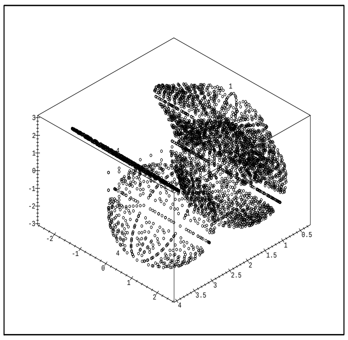
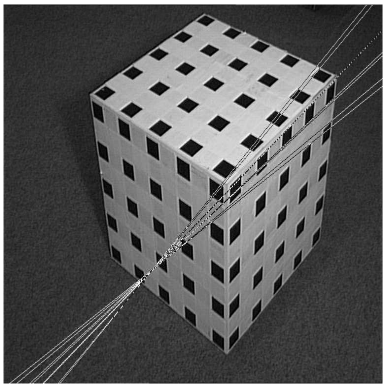
Diplomarbeit

# Modellierung dreidimensionaler Augenbewegungen und Berechnung der internen Kameraparameter mittels Geometrischer Algebra





am Lehrstuhl für Kognitive Systeme
Institut für Informatik und Praktische Mathematik
Christian–Albrechts–Universität zu Kiel
Prof. Dr. G. Sommer

ausgearbeitet von:

Bodo Rosenhahn

Betreuer: Dr. Ing. Eduardo Bayro-Corrochano

März 1999

*für meine Eltern*

# Inhaltsverzeichnis

# Notationen

| | | |
|---|---|---|
| $a, b, c, \alpha, \lambda$ | : | Skalare |
| $\mathbb{R}$ | : | Reelle Zahlen |
| $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$... | : | Vektoren |
| $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$... | : | Multivektoren |
| $K, P, C$ ... | : | Matrizen |
| $I$ | : | Einheitsmatrix |
| $\Re$ | : | Rotationsmatrix |
| $\boldsymbol{I}$ | : | Pseudoskalar oder Hypervolumen |
| $\vec{\boldsymbol{q}}$ | : | Vektoranteil einer Quaternion |
| $\vec{\boldsymbol{I}}$ | : | 3er Vektor mit Imaginärkonstanten der Quaternionenalgebra: $(i, j, k)^T$ |
| $\cdot$ | : | Inneres Produkt |
| $\wedge$ | : | Äußeres Produkt |
| $\langle \boldsymbol{M} \rangle_k$ | : | *k-Vektor* eines Multivektors |
| $\circ$ | : | Operator zur Hintereinanderausführung von *Rotationsvektoren* |
| $*$ | : | Dual einer Matrix |
| $\Omega_\infty$ | : | *Absoluter Kegelschnitt* |
| $\Vert . \Vert_2$ | : | 2-Norm eines Vektors |
| $\times$ | : | Kreuzprodukt dreidimensionaler Vektoren |
| $(\boldsymbol{x})_i$ | : | $i$-te Komponente des Vektors $\boldsymbol{x}$ |
| $[.]$ | : | *Bracket* eines Multivektors |
| $\vee$ | : | Schnitt von Multivektoren (*Meet*) |
| $\otimes$ | : | Kommutatorprodukt von Multivektoren |

