoren auf Nachbarschaftsstrukturen.

Definition (Nachbarschaft):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $M \subset P$.

- $N(M) := R(\overline{M})$
heißt *Nachbarschaft von M*
- Der Rand $R(M)$ und der Kern $K(M)$ wurden schon im Abschnitt "Nachbarschaftsstrukturen" (5.2) definiert.



Bemerkung (zur Nachbarschaft):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $M \subset P$.

- $N(M) = R(\overline{M})$ *
- $R(M) = N(\overline{M})$ **
- $N(M) \cap M = \emptyset$
- $N(K(M)) \subseteq R(M)$
- $\overline{N(\overline{M})} = M \cup K(\overline{M})$

Definition (Elementare morphologische Operatoren):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $M \subset P$.

- $\mathcal{I}\{M\} := M$
 \mathcal{I} heißt *Identitätsoperator*
- $\mathcal{C}\{M\} := \overline{M}$
 \mathcal{C} heißt *Komplementoperator*
- $\mathcal{K}\{M\} := K(M)$
 \mathcal{K} heißt *Kernbildungsoperator*

- $\mathcal{R}\{M\} := R(M)$
 \mathcal{R} heißt Randbildungsoperator
- $\mathcal{N}\{M\} := N(M)$
 \mathcal{N} heißt Nachbarschaftsoperator

Bemerkung (Zusammenhang der Operatoren):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS.
 $\mathcal{N} = \mathcal{R}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R} = \mathcal{N}\mathcal{C}$ (siehe * und **)

Definition (Dilatation / Erosion):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $M \subset P$.

- $D = \mathcal{D}\{M\} := M \cup N(M)$
 \mathcal{D} heißt Dilatationsoperator
- $E = \mathcal{E}\{M\} := M \setminus R(M) = K(M)$
 \mathcal{E} heißt Erosionsoperator

Bemerkung (zur Dilatation):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $M \subset P$. Wegen der DeMorganschen Gesetze gilt

$$\mathcal{D}\{M\} = M \cup N(M) = \overline{\overline{M} \cap \overline{N(M)}} = \overline{\overline{M} \cap (M \cup K(\overline{M}))} = \overline{K(\overline{M})}$$

Bemerkung (weitere Zusammenhänge):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $M \subset P$.

- $\mathcal{D} = \mathcal{C}\mathcal{K}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{E}\mathcal{C}$
- $\mathcal{E} = \mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{C}$
- $\mathcal{C}\mathcal{C} = \mathcal{I}$ (mit $\overline{\overline{M}} = M$)
- $\mathcal{C}\mathcal{D} = \mathcal{E}\mathcal{C}$
(folgt aus: a) links multipliziert mit \mathcal{C})
- $\mathcal{D}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{E}$
(folgt aus: b) links multipliziert mit \mathcal{C})
- Die inversen Abbildungen von Dilatation und Erosion sind nicht eindeutig! Für $M \neq M'$ kann gelten:
 $\mathcal{D}\{M\} = \mathcal{D}\{M'\}, \mathcal{E}\{M\} = \mathcal{E}\{M'\}$

$$(g) \quad M \subset \mathcal{D}\{M\} \subset \mathcal{D}\{\mathcal{D}\{M\}\} \subset \dots \subseteq P$$

$$(h) \quad \mathcal{E}\{\emptyset\} = \emptyset \subset \dots \subset \mathcal{E}\{M\} \subset M$$

(i) Dilatation und Erosion sind nicht invers zueinander, aber sie sind *dual*, da (d) und (e) gelten.

Definition (Closing / Opening):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $M \subset P$.

- $F = \mathcal{F}\{M\} := \mathcal{E}\{\mathcal{D}\{M\}\}$
 \mathcal{F} heißt *Closingoperator / Fermature*
- $\mathcal{O} = \mathcal{O}\{M\} := \mathcal{D}\{\mathcal{E}\{M\}\}$
 \mathcal{O} heißt *Openingoperator / Ouverture*



Bemerkung (zum Closing- / Openingoperator):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS.

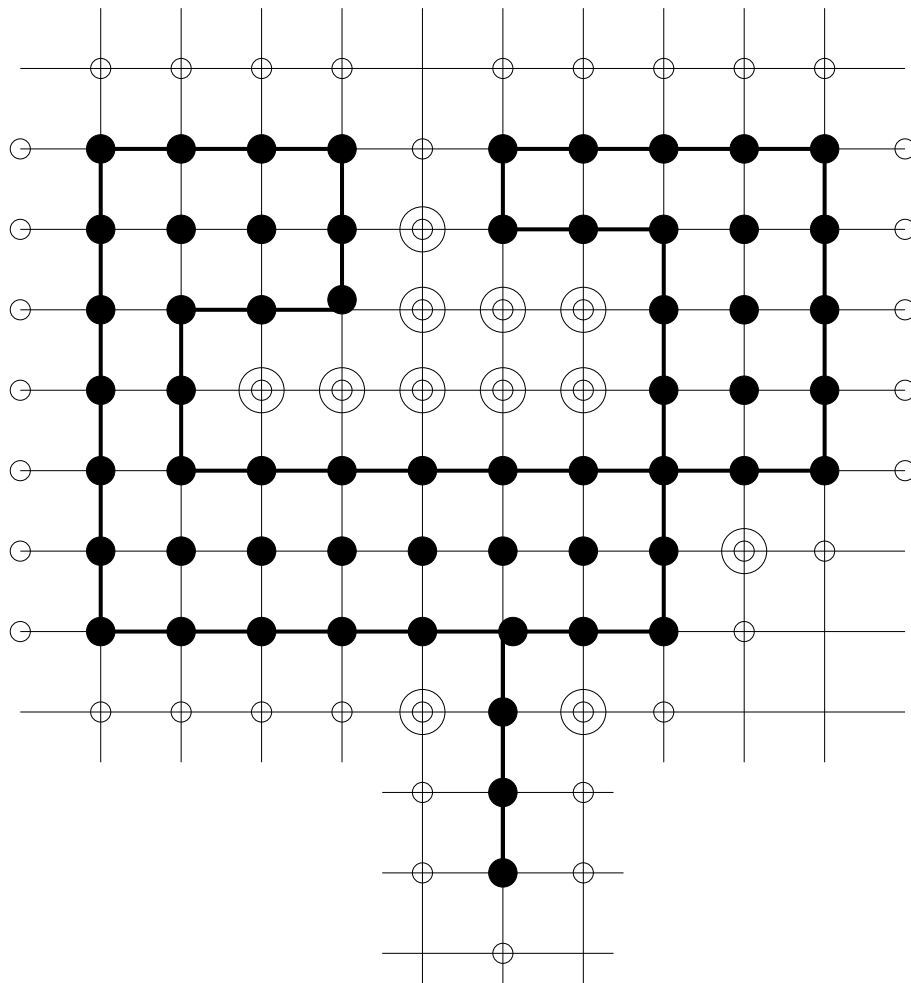
- $\mathcal{F} = \mathcal{E}\mathcal{D}$
- $\mathcal{O} = \mathcal{D}\mathcal{E}$

Bemerkung (Konkatenationen):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS.

- $\mathcal{C}\mathcal{O} = \mathcal{F}\mathcal{C}$
 $\mathcal{O}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{F}$
- $\mathcal{C} \underbrace{\mathcal{O}}_{\mathcal{D}\mathcal{E}} = \underbrace{\mathcal{C}\mathcal{D}}_{\mathcal{E}\mathcal{C}} \mathcal{E} = \mathcal{E} \underbrace{\mathcal{C}\mathcal{E}}_{\mathcal{D}\mathcal{C}} = \underbrace{\mathcal{E}\mathcal{D}}_{\mathcal{F}} \mathcal{C} = \mathcal{F}\mathcal{C}$
- $\mathcal{O}\mathcal{O} = \mathcal{O}$
 $\mathcal{F}\mathcal{F} = \mathcal{F}$
(sind Projektionsoperatoren: $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}\mathcal{P} = \mathcal{P}$)

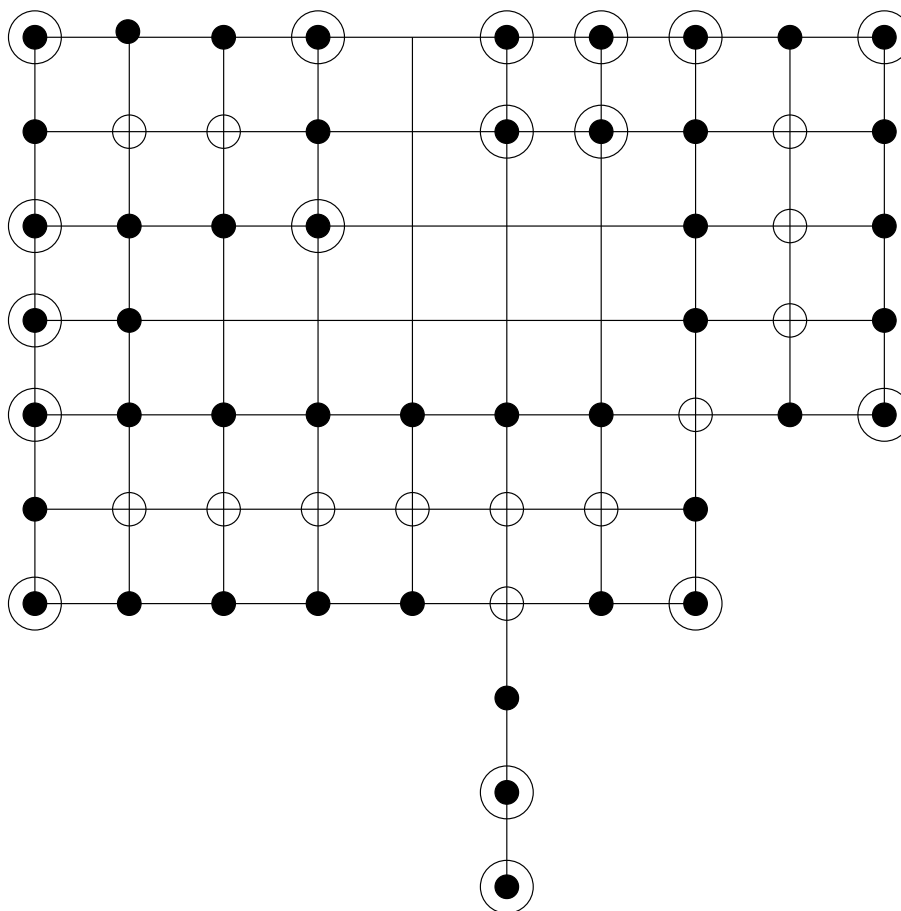
Beispiel: *Dilatation (4-Nachbarschaft)*



$$\left. \begin{aligned}
 M &= \{\bullet\} \\
 N(M) &= \{o\} = N(M') \\
 M' &= \{\bullet\} \cup \{o\} = M \cup \{o\}
 \end{aligned} \right\} D(M) = D(M')$$



Beispiel: Erosion (4-Nachbarschaft)



$$\left. \begin{aligned} M &= \{\bullet\} \cup \{\circ\} \cup \{\odot\} \\ K(M) &= \{\circ\} = K(M') \\ M' &= \{\bullet\} \cup \{\circ\} = M \setminus \{\odot\} \end{aligned} \right\} E(M) = E(M')$$

■

Anwendung : Restaurierung von binären Objekten

Dilatation : kleine Lücken werden geschlossen

Erosion : dünne Anhängsel werden beseitigt

Closing : Beseitigung von Löchern

Opening : Glättung von Konturen

} grobe Anteile bleiben erhalten

7.1.2 Minkowski-Operationen auf Punktfolgen

Führt man die mengentheoretisch begründeten morphologischen Operationen auf Minkowski-Operationen (Addition / Subtraktion) von Punktfolgen zurück, erweitern sich die gestaltstransformierenden Konzepte.

- ▶ Theorie der "math. Morphologie" von Serra, Matheron
- ▶ spez. Hardwaresystem dazu: TAS (Texture Analysis System)

Für die Zerlegung von Gestalt in einfachere Komponenten existieren zwei Zugänge:

- (a) Algebra der Faltungsoperation und Frequenzraumdarstellung linearer Operatoren.
Eine Signalfunktion wird linear in Anteile von harmonischen Basisfunktionen zerlegt.
- (b) Algebra der mathematischen Morphologie.
Eine (binäre) Gestalt wird nichtlinear in Anteile primitiver Gestalt zerlegt.
Es existiert auch eine "Grauskalenmorphologie".

Definition (Minkowski-Addition und -Subtraktion):

Seien $A, B \subset \mathbb{Z}^2$ zwei Punktmenge.