# 1 Einleitung

Thema der Diplomarbeit ist die Modellierung dreidimensionaler Augenbewegungen und die Berechnung der internen Kameraparameter mittels Geometrischer Algebra. Das Hauptresultat dieser Diplomarbeit ist ein neuer Zugang zur internen Kameraselbstkalibrierung.
Die Projektion eines Punktes aus einem Weltkoordinatensystem auf die Bildebene einer Kamera wird über eine *Projektionsmatrix* beschrieben. Diese Projektionsmatrix teilt sich in ein Produkt zweier Matrizen, welche die *internen* und *externen* Kameraparameter beinhalten. Die externen Kameraparameter beschreiben die Rotation und Translation der Kameras, die internen Kameraparameter Transformationen im Kamerabild. Als *Kamerakalibrierung* bezeichnet man die Ermittlung der Koeffizienten der internen und externen Kameraparameter. In dieser Arbeit wird eine Untersuchung der internen und externen Kalibrierung im Rahmen der Geometrischen Algebra vorgenommen. Dabei wird bei der Untersuchung der externen Kameraparameter auf eine Gesetzmäßigkeit zurückgegriffen, die zuerst in biologischen Experimenten festgestellt wurde, und unter geeigneten Voraussetzungen zur Kalibrierung der externen Kameraparameter verwendet werden kann. In biologischen Versuchen wurde festgestellt, daß bei Augenrotationen das Gesetz von *Listing* ([32, 17, 35]) gilt. Dies besagt, daß die Menge der Rotationsvektoren, um von einer festen Blickrichtung zu einer beliebigen anderen zu gelangen, in der Nähe einer Ebene liegt, welche eine Krümmung aufweist. Ziel ist es, zunächst diese Gesetzmäßigkeit mit einem mathematischen Modell des menschlichen Auges zu vergleichen. Es handelt sich um ein geometrisches Problem. Da in der Geometrischen Algebra geometrische Manipulationen wie Rotationen und Translationen von Entitäten wie Punkten, Geraden und Ebenen ökonomisch und übersichtlich beschrieben werden können, bietet sich diese zur Analyse an. Zunächst wird *Listings Ebene* und die Menge von Rotationsvektoren im Rahmen der Geometrischen Algebra untersucht und ein mathematisches Modell des Auges sowie der Augenrotation mit dem biologischen Modell verglichen.
Die Eigenschaft des menschlichen visuellen Systems, mit zwei Augen ein dreidimensionales Modell der Umgebung zu rekonstruieren, motiviert den Hauptteil der Diplomarbeit. Ziel ist dabei die Herleitung eines Verfahrens zur internen Kamerakalibrierung aus zwei Kamerabildern.
Ein gängiges Verfahren zur internen Kalibrierung in der digitalen Bildverarbeitung verwendet Bildpunktkorrespondenzen und das Bild des *absoluten Kegelschnitts* ([11, 26, 23]). Dieser ist bezüglich der externen Kameraparameter invariant. Zur Kalibrierung werden dabei *Kruppagleichungen* aufgestellt, deren Lösung die internen Kameraparameter liefert. Ziel ist zunächst die Formulierung des Verfahrens im Rahmen der Geometrischen Algebra. Es wird eine geometrische Herleitung der Kruppagleichungen geliefert, dargestellt in Form von *Brackets* ([19, 20, 4]). Damit ist das Selektieren von degenerierten

Fällen leicht möglich, da die geometrische Anschauung erhalten bleibt: Die Kruppagleichungen können geometrisch interpretiert werden. Das *Theorem von Pascal* wird zur Entwicklung eines eigenständigen neuen Verfahrens zur Berechnung der internen Kameraparameter verwendet.

Dieses Verfahren bietet die Möglichkeit, schon zwischen zwei Bildern eine interne Kamerakalibrierung vorzunehmen, wenn externe Kameraparameter gegeben sind. Es erfordert jedoch zusätzliche Voraussetzungen für die Anordnung der Kameras. Während die Rotation der Kameras zueinander das Verfahren nicht beeinflußt, lediglich eine Rotation um mindestens eine Achse gegeben sein muß, ist eine Verschiebung der Kameras entlang aller Achsen nötig. Bei der klassischen Anordnung eines Stereokamerakopfes wird diese Eigenschaft nicht erfüllt. In der Diplomarbeit werden Tests in Simulationsumgebungen und mit echten Bildern durchgeführt.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Im zweiten Kapitel erfolgt eine Einführung in das Konzept der Geometrischen Algebra. Dabei wird auf die Geometrische Algebra für den dreidimensionalen euklidischen und den vierdimensionalen Raum eingegangen. Der Zusammenhang von Quaternionen zur Beschreibung von Rotationen und Multivektoren wird erläutert. Die Algebra der Motoren wird vorgestellt, mit der nichtlineare Transformationen wie Translationen im dreidimensionalen Raum linearisiert werden können. Das herkömmliche Konzept der projektiven Geometrie wird eingeführt, sowie die entsprechende Darstellung in einer geeigneten Geometrischen Algebra. Im dritten Kapitel erfolgt eine Einführung in das dreidimensionale Modell des Auges. Die Anatomie des Auges wird erläutert, es folgt die Abstraktion und Modellierung. Dann wird das Gesetz von Listing untersucht, wobei einerseits auf Bewegungen der Ebenen und andererseits auf Deformationen der Ebenen eingegangen wird. Am Ende des dritten Kapitels werden Experimente in einer Simulationsumgebung vorgestellt und diskutiert, die den Zusammenhang zwischen dem Gesetz von Listing und der externen Kalibrierung bei einem Binokularkopf verdeutlichen. Das vierte Kapitel ist der internen Kamerakalibrierung gewidmet. Zunächst wird das herkömmliche Verfahren zur Selbstkalibrierung beschrieben. Es folgt die Formulierung im Rahmen der Geometrischen Algebra mit der Darstellung der Kruppagleichungen in Form von *Brackets*. Als nächstes wird die interne Kalibrierung über das *Theorem von Pascal* beschrieben. Dabei wird sowohl auf gleichbleibende interne Kameraparameter zwischen mehreren Bildern als auch auf sich ändernde interne Kameraparameter zwischen den Bildern eingegangen. Im fünften Kapitel werden Experimnente zur internen Kalibrierung vorgestellt und diskutiert. Gearbeitet wird sowohl mit Simulationsumgebungen als auch mit echten Bildern.

Die Arbeit enthält mehrere Beiträge. Die Formulierung der Kruppagleichungen in Form von *Brackets* ist mit der gesamten Herleitung meines Wissens nach neu und nicht trivial. Eine Untersuchung des Theorems von Pascal zur internen Kalibrierung wurde meines Wissens nach ebenfalls noch nicht durchgeführt. Dies mag vor allem daran liegen, daß im Matrizenkalkül Anschauungen verloren gehen, die im Konzept der Geometrischen

Algebra genutzt werden können. Durch die Untersuchung des Theorems von Pascal ist es damit zum ersten Mal möglich, schon zwischen zwei Kamerabildern bei gegebenen externen Kameraparametern die internen Kameraparameter zu ermitteln. Das herkömmliche Verfahren über die Kruppagleichungen ([11, 26, 23]) erfordert nicht das Wissen um die externen Kameraparameter, aber Bildpunktkorrespondenzen zwischen drei bis vier Kamerabildern. Weiter ist eine Ermittlung der externen Kameraparameter nur aus Bildpunktkorrespondenzen ohne Kenntnis der interen Kameraparameter ([2, 1]) aus zwei Bildern durchaus möglich. Damit können über die Verwendung des Theorems von Pascal zur Selbstkalibrierung alle Parameter der Projektionsmatrix aus Bildpunktkorrespondenzen zwischen zwei Bildern bestimmt werden.
In den Experimenten erfolgt auch eine Untersuchung, bei welchen Rotationen und Translationen eine vollständige Kalibrierung und bei welchen Transformationen nur eine Teilkalibrierung möglich ist. Dies wird sowohl in Simulationsumgebungen als auch in Bildfolgen mit echten Bildern gezeigt. Auf numerische Probleme bei der Implementierung sowie auf mathematische Probleme, die beim Rechnen mit Kruppagleichungen und den Gleichungen des Verfahrens über das Theorem von Pascal auftreten, wird ebenfalls eingegangen. In Zukunft ist eine genauere numerische Untersuchung der Gleichungen sowie die Entwicklung praktikabler Algorithmen zum Lösen der Gleichungen wichtig, besonders im Hinblick auf die Entwicklung von echtzeitfähigen Systemen.