- $A \oplus B := \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$
heißt *Minkowski-Addition*
- $A \ominus B := \{ a - b \mid a \in A, b \in B \}$
heißt *Minkowski-Subtraktion*



Bemerkung (Addition / Subtraktion):

Zwei Mengen A und B , deren Elemente durch ihre N -Tupel von Koordinaten definiert sind, werden addiert — subtrahiert, indem ihre Koordinaten paarweise addiert — subtrahiert werden.

Mit Hilfe dieser beiden Mengenverknüpfungen kann man nun die morphologischen Operatoren definieren:

Sind (m, n) die Koordinaten der Elemente $a \in A$ und (k, l) die Koordinaten der Elemente $b \in B$, sowie (i, j) die Koordinaten von $A \oplus B$, so gilt

$$i = m + k \text{ und } j = n + l.$$

Definition (Dilatation / Erosion):

Seien $A, B \subset \mathbb{Z}^2$.

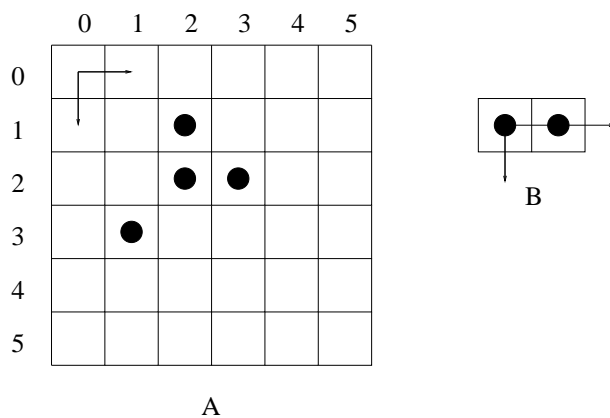
- $D := A \oplus B := \{ p \mid a \in A, b \in B : p = a + b \}$ ist die durch den *Dilatationsoperator* \mathcal{D} erzeugte Menge.
- $E := A \ominus B := \{ p \mid \forall b \in B : a = p + b \in A \}$ ist die durch den *Erosionsoperator* \mathcal{E} erzeugte Menge.

B heißt hierbei auch *struktur- oder gestaltbildendes Element*. B ist ein Modell für $N(M)$ bei \mathcal{D} bzw. für $R(M)$ bei \mathcal{E} .

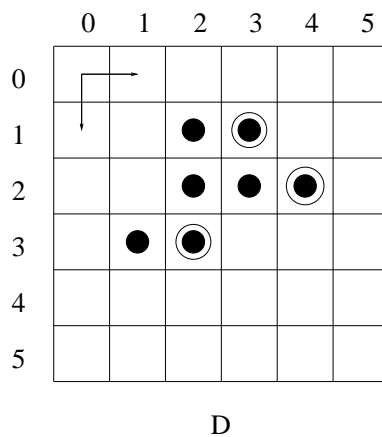


Beispiel: zur Dilatation

Sei $A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 2), (1, 3)\}$, $B = \{(0, 0), (1, 0)\}$:



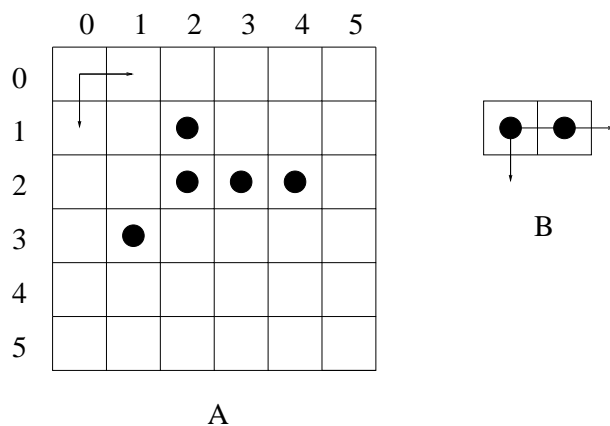
Dann ist $D = A \oplus B = \{(2, 1), (2, 2), (3, 2), (1, 3)\} \cup \{(3, 1), (4, 2), (2, 3)\}$:



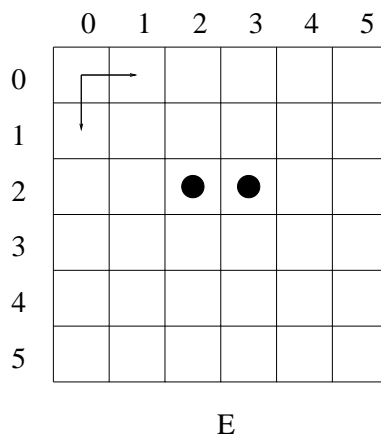
■

Beispiel: zur Erosion

Sei $A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (1, 3)\}$, $B = \{(0, 0), (1, 0)\}$:



Dann ist $E = A \ominus B = \{(2, 2), (3, 2)\}$:



Die erodierte Menge E ist die Menge, welche sich unter der Bedingung ergibt, daß B , verschoben um (i, j) vollständig in A liegt. ■

Definition (Translation):

Sei $C \subset \mathbb{Z}^2$ und $p \in \mathbb{Z}^2$ ein Punkt. Die Translation um p ist durch

$$C_p := C \oplus \{p\}$$

definiert. ■

Bemerkung:

Seien $A, B, C \subset \mathbb{Z}^2$.

- ▶ $A \oplus B = \{ p \mid \exists a \in A, b \in B : p = a + b \} = \{ p \mid B_p \cap A \neq \emptyset \}$
- ▶ $A \ominus B = \{ p \mid \forall b \in B : a = p + b \in A \} = \{ p \mid B_p \subset A \}$
- ▶ $(0, 0) \notin B \rightarrow A \not\subset A \oplus B$

(Wenn $(0, 0)$ nicht in B ist, dann ist $A \not\subset D$ und es existieren $e_{ij} \in E$, $e_{ij} \notin A$.)

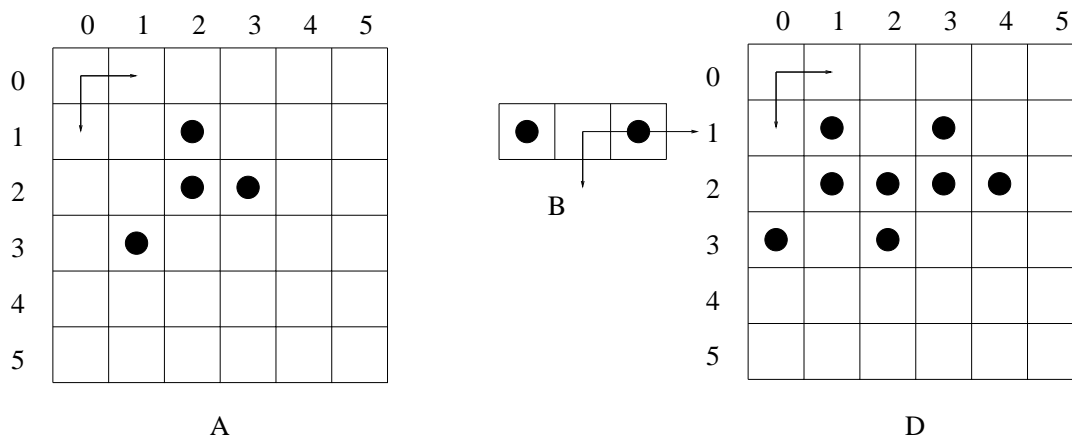
Bemerkung:

Seien $A, B \subset \mathbb{Z}^2$.

- ▶ Das strukturbildende Element B bestimmt, wie die spezielle Transformation aussieht. Es kann beliebige Gestalt haben. Wäre B durch die 4-Nachbarschaft oder 8-Nachbarschaft gegeben, würden Minkowski-Operationen und Nachbarschaftsmethoden die gleichen Ergebnisse liefern.
- ▶ B muß nicht zusammenhängend sein (s. nächstes Beispiel).
- ▶ Der Aufpunkt (also der Koordinatenursprung) von B muß nicht Element von B sein (s. nächstes Beispiel).
- ▶ Die Dilatation ist kommutativ, die Erosion ist *nicht* kommutativ.

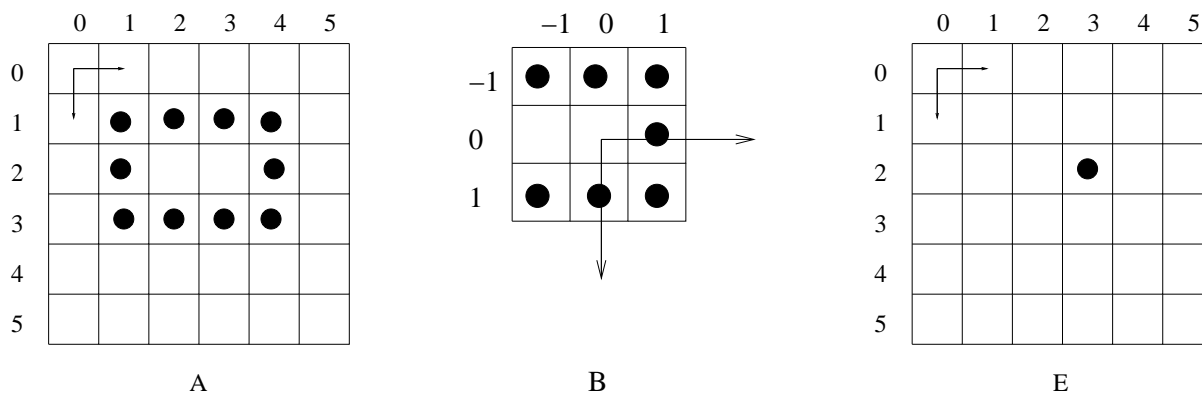
Beispiel: Dilatation

Seien $A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 2), (1, 3)\}$, $B = \{(1, 0), (-1, 0)\}$, dann ist $D = A \oplus B$



Beispiel: Erosion

- Enthält das erodierende Strukturelement kein Element am Ursprung, kann das Ergebnis nichts mit der Menge A zu tun haben



$$E = \bigcap_{b_{kl} \in B} A_{-(k,l)} \quad \longrightarrow \quad e_{32} \notin A!$$



Bemerkung (Dilatation — Erosion):

Seien $A, B \subset \mathbb{Z}^2$.

- Die Dilatation kann als Vereinigung aller verschobenen Elemente der Menge B bzw. A betrachtet werden:

$$(a) \quad D = A \oplus B = \bigcup_{a \in A} B_a$$

(\rightarrow Nachbarschaftsoperator)

(b) $D = A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b$

(\rightarrow kein Nachbarschaftsoperator)

- Die Erosion kann als Schnitt aller negativ verschobenen Elemente der Menge A betrachtet werden:

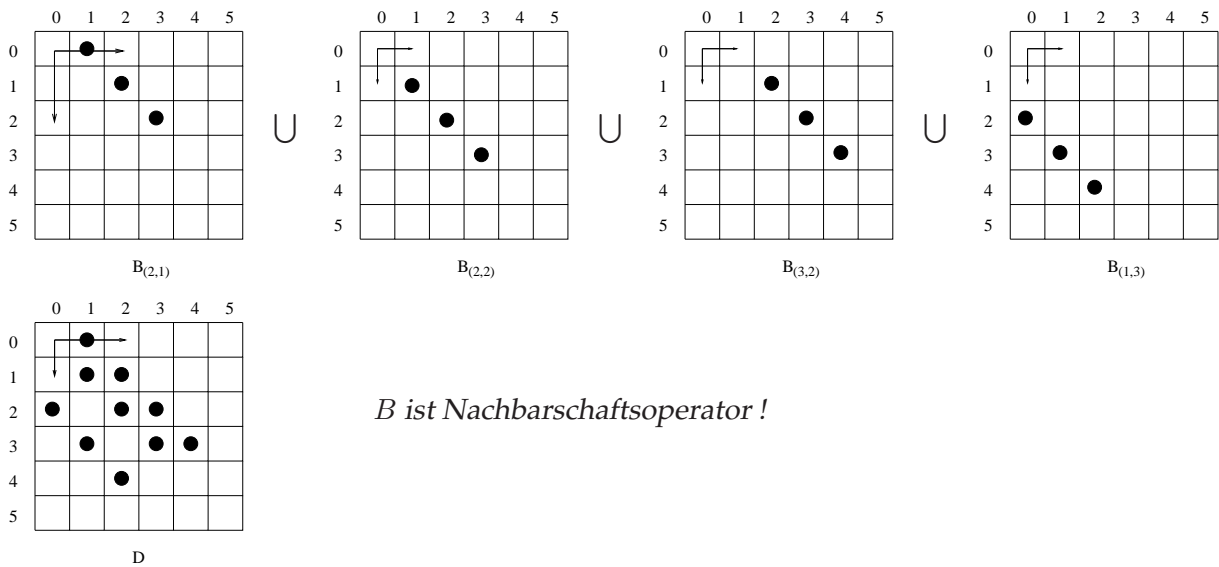
(a) $E = A \ominus B \neq \bigcap_{a \in A} B_{-a}$, da Erosion nicht kommutativ

(\rightarrow Definition als Nachbarschaftsoperator existiert nicht)

(b) $E = A \ominus B = \bigcap_{b \in B} A_{-b}$

(\rightarrow kein Nachbarschaftsoperator)

Beispiel: Dilatation $D = \bigcup_{a \in A} B_a$, A wie oben

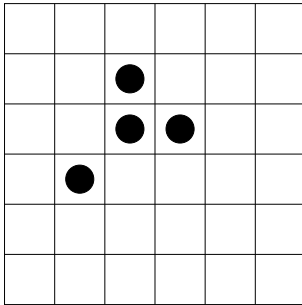


Bemerkung (Pipeline-Rechner-Realisierung):

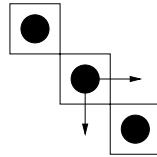
Seien $A, B \subset \mathbb{Z}^2$.