# 2 Einführung in die Geometrische Algebra

In diesem Abschnitt erfolgt eine Einführung in das Grundkonzept der Geometrischen Algebra. Im Rahmen der Geometrischen Algebra ist es möglich, Entitäten wie Punkte, Geraden und Ebenen zu repräsentieren und ihre Transformationen wie Rotation und Translation (Verschiebung) zu beschreiben, sowie Teile der geometrischen Interpretation zu erhalten.
Ziel ist es, eine mathematische Grundlage zu schaffen, um einerseits einen Einblick in die Arbeitsweise der herkömmlichen mathematischen Methoden zu schaffen und andererseits die Grundkonzepte der Geometrischen Algebra mit ihren Vorteilen zu erläutern. Im ersten Abschnitt erfolgt eine Einführung zur Beschreibung von Rotationen über Matrizen einerseits und Quaternionen andererseits. Im zweiten Abschnitt des Kapitels wird auf die Geometrische Algebra des $n$-dimensionalen Raumes eingegangen. Es werden dabei Begriffe wie das *geometrische Produkt* oder *Multivektoren* eingeführt. In Abschnitt drei wird die Geometrische Algebra für den Spezialfall $n = 3$ untersucht. Abschnitt vier liefert eine Einführung in vierdimensionale Geometrische Algebren. Abschnitt fünf gibt eine Einführung in die Algebra der Motoren. In dieser vierdimensionalen Algebra ist es möglich, sowohl die Rotation als auch die Translation von Entitäten wie Punkte, Geraden oder Ebenen als lineare Abbildung zu beschreiben. Der sechste Abschnitt führt in die projektive Geometrie und ihre Modellierung im Matrizenkalkül einerseits, sowie die Modellierung der projektiven Geometrie im Rahmen der Geometrischen Algebra andererseits ein.

## 2.1 Beschreibung von Rotationen über Matrizen und Quaternionen

Um eine dreidimensionale Position zu beschreiben, gibt es zwei verschiedene Arten von Koordinatensystemen: Das erste ist die Beschreibung relativ zu Weltkoordinaten, das zweite die Beschreibung relativ zu Objektkoordinaten. Während sich ein Weltkoordinatensystem im Raum nicht verändert, ist ein Objektkoordinatensystem fest an ein Objekt im Raum gebunden und verändert sich mit Rotationen des Objektes im Raum. Sei $H = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}\}$ die Basis für ein Weltkoordinatensystem und $E = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ die Basis für ein Objektkoordinatensystem. Weiter stimme $E = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ anfangs mit $H = \{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}\}$ überein. Abbildung 1 verdeutlicht die Ausgangssituation. Bei einer Rotation des Objektes dreht sich das daran gebundene Objektkoordinatensystem mit, das Weltkoordinatensystem bleibt fest. Häufig ist es üblich, eine Rotation über Matrizenmultiplikationen zu beschreiben. Ein Vektor $\boldsymbol{x}$ kann entweder im Weltkoordinatensystem als $\boldsymbol{x_e} = (x_{e1}, x_{e2}, x_{e3})^T$ oder im rotierten Objektkoordinatensystem als $\boldsymbol{x_h} = (x_{h1}, x_{h2}, x_{h3})^T$ ausgedrückt werden. Der Bezug eines Vektors $\boldsymbol{x_e}$ im Objektkoordinatensystem zu einem

Vektor $\boldsymbol{x_h}$ im Weltkoordinatensystem wird über eine Rotationsmatrix $\Re$ beschrieben:

$$\boldsymbol{x_e} = \Re \boldsymbol{x_h}. \tag{2.1}$$

$\Re$ beschreibt eine Rotation über eine im Raum feste Achse. Für $\boldsymbol{h_1}$, $\boldsymbol{h_2}$, $\boldsymbol{h_3}$ sehen die Matrizen wie folgt aus :
Eine Rotation um $\boldsymbol{h_3}$ mit Winkel $\theta$ ist gegeben durch:

$$\Re_3(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Eine Rotation um $\boldsymbol{h_2}$ mit Winkel $\phi$ ist gegeben durch:

$$\Re_2(\phi) = \begin{pmatrix} cos(\phi) & 0 & sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\phi) & 0 & cos(\phi) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Eine Rotation um $\boldsymbol{h_1}$ mit Winkel $\psi$ ist gegeben durch:

$$\Re_1(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\psi) & -sin(\psi) \\ 0 & sin(\psi) & cos(\psi) \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Rotationsmatrizen sind orthogonal, d.h.: $\Re^{-1}(x) = \Re^T(x)$. Der Beweis folgt einfach durch einsetzen. Um eine beliebige Rotation zu beschreiben, genügt die Hintereinanderausführung der Rotationen um die drei Achsen. Dabei ist wegen der Nichtkommutativität der Matrizenmultiplikation die Reihenfolge wichtig.
Bei dreidimensionalen Rotationen muß unterschieden werden, ob bezüglich des Weltkoordinatensystems oder bezüglich des Objektkoordinatensystems rotiert wird. Zur Unterscheidung der Matrizen beschreibt $\Re_i$ eine Rotation bzgl. des Weltkoordinatensystems und $E_i$ eine Rotation bzgl. des Objektkoordinatensystems. Aus der Nichtkommutativität der Matrizenmultiplikation folgt, daß Rotationen nicht kommutativ sind.
Bei Rotationen im Welt- und Objektkoordinatensystem gilt folgender Zusammenhang:

**Lemma 2.1** *Seien $\Re_i(\phi)$ und $\Re_j(\psi)$ für $i, j = 1, 2, 3$ Rotationsmatrizen wie in (2.2)-(2.4). Sei $\boldsymbol{x}$ ein Vektor. Die Hintereinanderausführung der Rotationen $\Re_i(\phi)\Re_j(\psi)$ im Weltkoordinatensystem stellt sich im Objektkoordinatensystem über die Spiegelung der Reihenfolge der Rotationen dar: $E_j(\psi)E_i(\phi)$. D.h. es gilt:*

$$\Re_i(\phi)\Re_j(\psi)\boldsymbol{x} = E_j(\psi)E_i(\phi)\boldsymbol{x}. \tag{2.5}$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} E_j(\psi)E_i(\phi)\boldsymbol{x} &= E_j(\psi)\Re_i(\phi)\boldsymbol{x} && (2.6)\\ &= \Re_i(\phi)\Re_j(\psi)\underbrace{\Re_i^{-1}(\phi)\Re_i(\phi)}_{I}\boldsymbol{x} && (2.7)\\ &= \Re_i(\phi)\Re_j(\psi)\boldsymbol{x}. && (2.8)\end{aligned}$$

Dabei wird zunächst ausgenutzt, daß $E_i(\phi)$ mit $\Re_i(\phi)$ übereinstimmt. Dann wird eine Transformation zum Weltkoordinatensystem vollzogen, rotiert und eine Transformation zum Objektkoordinatensystem durchgeführt. **qed**

Abbildung 1 verdeutlicht diese Eigenschaft. Dies bedeutet, daß Rotationen, die bezüglich