- Pipeline-Rechner-Realisierung von $D = A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b$:
 Für jeden Punkt $b \in B$ wird parallel A_b berechnet; danach werden die Mengen vereinigt.
 Entsprechendes gilt auch für die Erosion, wenn der Schnitt der Menge berechnet wird.

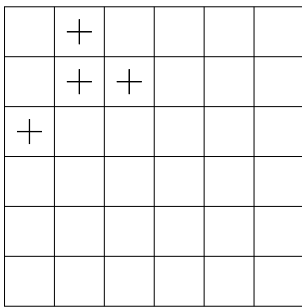
Beispiel: *Dilatation* $D = \bigcup_{b \in B} A_b$



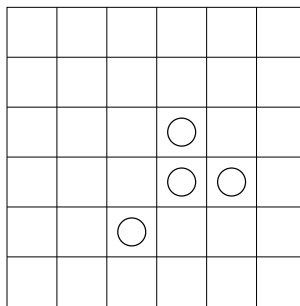
$A(0,0) \equiv A$



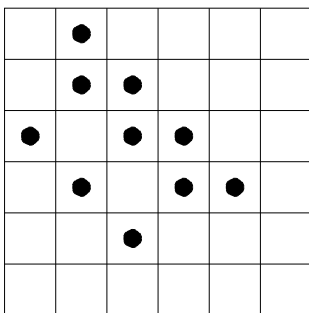
B



$A(-1,-1)$



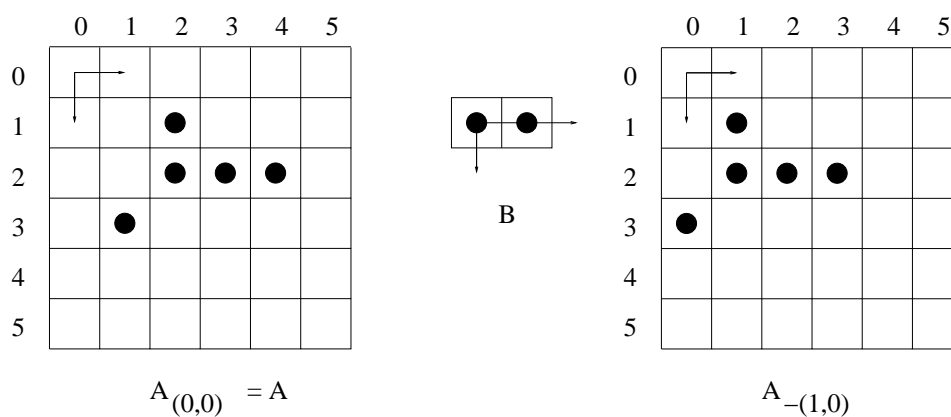
$A(1,1)$



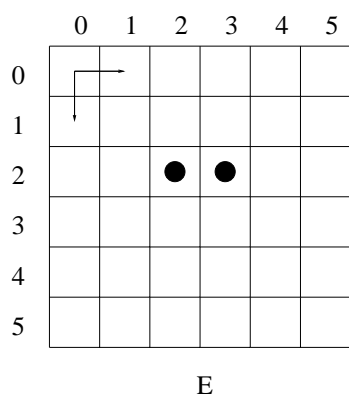
$D = A(0,0) \cup A(-1,-1) \cup A(1,1)$



Beispiel: Erosion Sei $A = \{(2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (1, 3)\}$, $B = \{(0, 0), (1, 0)\}$:
 $E = \bigcap_{b \in B} A_{-b}$



Dann ist $E = A \ominus B = A_{(0,0)} \cap A_{-(1,0)}$:



Satz (Dualitätsproblem):

Seien $A, B \subset \mathbb{Z}^2$.

- Mengenlehre:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- Morphologie:

1. Komplementbildung $A \rightarrow \overline{A}$

2. Reflexion (Koordinatenumkehr) $A \rightarrow \check{A} := \{-p \mid p \in A\}$

Damit gilt:

$$\overline{A \ominus B} = \overline{A} \oplus \check{B}$$

$$\overline{A \oplus B} = \overline{A} \ominus \check{B}$$

Satz (Kettenregel für Erosion und Dilatation):

Seien $A, B, C \subset \mathbb{Z}^2$.

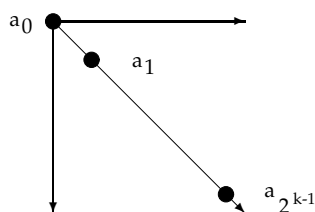
- $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
 $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$
- Sei $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_n$, dann gilt:
 $A \oplus B = (\dots ((A \oplus B_1) \oplus B_2) \oplus \dots \oplus B_n)$
 $A \ominus B = (\dots ((A \ominus B_1) \ominus B_2) \ominus \dots \ominus B_n)$



► Hieraus folgt wieder, daß Pipeline-Verarbeitung effizient ist.

Beispiel: Zerlegung eines Liniensegmentes

- Gegeben: Ein digitales Liniensegment L_{2^k} der Länge 2^k (Punkte)
 - Frage: Wie ist das Liniensegment durch kaskadierte Dilatation zu erzeugen ?
 - $L_{2^k} := \{ a_i \in \mathbb{Z}^2 \mid i = 0, \dots, 2^k - 1 \}$ mit a_0 Ursprung.
- Es gelte: $a_i = ia_1$ für $i = 0, \dots, 2^k - 1$.



- Optimale Zerlegung: $L_{2^k} = \{0, a_1\} \oplus \{0, a_2\} \oplus \{0, a_4\} \oplus \dots \oplus \{0, a_{2^{k-1}}\}$
 $\rightarrow k$ 2-Punkte-Elemente (mit $0 := (0, 0)$).

k	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	$\{0, a_i\}$	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
1	$\{0, a_1\}$	•	•														
2	$\{0, a_2\}$	•		•													
3	$\{0, a_4\}$	•				•											
4	$\{0, a_8\}$	•								•							

weiteres Problem:

- Gegeben : Ein Liniensegment L_m mit m Punkten a_i , $i = 0, \dots, m - 1$, mit $a_0 = 0$ als Ursprung und $a_i = ia_1$, $i = 0 \dots, m - 1$.
- Frage : Wie sieht die optimale 2-Punkte-Zerlegung des Liniensegmentes aus, wenn $2^k < m < 2^{k+1}$?

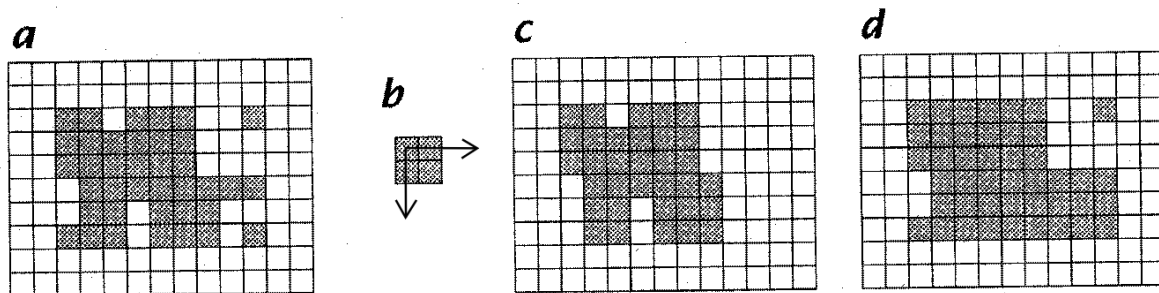
- Antwort: $L_m = L_{2^k} \oplus \{0, a_{m-2^k}\}$
 $= \{0, a_1\} \oplus \{0, a_2\} \oplus \{0, a_4\} \oplus \dots \oplus \{0, a_{2^{k-1}}\} \oplus \{0, a_{m-2^k}\}$

Die optimale Zerlegung erfordert nur $k + 1$ 2-Punkte-Elemente.

Definition (Opening / Closing):

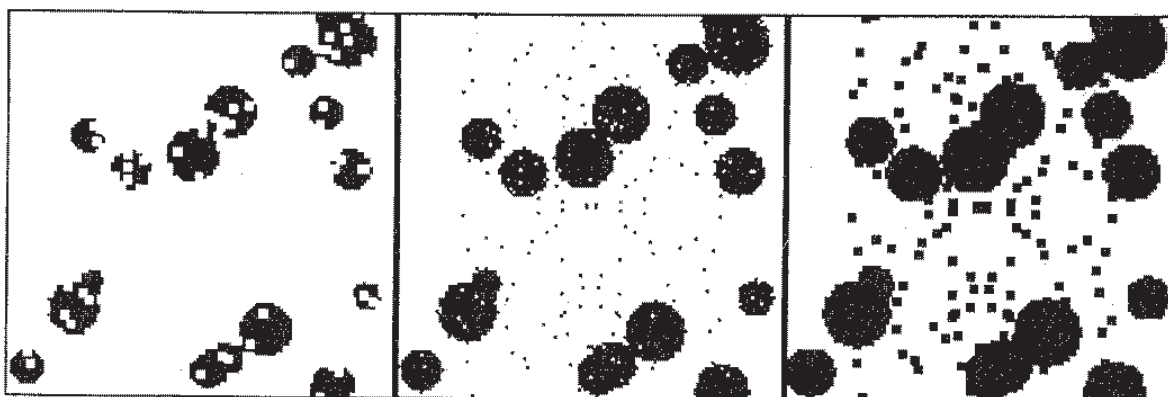
Seien $A, B \subset \mathbb{Z}^2$.

- $O = A \circ B := (A \ominus B) \oplus B$
 O heißt *Openingoperator*
- $F = A \bullet B := (A \oplus B) \ominus B$
 F heißt *Closingoperator*

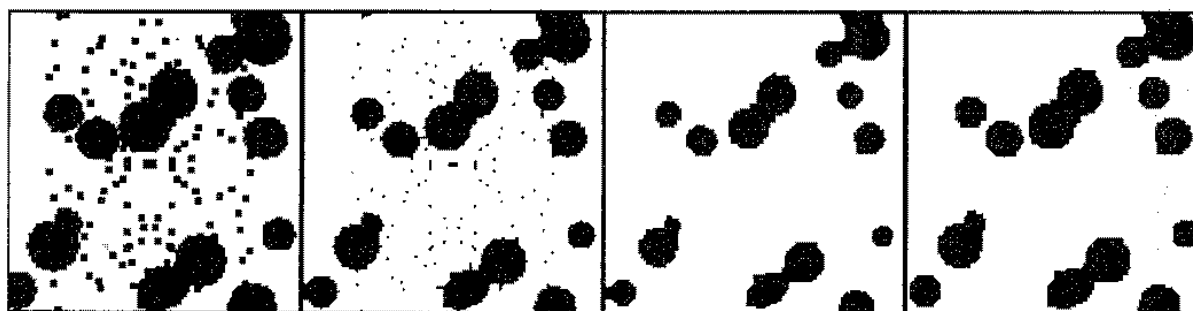


Opening und Closing eines 13×10 diskreten binären Bildes durch ein 2×2 strukturbildendes Element (Die Objektpunkte sind grau):

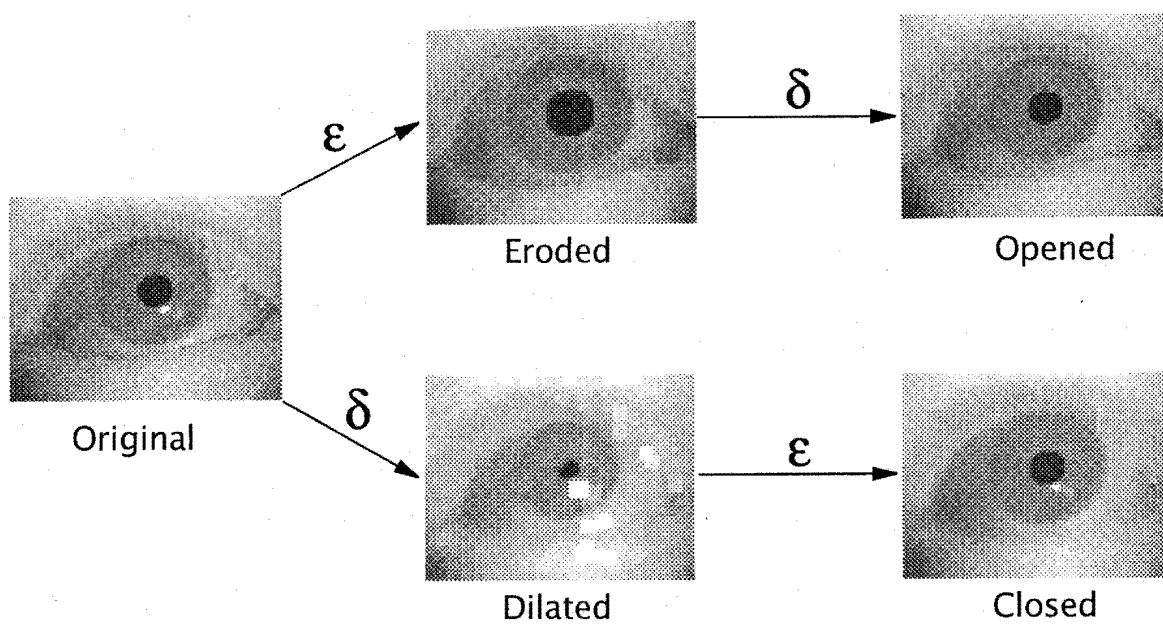
- a** : a binäres Bild X
- b** : a strukturbildendes Element B
- c** : Opening von X durch B
- d** : Closing von X durch B



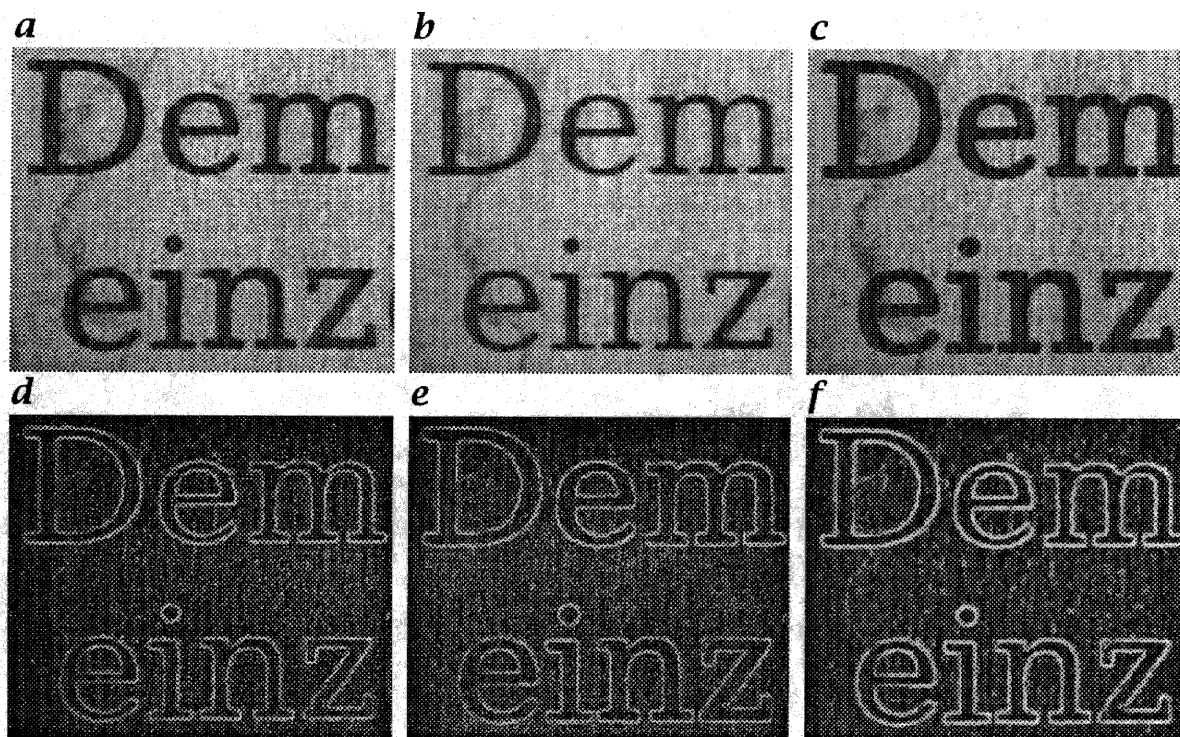
Nichtlineare Operationen im Binärbild B
(Erosion EB - Original B - Dilatation DB)



Nichtlineare Operationen
(Anwendung von $D, F = ED, EF = EED$ und $OF = DEED$ auf B)



Opening und Closing eines Graustufen-Bildes FE in einem 5×5 Fenster.



Morphologische Gradienten oder wie kombiniert man Erosion und Dilatation zur Verbesserung von Objektkanten:

a : Original **f** **b** : Dilatation $\delta(f)$ **c** : Erosion $\epsilon(f)$.

Kantenbilder : **d** : $\delta(f) - f$ **e** : $f - \epsilon(f)$ **f** : $\delta(f) - \epsilon(f)$.

In diesem Fall ist das strukturbildene Element B ein 3×3 Quadrat.

7.1.3 Hit-and-Miss-Operator

Anwendungen:

- ▶ zur *Selektion* von speziellen Bildpunkten : Eckpunkte, isolierte Punkte, Konturpunkte
- ▶ Template-Matching, Dünnen, Verdicken

Definition (Hit-and-Miss-Operator):

Seien $A, B \subset \mathcal{Z}^2$ und $B = B_1 \dot{\cup} B_2$, d.h. $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

$$H = \mathcal{H}(A, B) := A \otimes B := (A \ominus B_1) \cap (\bar{A} \ominus B_2)$$

heißt \mathcal{H} *Hit-and-Miss-Operator*.



Bemerkung:

Seien $A, B \subset \mathbb{Z}^2$ und $B = B_1 \dot{\cup} B_2$.

$$B_2 = \emptyset \rightarrow H = E$$

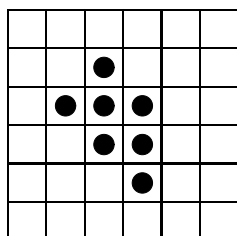
Die Definition des HuM-Operators drückt aus:

► B_1 wirkt erodierend auf A und

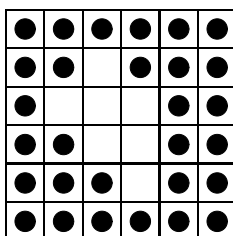
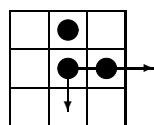
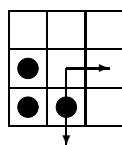
► B_2 wirkt erodierend auf \bar{A} .

Beispiel: Bildpunkt-Selektion mittels Hit-and-Miss-Operator

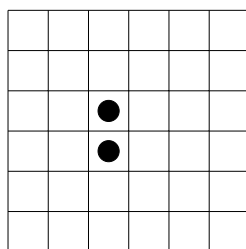
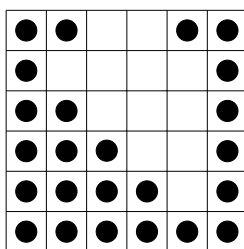
- Lokalisierung der "linken unteren Ecke" (Annahme toroidaler Träger):



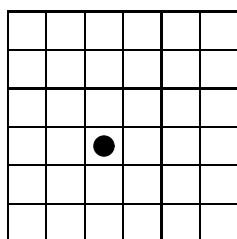
A

 \bar{A}  B_1  B_2

Dann ist $E_1 = A \ominus B_1$, $E_2 = \bar{A} \ominus B_2$:

 E_1  E_2

Also ist $H = (A \ominus B_1) \cap (\bar{A} \ominus B_2)$:

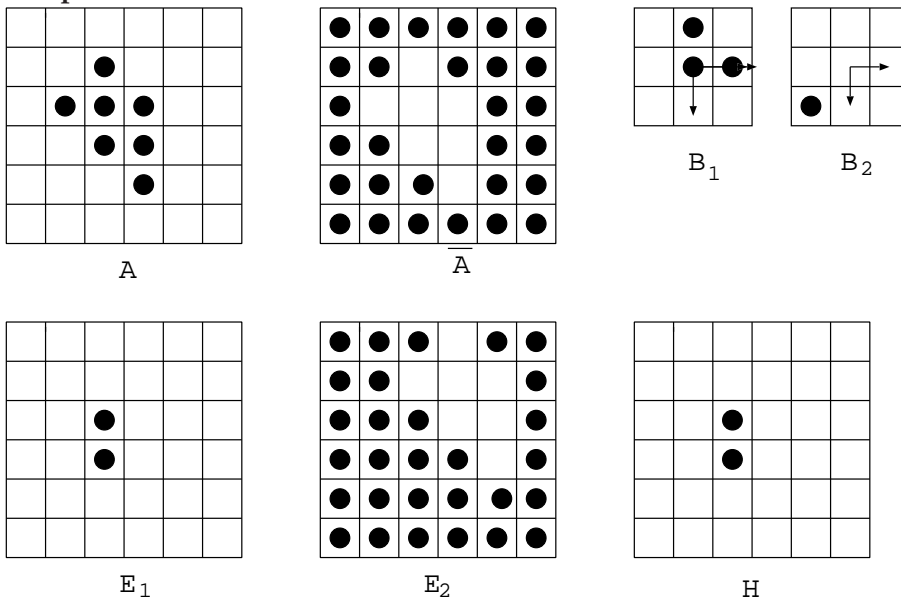


H

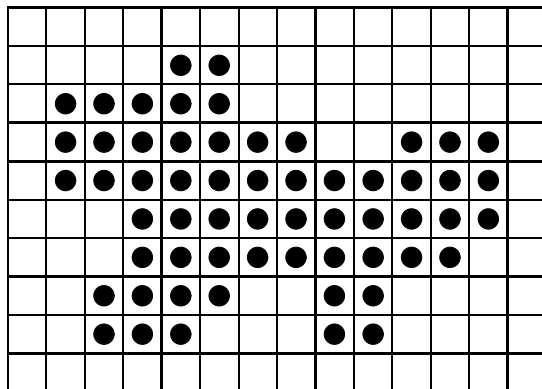
Hier gilt:

- B_1 lokalisiert alle Punkte von A , die nördliche und östliche Nachbarn haben und selbst zu A gehören; dies sind Kandidaten für die gesuchten Konturpunkte.
- B_2 lokalisiert alle Punkte von \bar{A} , die Kandidaten für die äußere Grenze von A in gesuchter Richtung sind.
- Werden die Bedingungen schwächer formuliert (z.B. für B_2), erhält man mehr Punkte für die Lösungsmenge (siehe Beispiel).

Beispiel:

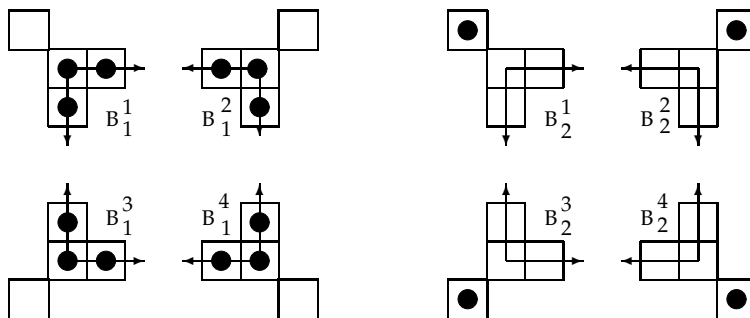


- Kontursuche: $C = \bigcup_i H_i = \bigcup_i (A \otimes B^i)$



A

Definiere $B^i := B_1^i \cup B_2^i$ ($i = 1, \dots, 4$):



				1	2								
	1	1/2	1	1	2								
	1/3	○	○	○	2	2	2			1	1/2	2	
	3	3	3	○	○	○	2	2	1	1	○	2/4	
			3	○	○	○	○	○	○	○	4	4	
			1	○	4	4	3	3	4	4	4		
		1	1	4	4			3	4				
		3	3/4	4				3	4				

H

Die Punkte, die mit den Zahlen i markiert sind, sind die Ergebnispunkte des Hit-And-Miss-Operators.

Diese Zahlen bedeuten, daß B^i an diesem Punkt "matcht".

Die Punkte \circ sind die gelöschten Punkte.



Beispiel: Template-Matching mittels Hit-and-Miss-Transformation

s. Machine Vision and Application, 7/94, S.59-68

Anwendung: Klassifizieren von Fischen

- Sei T : Template, W : Window, $T \subset W$.

Sei F : binäre Objektfunktion.

Gelte: Ein Punkt $x \in F$ matcht das Template T exakt, wenn das nach x verschobene Template in F enthalten ist und das Komplement \bar{T} in \bar{F} enthalten ist:

$$T_x \subset F \wedge (W \setminus T)_x \subset \bar{F}.$$

Menge der Match-Punkte: $F \otimes (T, W \setminus T)$.

- Komponenten des Systems:

1. PDL für primitive Gestaltselemente (Konturen) [Sprache]
2. Hit-and-Miss-Matching

3. Multi-Layer-Perzeptron als Klassifikator

zu 1. syntaktische Formbeschreibung:

kontextfreie Grammatik $G = (V_n, V_t, P, S)$ mit $V_t = \{a_i\}$: V_n Menge der Nicht-Terminal-Symbole V_t Menge der Terminal-Symbole P Ableitungsregeln: $\beta \rightarrow \rho$ mit $\beta, \rho \in \{V_n, V_t\}$ S Startsymbol $S \in V_n$

Formprimitiva:

 a_1 : – gerade Linie a_2 : \frown konvexe Linie a_3 : \smile konkave Linie a_4 : \wedge Ecke

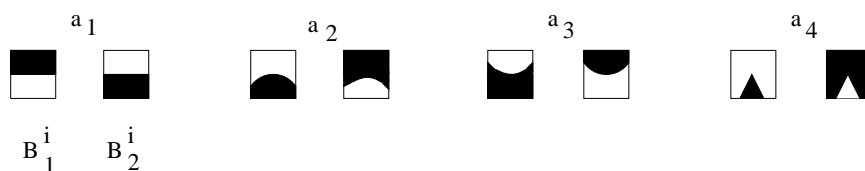
Parse von Gestalt-Prototypen (Prolog)

Dorsch: $\{a_1, a_4, a_3, a_4, a_4, a_4, a_1, a_1, a_4, a_1, a_1, a_4, a_4, a_3, a_4\}$,

Flunder: ...

Rotbarsch: $\{a_4, a_2, a_3, a_3, a_3, a_4, a_1, a_4, a_4, a_1, a_4, a_4, a_2\}$

zu 2. Hit-and-Miss-Matching:

- LUT (look-up-Tabellen): $a_i \rightarrow B_i = \{B_1^i, B_2^i\}$:

- 8 Orientierungen

- (evtl.) Größenskalen

- Datenstruktur: $L(i) = (n, m, ((A, x, y)(l)(j, k)))$: i : Objektnummer j : Index strukt. El. k : Index Orientierung l : Index für HM-Fläche A der Kombination (i, j, k) n : Anzahl des matchenden strukt. El., die Objekt i charakterisieren m : Zahl der Orientierungstests A : HM-Fläche (i, j, k)

(x, y) : Schwerpunkt von A_i

zu 3. Neuronal-Klassifikator (MLP):

I. Input I : $96=N*J*K$, $N=3$ Klassen, $K=8$ Anzahl Orientierungen

II. Hidden-Layer H : $32=J*K$, $J=4$ Anzahl Templates

III. Output-Layer O : $3=N$

Input:

$$LI(i) = (((A_1, A_2, A_3)(k : 1, \dots, K)) (j : 1, \dots, J)) (i)$$

Prozessoren:

P1 Host

P2 Korrelator

P3 NN-Klassifikator

■

7.2 Distanztransformationen

Rekursive Erosion von Objekten führt zu schrittweiser Vernichtung der Objekte:

Definition (Rekursive Erosion):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $M \subset P$.

$$M^0 := M$$

$$M^i := M^{i-1} \setminus R(M^{i-1}) \quad (\text{für } i \geq 1)$$

■

Bemerkung (zur rekursiven Erosion):

Sei $M \subset \mathbb{Z}^2$ mit der Nachbarschaft $\mathcal{N}_4 \left(B \sim \begin{array}{c} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \right)$.

Jeder Schritt der rekursiven Erosion von M beseitigt diejenigen Objektpunkte, die 4-Nachbarn zum Untergrund sind.

Definition (Distanztransformation):

Sei $\Gamma = [P, N]$ eine NS und $M \subset P$.

Eine *Distanztransformation* von M erzeugt eine Abbildung D , in der den Elementen von M ihre minimale Distanz zur Komplementärmenge \overline{M} zugewiesen wird.

■

Die City-Block-Distanz eines Objektpunktes zu seinem nächsten Untergrundpunkt (entspricht der Anwendung der absoluten Metrik bzw. \mathcal{N}_4) ist gleich der Zahl an Iterationsschritten einer Erosion, die den Objektpunkt in einen Untergrundpunkt transformiert.

Die Wahl des strukturierenden Elementes entspricht der Wahl einer Metrik. Die Anwendung der Distanztransformation bedeutet also den Übergang in einen metrischen Raum zur Gestaltsbeschreibung des Objektes.

- ▶ Die Distanztransformation ist ein globaler Operator
- ▶ In der Praxis wird sie mittels lokaler Operatoren realisiert, die dann iteriert angewendet werden (s.u.) → Lokale Operatoren bewirken globale Aussagen!

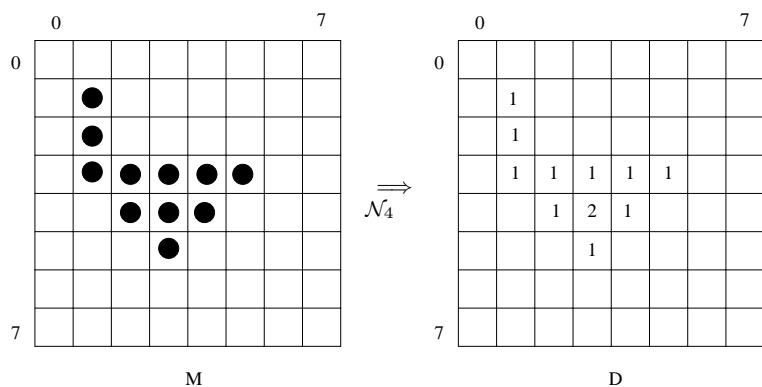
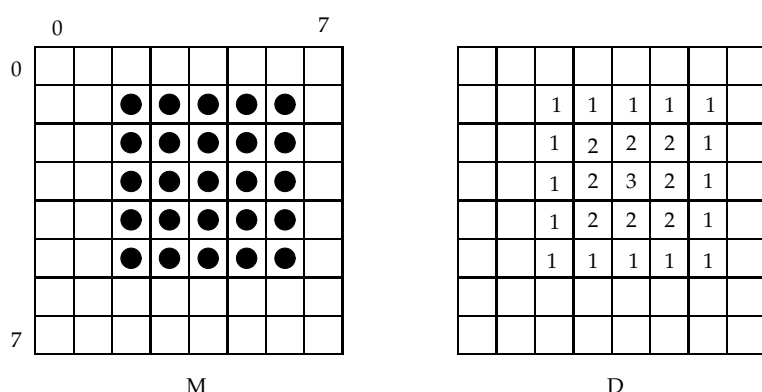
Satz (Distanztransformation eines binären Objektes):

Sei $M \subset \mathcal{Z}^2$ ein binäres Objekt, d.h. $M_{(m,n)} = 1 \forall (m,n) \in M$.
Dann gilt

$$D_{(m,n)} = \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}} M_{(m,n)}^i = \max\{i + 1 | M_{(m,n)}^i \neq 0\}.$$



Beispiel: zur Distanztransformation



↓ N_8

	0							7
0								
		1						
		1						
		1	1	1	1	1		
			1	1	1			
				1				
7								

D



Die Algorithmen zur Distanztransformation werden in parallele und serielle Algorithmen eingeteilt:

Definition (Paralleler Algorithmus zur Distanztransformation):

Sei $M \subset \mathbb{Z}^2$ ein Objekt.

Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}^2$ eine (feste) Nachbarschaft (in lokalen Koordinaten) und $d_{(k,l)}$ Distanzwerte für $(m, n) \in M$ und $(k, l) \in \mathcal{N}$.

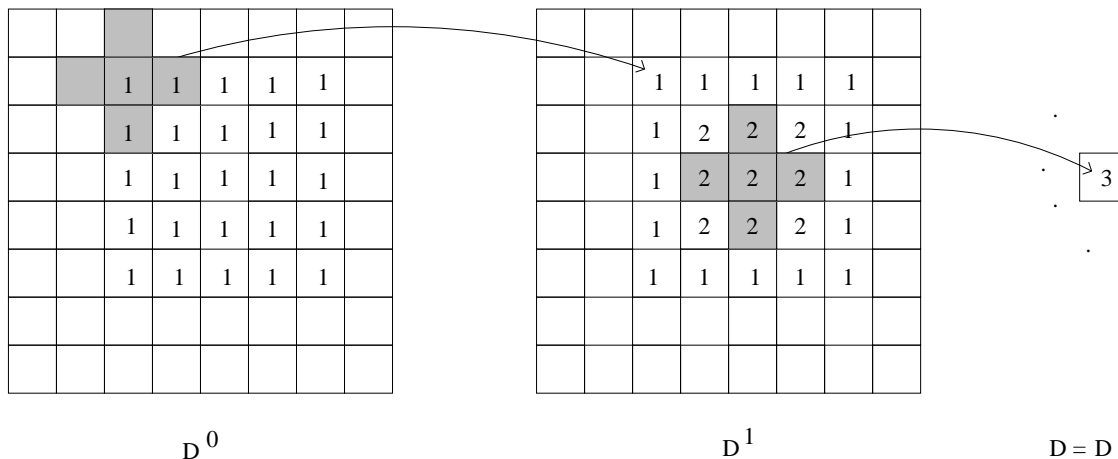
$$d_{(k,l)} : \begin{cases} \mathcal{N}_4 & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline 1 & A & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array} \\ \mathcal{N}_8 & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & A & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{cases}$$

$$D_{(m,n)}^i = \begin{cases} \min\{ D_{(m,n)+(k,l)}^{i-1} + d_{(k,l)} \} & \text{für } (k, l) \in \mathcal{N} \text{ und } (m, n) \in M \\ D_{(m,n)}^0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$D_{(m,n)}^0 = \begin{cases} 1 & \text{für } (m, n) \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Beispiel: zum parallelen Algorithmus



► Abbruch der Iteration dann, wenn keine Änderungen mehr im Distanzbild erzeugt werden.

Definition (Sequentieller Algorithmus zur Distanztransformation):

Sei $M \subset \mathbb{Z}^2$ ein Objekt.

Sei $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}^2$ eine (feste) Nachbarschaft (in lokalen Koordinaten) und $d_{(k,l)}$ Distanzwerte für $(m, n) \in M$ und $(k, l) \in \mathcal{N}$.

- Methode der Abtastung (*Chamfer-Distanztransformation*):
 - 1. Paß: links-oben \rightarrow rechts-unten
 - 2. Paß: rechts-unten \rightarrow links-oben

Dazu passende Aufspaltung von \mathcal{N} in $\mathcal{N}_{(1)}$ und $\mathcal{N}_{(2)}$

- Metrikwerte d^i :

 - bei \mathcal{N}_4 : $d^1 = 1, d^2 = \infty$
 - bei \mathcal{N}_8 : $d^1 = d^2 = 1$

Jeder Bildpunkt erhält Distanzinformation nur von seinen bereits inspizierten Nachbarn.

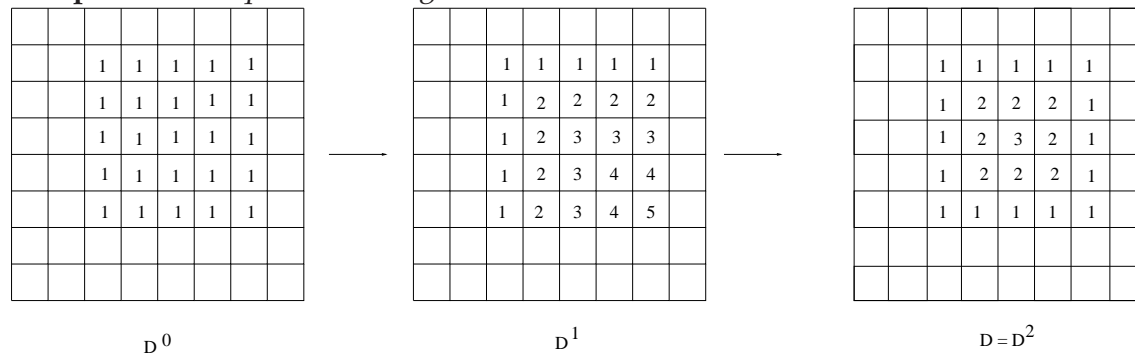
- 1. Paß:

$$D^1_{(m,n)} := \begin{cases} \min\{ D^0_{(m,n)} + d_{(k,l)} \mid (k, l) \in \mathcal{N}_{(1)} \} & : (m, n) \in M \\ D^0_{(m,n)} & : \text{sonst} \end{cases}$$

- 2. Paß:

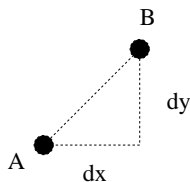
$$D^2_{(m,n)} := \begin{cases} \min\{ D^1_{(m,n)}, D^1_{(m,n)} + d_{(k,l)} \mid (k, l) \in \mathcal{N}_{(2)} \} & : (m, n) \in M \\ D^0_{(m,n)} & : \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel: zum sequentiellen Algorithmus



Bemerkung (Anwendung der DT zur Vermessung von Objekten):

- Fehler zur Euklidischen Norm:



wird maximal für $dx = dy$:

$$e_{8max} = \frac{E_{8max}}{dx} = 1 - \sqrt{2} \approx -41\%$$

$$e_{4max} = \frac{E_{4max}}{dx} = 2 - \sqrt{2} \approx 59\%$$

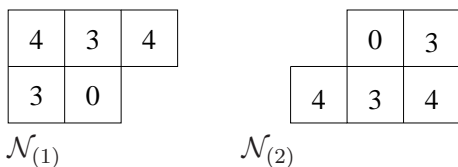
- Ausweg (in \mathcal{N}_8): $d^2 = \sqrt{2}$ setzen.
- bessere Approximation (Borgefors), um Integerrechnung zu ermöglichen: $d^1 = 3$, $d^2 = 4$
Die um den Faktor 3 zu großen Distanzwerte können anschließend normiert werden.

Bemerkung (Verwendung der DT beim Matching):

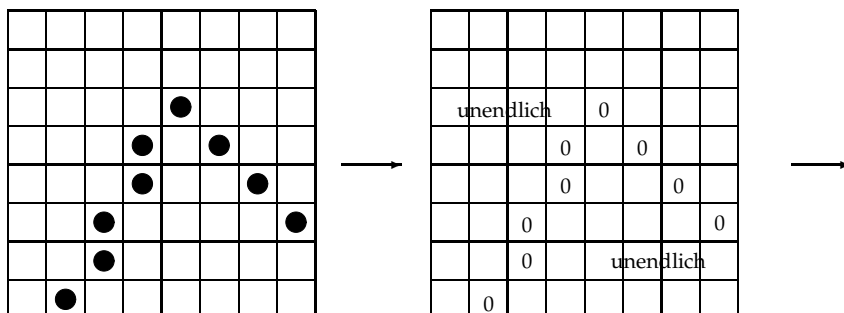
- ▶ Bild-Bild-Matching (Bildfolgen, Stereo)
- ▶ Bild-Template-Matching

Beispiel: Konturorientiertes Matching

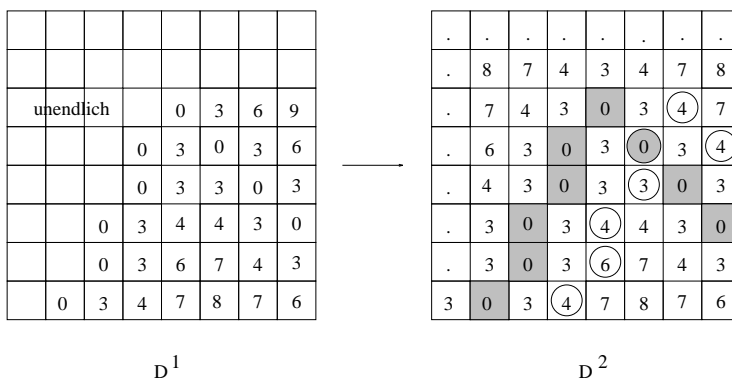
(a) Schritt: Transformation eines Konturbildes in ein Distanzbild
 Nachbarschaften des 1. und 2. Passes:



Das Konturbild wird umgeformt:



Dann wird die Distanz in der Komplementmenge der Kontur in 2 Pässen berechnet:



(b) Schritt: Summe aller Distanzwerte in D² bzgl. des Templates T (→ Kreise in D²)

(c) Schritt: Minimierung der Summe (durch Verschieben von T in D²)

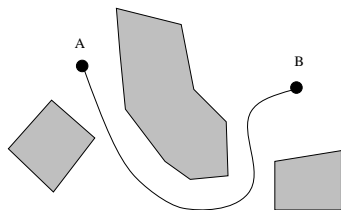
Bei idealer Anpassung sollte Summe zu Null werden. Real ist aber bestenfalls nur ein Minimum zu erreichen.

Robustes Verfahren gegenüber Störungen → Luftbilder-Strukturvergleich

Achtung: Freiheitsgrade: Rotation und Skalierung

Beschleunigung: Pyramiden-Matching (siehe Bsp. Zahnräder)



Beispiel: *Wegeplanung von Robotern**Zwänge* → spezielle Distanztransformation

7.3 Rangordnungsoperatoren

- ▶ Dilatation und Erosion in Binärbildern
→ Dilatation und Erosion in Grauwertbildern
- ▶ Dilatation → Aufblähen des Grauwertgebirges
Erosion → Schrumpfen des Grauwertgebirges
- ▶ Stichworte:
 - Grauskalenmorphologie
 - Rangordnungsfilter: Medianfilter (s.u.)
- ▶ Dilatation → Maximumbildung der Grauwerte in lokalem Fenster
Erosion → Minimumbildung der Grauwerte in lokalem Fenster

Definition (Rangordnungsoperatoren):

Sei $\mathcal{U}_{m,n} \subset M \times N$ der Einzugsbereich / Support eines lokalen Operators am Aufpunkt (m, n) in einem Bild der Größe $M \times N$. Der Einzugsbereich habe die Größe $K \times L$ und erfasse $I = KL$ Bildpunkte mit den Grauwerten $f_i, 0 \leq i \leq I - 1$.

Ein *Rangordnungsfilter* / *~operator* der Ordnung k selektiert aus der geordneten Liste der Grauwerte $f_{(i)}$ den Grauwert $f_{(k)}, 0 \leq k \leq I - 1$, und ordnet diesen dem Aufpunkt (m, n) zu.

Beispiel: zum Rangordnungsoperator

Sei i die Indizierung von f_i , $0 \leq i \leq I - 1$ ($K = L = 3$):

0	1	2
3	4	5
6	7	8

17 15 13

Sei f_i : 16 15 11

18 13 12

Aufgabe: aufsteigende Sortierung der Werte $f_i \rightarrow f_{(i)}$

(i) ist dann eine Permutation von i , so daß $f_{(i)}$ monoton wachsend ist.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	17	15	13	16	15	11	18	13	12
(i)	5 (MIN)	8	2	7	1 (MED)	4	3	0	6 (MAX)
$f_{(i)}$	11	12	13	13	15	15	16	17	18

■

► Rangordnungsfilter sind Spezialfälle der Ordnungsstatistikfilter.

Definition (Ordnungsstatistikfilter):

Seien f_i und w_i wie oben mit $0 \leq i \leq I - 1$ gegeben.

Die Grauwertzuordnung gemäß

$$g_z = \sum_{i=0}^{I-1} w_i f_{(i)}$$

definiert den *Ordnungsstatistikfilter*.

$w_i \in \mathbb{R}$ reelle Gewichte.

$f_{(i)}$ aufsteigend sortierte Grauwerte des Einzugsbereiches.

■

► OSF berechnen statistische Merkmale als Linearkombination der sortierten Grauwerte

► OSF kommutieren mit linearen monotonen Funktionen.

Die Ordnungsstatistik einer linearen monotonen Funktion ist gleich der linearen monotonen Funktion der Ordnungsstatistik:

Gegeben sei eine affine Transformation der Grauwerte $h_i = a f_i + b$, dann gilt auch

$h_{(i)} = af_{(i)} + b$. Für den OSF folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{I-1} w_i h_{(i)} &= \sum_{i=0}^{I-1} w_i (a f_{(i)} + b) = a \sum_{i=0}^{I-1} w_i f_{(i)} + b \sum_{i=0}^{I-1} w_i \\ &= a \sum_{i=0}^{I-1} w_i f_{(i)} + c \end{aligned}$$

Definition (Minimum-, Maximum-, Medianoperator als OSF):

Sei $g_z = \sum_{i=0}^{I-1} w_i f_{(i)}$ ein OSF.

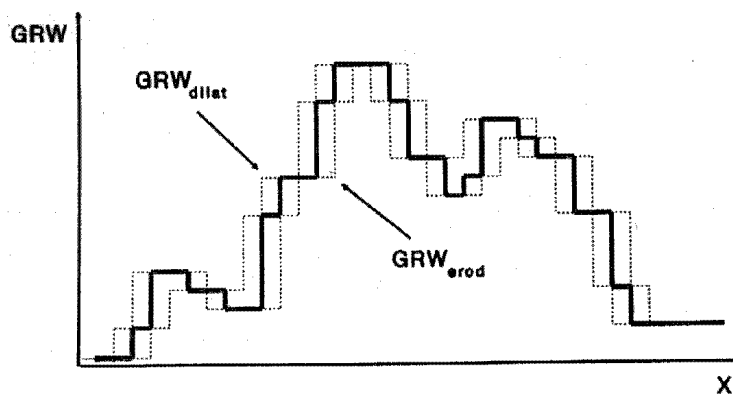
Die folgenden Operatoren ergeben sich durch Festlegung der w_i .

- *Minimum-Operator* MIN: $w_0 := 1, w_i := 0$ für $i \neq 0$
Der minimale Grauwert wird dem Aufpunkt zugeordnet.
- *Maximum-Operator* MAX: $w_{I-1} := 1, w_i := 0$ für $i \neq I - 1$
Der maximale Grauwert wird dem Aufpunkt zugeordnet.
- *Median-Operator* MED: $w_M := 1$ mit $M := \frac{I+1}{2}, w_i := 0$ für $i \neq M$



Bemerkung (Anwendungen):

- *Minimumoperator:*
Entspricht Erosion (Bevorzugung kleiner Grauwerte)
→ Regionenbildung : Täler verbreitern sich
- *Maximumoperator:*
Entspricht Dilatation (Bevorzugung großer Grauwerte)
→ Regionenbildung : Hügel verbreitern sich
- *Medianoperator:*
kantenerhaltende Glättung in Grauwertbildern
Konturglättung in Binärbildern
sind statistisch sehr gut untersucht



Eigenschaften von Rangordnungsoperatoren (ROO)

Satz (Fixpunkte von ROO):

- Es existieren *Fixpunkte / Wurzeln*, die invariant sind gegenüber ROO.

- Im 1D-Fall:

Medianfilter der Breite K läßt jede *monotone* Signalfolge mit m Abtastwerten unverändert, $m \geq \frac{3+K}{2}$

Medianfilter der Breite K beseitigt Störungen der Breite $m \leq \frac{K+1}{2}$

- Im 2D-Fall:

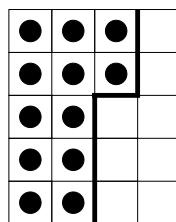
Es existieren keine solchen einfachen Regeln.

Hinreichende Bedingungen für Wurzel:

- Binärbild:

Binärmuster ist dann ein Fixpunkt eines Medianfilters,

wenn die Trennlinie zwischen Objekt und Hintergrund ein *digitales Geraden-segment* ist



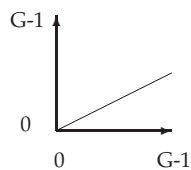
↓
digitales Geradensegment

- Grauwertbild:
Grauwert muß *lokal monoton* sein (d.h. 1D-Schnitte in allen Richtungen)



Satz (Kommutativität von ROO):

- Sei G monotone Grauskalentransformation:



$$\text{MAX} \circ G = G \circ \text{MAX}$$

$$\text{MAX} \circ \text{MIN} \circ G = G \circ \text{MAX} \circ \text{MIN}$$

- keine Kommutativität der ROO
- keine Kommutativität der ROO mit linearen lokalen Operatoren, z.B. $\text{MED} \circ L \neq L \circ \text{MED}$



Bemerkung (Separabilität von ROO):

2D-ROO haben eine Komplexität in $\mathcal{O}(K \cdot L)$.

Separabilität i.a. nicht möglich: $\text{MED}_1 * \text{MED}_1 \neq \text{MED}_2$

aber: Anwendung von zwei 1D-Medianoperatoren (zeilenweise, spaltenweise) approximiert die Wirkung eines 2D-Medianoperators mit Komplexität in $\mathcal{O}(K + L)$.

iterierte Anwendung: Die Wurzeln von 2D- und approximierend separierten 1D-Operatoren sind identisch.

Bemerkung (Signaltheoretische Beschreibung von ROO):

- nicht darstellbar in Matrixdarstellung (da nichtlinear)
- keine Impulsantwort (da auch nicht verschiebungsinvariant)
- keine Frequenzübertragungsfunktion
- Aussagen zu spezifischen Bildern sind möglich:

$$H_{\text{Median}} = \frac{\mathcal{F}\{g = \text{MED}(f)\}}{\mathcal{F}\{f\}} = \frac{G}{F}$$

- Die Wirkung des ROO hängt vom Signal ab.

(Literatur)

- R. Klette, P. Zamperoni: Handbuch der Operatoren für die Bildverarbeitung, 2. Aufl., Vieweg, '95

Bemerkung (Algorithmische Probleme der ROO):

- Gegeben: N Elemente, $1 \leq k \leq N$.
- Vollständige Sortierung: $f_i \rightarrow f_{(i)}$ und indizierter Zugriff auf k -tes Element
aber: vollständige Sortierung ist nur erforderlich, wenn alle möglichen Rangordnungsfiler realisiert werden sollen (trifft nicht zu).
- Selektion des Wertes $f_{(k)}$:
 - allgemeine Selektionsaufgabe
 - MIN, MAX \rightarrow spezielle Selektion

Bemerkung (Sortieralgorithmen und ihre Komplexität):

Sei N die Anzahl der zu sortierenden Elemente.

- $\mathcal{O}(N^2)$: Bubblesort, Insertsort, Selectionsort; sinnvoll für $N \leq 25$
asymptotisch schnellerem Verfahren vorzuziehen für $N < 15$.
- $\mathcal{O}(N^{\frac{3}{2}})$: Shellsort; Vermutung : $\mathcal{O}(N(\log N)^2)$
- $\mathcal{O}(N \log N)$: Mergesort, Heapsort, Quicksort
(Teile und Herrsche Prinzip)

Einfacher Selektionsalgorithmus für ROO

- Gegeben: $\{a_1, \dots, a_N\}$
- Gesucht: $a_{(K)}$
- Aufwand: $\mathcal{O}(N^2)$, aber im Mittel $\mathcal{O}(N)$

Anwendbarkeit: $N \leq 1000$ gut anwendbar

Methoden: nicht rekursiv, rekursiv

hier : nicht rekursiv

- Algorithmus:

1. Schritt:

Setze linke Begrenzung Suchraum $L = 1$

Setze rechte Begrenzung Suchraum $R = N$

Setze $I_{\text{start}} = L, J_{\text{start}} = R - 1$

2. Schritt:

Wähle Vergleichselement $V = a_R$

Inkrementiere I bis $a_I \geq V$

Dekrementiere J bis $a_J \leq V$

3. Schritt:

Vertausche a_I und a_J

Falls $J \leq I \rightarrow$ Schritt 4,

sonst: goto Schritt 2

4. Schritt: $J \leq I$

Umordnung a_J, a_I, a_R in die Positionen R, J, I :

$a_I \rightarrow a_J, a_R \rightarrow a_I, a_J \rightarrow a_R$

5. Schritt:

Test $K \leq I$:

True: $R = I - 1$ // Weiterarbeit linker Bereich

False: $L = I + 1$ // Weiterarbeit rechter Bereich

Test $R \leq L$:

True: I ist gesuchte Position K, V ist gesuchtes Element a_K

False: goto Schritt 2

- Prozedur:

```

procedure select(N,K,ARRAY);
begin
  L:=1; R:=N;                                     // 1. Schritt

  while R>L do begin
    V:=ARRAY(R);                                  // 2. Schritt
    I:=L; J:=R-1;
    while J > I do begin
      while ARRAY(I)<V do I:=I+1;
      while ARRAY(J)>V do J:=J-1;
      T:=ARRAY(I);                                // 3. Schritt
      ARRAY(I):=ARRAY(J);
      ARRAY(J):=T;
    end;

    ARRAY(J):=ARRAY(I);                           // 4. Schritt
  end;
end;

```

```

ARRAY(I) := ARRAY(R);
ARRAY(R) := T;

if (I >= K) then R := I - 1           // 5. Schritt
               else L := I + 1;

end;
end;
    
```

Beispiel: Schreibtischtest

Aufgabe: Finde $a_{(4)}$, also $K = 4$ für folgende a_i :

Es gelte: $\underline{x} = a_I, \bar{x} = a_J, \hat{x} = a_R = V$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_i	8	7	4	7	7	9	4	1	5	3	$\hat{6}$
(*)	$\underline{3}$										$\bar{8}$
		$\underline{5}$								$\bar{7}$	
				$\underline{1}$				$\bar{7}$			
					$\underline{4}$		$\bar{7}$				
					$\bar{9}$	$\underline{4}$					
	3	5	4	1	$\bar{4}$	$\underline{6}$	7	7	7	8	$\hat{9}$
(**)	3	5	4	1	$\hat{4}$	6	7	7	7	8	9
		$\underline{1}$		$\bar{5}$							
		\vdots									
	3	1	5	4	4	6	7	7	7	8	9

mit:

(*) : $L = 1, R = 11, V = 6, I = 1, J = 10$

(**) : $J < I : I = 6 \rightarrow I > K, R = 5, V = 4, I = L = 1, J = 4$

Also: $a_{(4)} = 4$.



(Algorithmus MEDIAN)

- Hintergrund:
Asymptotische Komplexität pro Bildpunkt ist $\mathcal{O}(K \cdot L)$. Aber es wird nicht nur der Medianwert für einen Bildpunkt benötigt, sondern für alle. Benachbarte Bildpunkte haben überlappende Medianfenster. Folglich kann Information aus der Berechnung des Medianwertes am vorherigen Bildpunkt genutzt werden.

- s. dazu: IEEE Trans., ASSP-27(1979)13-18
- gleitendes Operatorfenster der Größe $K \times L \rightarrow KL - 2L$ Grauwerte konstant beim Weiterrücken
Speichern der KL Grauwerte in Histogramm und Aktualisieren bei Weiterrücken
Gegeben: Bild der Größe $M \times N$ mit 8 Bit
Operator im $K \times L$ Fenster mit K, L ungerade
- Variablen:
MDN: Medianwert
LTMDN: Zähler
LCOLUM[0:L-1], RCOLUM[0:L-1]: Puffer
HIST[0:255]: Histogramm (zeilenweise)
- Konstante:
THRES = $\frac{KL+1}{2}$ Index Medianwert
- Algorithmus:
 1. Schritt:
Initialisiere Histogramm
Finden des Medians (klassisch)
Berechnung Zähler LTMDN für Anz. Grauwerte < Median
 2. Schritt:
Translation des Fensters
Aktualisierung von Histogramm und Puffer
LTMDN: speichert die Zahl der Punkte im aktuellen Fenster, deren Grauwerte kleiner als Median des *vorigen* Fensters sind
 3. Schritt:
Startend vom MDN des vorigen Fensters *verschiebe* Position in Histogramm nach oben/unten,
je nachdem LTMDN nicht größer oder kleiner als THRES ist;
und aktualisiere LTMDN bis neuer Median gefunden ist
Wenn $LTMDN \leq THRES \rightarrow$ MDN ist derselbe \rightarrow nicht verschieben
 4. Schritt:
Stop, wenn Zeilenende; sonst: goto 2. Schritt
- Prozedur:

```

procedure median;
begin
  choose parameters M,N,K,L;
  THRES:=(K*L+1)/2;
  for J= $\lfloor L/2 \rfloor$  to N- $\lfloor L/2 \rfloor$ -1 do begin // LA  $\lfloor$ =int(A)
    // set up array HIST for the first window
    // find MDN by moving through histogram
    // update count LTMDN
    for I= $\lfloor K/2 \rfloor$  to M- $\lfloor K/2 \rfloor$ -1 do begin
      // put leftmost column of previous window in array LCOLUM
      // put rightmost column of current window in array RCOLUM
      runmed;
    end; // of line
  end; // of picture
end; // of procedure

procedure runmed;
begin
  for LL=0 until L-1 do begin // LL index in column
    // moving to the next window
    GL:=LCOLUM[LL];
    HIST[GL]:=HIST[GL]-1;
    if GL < MDN then
      LTMDN:=LTMDN-1; // check for counter
    GL:=RCOLUM[LL];
    HIST[GL]:=HIST[GL]+1;
    if GL < MDN then LTMDN:=LTMDN+1;
  end;
  // now find median
  if LTMDN > THRES then
    // median (current window) < median(previous window)
    repeat until LTMDN  $\leq$  THRES begin
      MDN:=MDN-1;
      LTMDN := LTMDN-HIST[MDN];
    end;
  else
    while LTMDN+HIST[MDN]  $\leq$  THRES begin
      // the desired median is still greater than MDN
      LTMDN:=LTMDN+HIST[MDN];
      MDN:=MDN+1;
    end; // MDN is the desired median
  end; // of procedure

```

- Komplexität: für $K \times K$ -Fenster

$$I = K^2$$

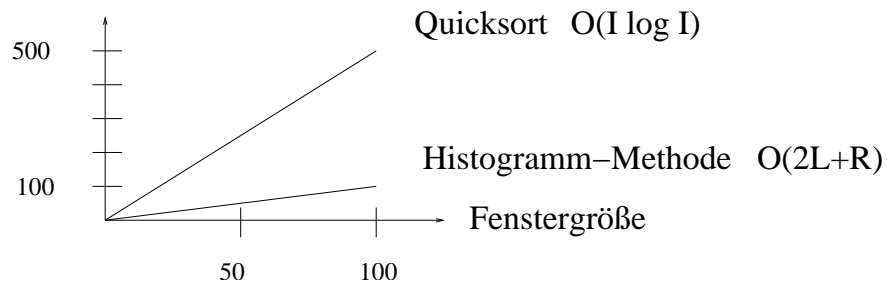
K	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
I	9	25	49	81	121	169	225	289	361	441
$Zeit$	1.00	1.25	1.50	1.77	2.02	2.29	2.54	2.80	3.05	3.32

$$t_K = \text{const} \cdot (1 + 0.26(K - 3))$$

$$t_I = \text{const} \cdot (0.22 + 0.26\sqrt{I})$$

- Vergleich:

mittlere Zahl der Vergleiche



weitere Verbesserung: mäanderförmige Bildabtastung

Index

- Äquivalenzklasse, 126
- a posteriori Wahrscheinlichkeit, 29
- a priori Wahrscheinlichkeit, 28
- a priori Wahrscheinlichkeit, 13
- adaptiver Filter, 82
- AKF, *siehe* Autokorrelationsfunktion
- Algorithmus
 - Randmaschensuche, 172
- Anordnung
 - zyklische, 131
- antikorreliert, 26
- AR, *siehe* auto regressive
- AR-Filter, *siehe* autoregressiver Filter
- ARMA, *siehe* auto regressive moving average
- außen, 117
- Ausgleichsrechnung, 55
- auto regressive, 101
- auto regressive moving average, 101
- Autokorrelationsfunktion, 42
- Autokovarianzmatrix, 45
- autoregressiver Filter, 82

- Bayes
 - Formel von, 14
- Bayes-Schatzer, 30
- bedingte Dichte, 25
- bedingte Wahrscheinlichkeit, 13
- Bedingung, 13
- beobachtbare Zufallsvariable, *siehe* BeobachtungsvARIABLE
- Beobachtungsgleichung, 112
- Beobachtungsvariable, 28
- Beobachtungsvariablen, 111
- Berandungsrelation, 185
- BIBO-Stabilitätskriterium, 99
- Bildgebiet, 161
- Bildverarbeitungsstrukturen, 151
- Bildvergleich, 71
- Binärbild, 116
- Borel-Mengen, 15

- bounded input bounded output, *siehe* BIBO-Stabilitätskriterium

- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 26
- Charakteristik
 - eulersche, 139
- Clique, 84
- Closing, 229
- Closingoperator, 218
- CM, *siehe* Cooccurrence-Matrix
- Cooccurrence-Matrix, 64
- COV, *siehe* Kovarianz

- dünn, 117
- Dichte
 - bedingt, 25
 - marginal, 25
- Dichtefunktion, 16
- Differenzgleichung, 99
- Dilatation, 217, 221
- Dimension, 186
- disjunkt, *siehe* unvereinbar
- Distanztransformation, 236
- Dualitätsproblem, 227
- dynamisches System, 109

- E, *siehe* Erwartungswert
- Einzelwahrscheinlichkeiten, 17
- Elementarereignis, 9
- Ensemblemittelwert, 50
- Ereignis, 7
 - Elementar-, 9
 - sicheres, 7
- Ereignisfeld, 11, 40
- Ergebnis, *siehe* Elementarereignis
- Ergodenhypothese, 51
- ergodischer Prozes, 50
- Erosion, 217, 221
 - rekursive, 236
- erwartungstreu, 35
- Erwartungswert, 18
- Euler-Charakteristik, 157

- Eulersche Charakteristik, 139
- Eulersche Gleichung, 194
- Eulersche Zahl, 167
 - für Objekte, 199
- Eulerscher Satz, 139, 154
 - allgemein, 139
- Exponentialverteilung, 22

- Fermature, 218
- Filter
 - adaptiv, 82
 - Kalman-, 82, 97
 - optimal, 55
- finite impulse response, *siehe* FIR
- FIR, 97
- Fixpunkt, 245
- Fixpunktsatz, 245
- Fläche, 186
- Flächeninhalt, 163
- Flächenzahl, 192
- Formel
 - dritte Picksche, 166
 - erste Picksche, 162
 - vierte Picksche, 205
 - zweite Picksche, 165
- Formel von Bayes, 14
- Formfaktor, 209
- Freeman-Code, 180

- Gaußverteilung, *siehe* Normalverteilung
- Gaussches Fehlerminimierungsverfahren, 31
- Gebiet, 124
- Geschlecht
 - von Flächen, 150
- geschlossen
 - topologisch, 117
- Gesetz der großen Zahlen, 12
- Gibbs-Ereignisfeld, 84
- Gibbs-Verteilung, 85
- Gibbsverteilung, 81
- Gitter, 169
- Gitterpunkte, 185
- Gitterpunktraum, 185
- Gleichung
 - Eulersche, 194
- Gleichverteilung, 22
- Graph
 - planar, 141
- Graphentheorie, 121
- Graphsuche, 125

- Grauwertprozess, 53
- Grenzwertsatz
 - zentraler, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 23
- Grundgleichungen
 - modifizierte, 151
 - topologische, 146

- Höhle, 161
- Hammersley–Clifford–Theorem, 85
- Häufigkeit
 - relative, 12
- homogen stationär, 51
- homogene Markovkette, 77
- Hyperfläche, 116

- Identitätsoperator, 216
- IIR, 99
- Impulsantwort, 97
- Indizienstruktur, 190
- infinite impulse response, *siehe* IIR
- innen, 117
- Invariante, 205
 - geometrische, 205
 - topologische, 205
- Inzidenzrelation, 190

- Jordanschen Kurvensatz, 119

- Kalmanfilter, 82, 97
- Kante, 186
 - gerichtete, 122
 - ungerichtete, 122
- Kantenzahl, 192
- Karhunen–Loeve–Transformation, 27
- Kern, 116, 129
- Kernbildungsoperator, 216
- Kernkomponente, 130
- Kernmasche, 142
- Kernpunkt, 129
- Ketten-Code, 180
- Kettenregel, 228
- KLT, *siehe* Karhunen–Loeve–Transformation
- Knotensatz, 123, 157, 198
 - für Objekte, 199
- Knotenzahl, 192
- Kommutativität, 246
- Komplementärkomponente, 125
- Komplementoperator, 216
- Komponente, 125
- konsistent, 36

- Kontur, 170
- Korrelationskoeffizient, 26
- Korrelationsmatrix, 26
- Kovarianz, 26
- Kovarianzmatrix, 26
- Krümmung
 - totale, 154, 158
- Kreuzkorrelationsfunktion, 42
- Kurvensatz-Problem, 119

- Leistungsspektrum, 45
- Likelihood-Funktion, 36
- linear korreliert, 26
- linearer Mittelwert, 19
- Linienprozes, 53
- Loch, 161
- lokal stationärer Prozes, 50

- MA, *siehe* moving average
- MAP, 30
- MAP-Strategie, 29
- marginale Dichte, 25
- Markierungsbild, 116
- Markierungsspeicher, 116
- Markov random field, *siehe* Markov-Ereignisfeld
- Markov-Ereignisfeld, 83
- Markovkette, 77
- Markovprozes
 - Zustand, 77
 - Zustandsraum, 77
- Markovprozesse, 73
- Maschanlänge
 - mittlere, 138
- Masche, 136
- Maschenlänge, 136, 191
- Maschensatz, 138, 157, 198
 - für Objekte, 199
- Maskenanpassungsfilter, *siehe* template matching
 - filter
- Maximum, 244
- maximum a posteriori probability, *siehe* MAP
- Maximum-Likelihood-Schätzer, 31
- Median, 244
- mehrdimensionale Zufallsvariable, 24
- Mengen-Nachbarschaftsstruktur, 126
- Mesmatrix, 112
- Mesrauschen, 112
- Mikowski-Subtraktion, 221
- Mikroskopbildanalyse, 14
- Minimum, 244
- minimum mean square error estimation, *siehe*
 - MMSE-Schätzer
- Minkowski-Addition, 221
- Mittelwert
 - linear, 19
 - parametrisch, 50
- ML-Schätzer, *siehe* Maximum-Likelihood-Schätzer
- MMSE, 57
- MMSE-Schätzer, 31
- Moment k -ter Ordnung, 19
- Momente, 19
- moving average, 101
- MRF, *siehe* Markov-Ereignisfeld

- n -dimensionale Zufallsvariable, 24
- Nachbarschaft, 122, 216
- Nachbarschaftsgrad, 122, 191
 - durchschnittlicher, 124
- Nachbarschaftsgraph, 122
- Nachbarschaftsoperator, 217
- Nachbarschaftsrelation, 115, 121
- Nachbarschaftsstruktur, 121
 - orientierte, 131
 - orientierter, 132
- Nachbarschaftsstrukturen
 - orientierte, 119
- Nachbarschaftssystem, 83
- Nachbarschaftszyklus, 131
- Nachfolger, 134
- Netz, 146
 - toroidales, 149
- Normalgebiet, 159
- Normalverteilung, 22, 27

- Oberfläche, 170
- Objekt, 196
- Objektelement, 196
- Objektmaß, 208
- Objektmenge, 116
- Observable, *siehe* Beobachtungsvariable
- Opening, 229
- Openingoperator, 218
- Operator
 - elementarer morphologischer, 216
 - Hit-and-Miss, 231
- optimale Filter, 55
- Optimale Schätzer, 28
- Optimalkriterien, 28
- Ordnungsstatistikfilter, 243
- Orientierung, 131

- Orthogonalität von Zufallsvariablen, 27
 Overture, 218
- parametrischer Mittelwert, 50
 passend, 36
- Pick
 Satz von, 163
- Picksche Formel
 dritte, 166
 erste, 162
 vierte, 205
 zweite, 165
- Pixel, 186
 planar, 141
 Planare Struktur, 140
 Planarer Graph, 141
 Potenzmenge, 11
 Prädiktion, 77
 Punkt, 186
 isolierter, 122
 Punktmenge, 121
 Punktnachbar, 130
 Punktschätzung, 35
- Rand, 116, 129
 Randbildungsoperator, 217
 Randedichten, 25
 Randedicke-Problem, 120
 Randkomponente, 130
 Randmasche, 142
 äußere, 155
 innere, 155
 Randmaschensatz, 144
 Randmaschensuche, 172
 random field, *siehe* Ereignisfeld
 Random Walk, 85
 Randpunkt, 129
 Randzahl, 197
 Rangordnungsoperator, 242
 Raum
 topologischer, 115
 Region, 116
 regional stationärer Prozess, 53
 rekursives System, 97
 Relation, 10
 relative Häufigkeit, 12
 Richtungs-Code, 180
 Ringgebiet, 158
 ruckgekoppeltes System, 99, 106
- Satz
 Eulerscher, 139, 154
 Eulerscher, allgemein, 139
 von Pick, 163
- Schatzer
 Bayes-, 30
 Maximum-Likelihood, 31
 MMSE-, 31
- Schiefe, 20
 Schnittpunkt-Problem, 120
 schwach stationärer stochastischer Prozess, 44
 Segmentierung, 65
 Segmentierungsprädikat, 169
 Selektionsalgorithmus, 247
 Separabilität, 246
 Separationstheorem, 119
 sicheres Ereignis, 7
 Skalenhierarchie, 64
 Stabilitätskriterium BIBO, 99
 Standardabweichung, 19
 stationärer stochastischer Prozess, 43
 Statistik n -ter Ordnung, 24
 statistische Unabhängigkeit, 14
 Stichprobenraum, 7
 Stochastik, 3
 stochastische Prozesse
 orthogonal, 42
 stochastische Prozesse
 statistisch unabhängig, 42
 unkorreliert, 42
 stochastische Variable, 15, *siehe* Zufallsvariable
 stochastischer Prozess
 Autokorrelationsfunktion, 42
 Autokovarianzmatrix, 45
 regional stationär, 53
 schwach stationär, 44
 stochastischer Prozess, 38
 Ensemblemittelwert, 50
 ergodisch, 50
 homogen stationär, 51
 Kreuzkorrelationsfunktion, 42
 Leistungsspektrum, 45
 lokal stationär, 50
 Markov, 73
 Realisierung, 39
 stationär, 43
 Verteilungsfunktion, 40
- Strecke, 186
 Streuung, *siehe* Standardabweichung

- Struktur, 138
 - homogene, 146
 - planare, 140
- Strukturformel, 192
- Strukturkonstante, 190
- Struktursatz, 191
- System
 - deterministisch, dynamisch, 106
 - dynamisch, 109
 - ruckgekoppelt, 99, 106
 - stochastisch, dynamisch, 112
- System unvereinbarer Ereignisse, 8
- Systemrauschen, 112

- Teilstruktur, 141, 144
- template matching filter, 49
- Template-Matching, 234
- Texturanalyse, 64, 101
- Texturklassifikation, 51, 65
- Textursegmentierung, 72
- Topologie
 - kombinatorische, 115
 - mengentheoretische, 115, 121
- Torusnetz, 149
 - unendliches, 149
- totale Wahrscheinlichkeit, 13
- Translation, 223
- Trennungssatz, 119, 145
- Tunnel, 203

- Übergangswahrscheinlichkeit, 77
- Unabhängigkeit, 25
 - statistische, 14
- unbased, 35
- unkorreliert, 26
- Untergrundmenge, 116
- unvereinbar, 8

- v-Würfel, 206
- VAR, *siehe* Varianz
- Variable
 - stochastische, 15
 - verdeckte, 28
- Varianz, 19
- verbunden, 124
- Verbundenheitsrelation, 125
- Verbundwahrscheinlichkeit, 12
- Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung, 25
- verdeckte Variable, 28
- Verteilungsfunktion, 15, 17
 - stochastischer Prozes, 40
- Verzögerungsglied, 109
- Viereckgitter, 164
- Vierecknetz, 150
- Vierfarbenproblem, 117
- Vordergrund-Hintergrund-Problem, 118
- Vorgänger, 134
- Voxel, 186

- Wölbung, Exzeß, 20
- Würfel, 186
- Würfelsatz, 199
 - für Objekte, 199
- Würfelzahl, 192
- Wahrscheinlichkeit, 12
 - a posteriori, 29
 - a priori, 13, 28
 - bedingt, 13
 - total, 13
 - Verbund-, 12
- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, *siehe* Dichtefunktion
- Wahrscheinlichkeitsraum, 12
- Wahrscheinlichkeitsverteilung, *siehe* Verteilungsfunktion
- Weg, 124
 - erzeugter, orientierter, 134
- Wienerfilter, 47
- Wurzel, 245

- Zahl
 - Eulersche, 167
- Zelle, 186
- Zellendimension, 186
- Zellenkomplex, 185
- Zellenkomplexe, 119, 121, 185
- Zentraler Grenzwertsatz, 23
- zentraler Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 23
- Zerlegungssatz, 161
- Zufallsexperiment, 6
- Zufallsgröße, *siehe* Zufallsvariable
- Zufallsprozes, *siehe* stochastischer Prozes
- Zufallsvariable
 - mehrdimensionale, 24
 - n-dimensional, 24
 - orthogonal, 27
- Zufallsvariable=stochastische Variable, 15
- Zufallsvektor, 40
- zusammenhängend, 125

Zusammenhang-Problem, 119
Zustand, 77
Zustandsgleichung, 112
 deterministisches System, 106
 stochastisches System, 112
Zustandsraum, 77
Zustansubergangsmatrix, 112
Zustandsvektor, 114