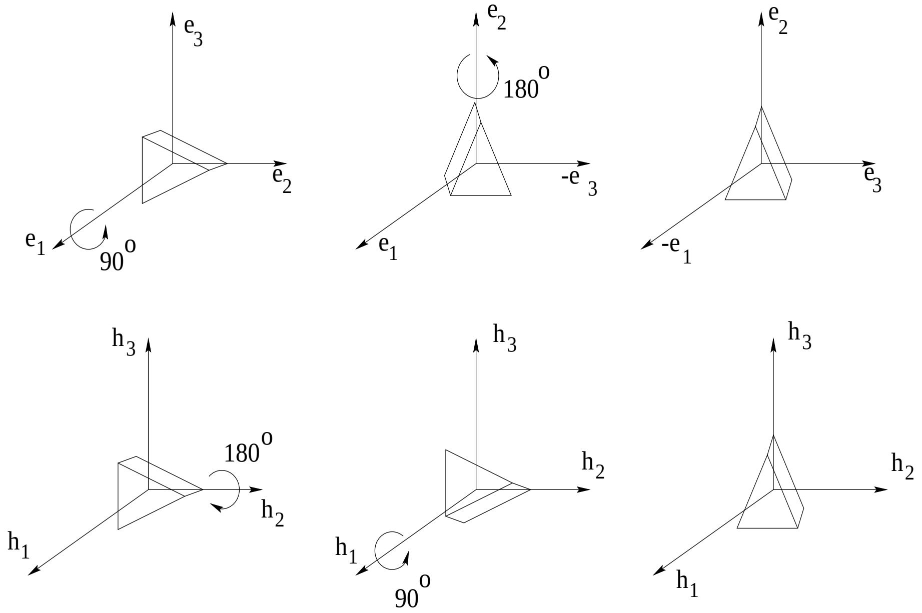



Abbildung 1: Rotationen im Objekt- und Weltkoordinatensystem.

des Weltkoordinatensystems beschrieben sind, im Objektkoordinatensystem durch Spiegelung der Reihenfolge der Rotationen beschrieben werden können.

Rotationsmatrizen sind nicht die einzige Methode zur Beschreibung von Rotationen. Eine weitere Möglichkeit ist es, die Rotation über einen Vektor zu kodieren, dessen Richtung durch die Rotationsachse gegeben ist, und dessen Länge proportional zum Rotationswinkel ist. Eine solche Kodierung kann über die Darstellung von Rotationen durch Quaternionen realisiert werden ([37, 17]). Eine Quaternion $q$ wird beschrieben durch:

$$q = q_0 + (iq_1 + jq_2 + kq_3) = q_0 + \vec{\boldsymbol{q}} \cdot \vec{\boldsymbol{I}} \quad \text{mit} \quad \vec{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \text{und } \vec{\boldsymbol{I}} = \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}. \qquad (2.9)$$

Dabei handelt es sich bei dem Skalarprodukt $\vec{\boldsymbol{q}} \cdot \vec{\boldsymbol{I}} = (iq_1 + jq_2 + kq_3)$ um eine rein formale Schreibweise. Die $q_i$ sind aus den reellen Zahlen und das Produkt von $i, j, k$ ist wie folgt definiert:

| | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|
| $i$ | $-1$ | $k$ | $-j$ |
| $j$ | $-k$ | $-1$ | $i$ |
| $k$ | $j$ | $-i$ | $-1$ |

Die Quaternionen bilden einen Schiefkörper mit drei Imaginärkonstanten. Für nähere Informationen wird auf die Literatur ([37]) verwiesen.
Für eine Rotation um $\theta$ müssen folgende Eigenschaften gelten:

$$q_0 = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad \|\vec{\boldsymbol{q}}\|_2 := \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{2.10}$$

Dabei sei $\vec{\boldsymbol{q}}$ parallel zu $\vec{\boldsymbol{n}}$ der Rotationsachse. Der Wert $q_0$ wird Skalarkomponente von Quaternion $q$ genannt und der Vektor $\vec{\boldsymbol{q}}$ Vektorkomponente.
Quaternionen, die Rotationen beschreiben, sind Einheitsquaternionen. Sie haben also die Länge 1. Dies zeigt man sofort durch einsetzen. Für Einheitsquaternionen gilt:

$$q^{-1} = q_0 - \vec{\boldsymbol{q}} \cdot \vec{\boldsymbol{I}} =: \tilde{q}.$$

Das Vertauschen der Vorzeichen der Imaginäranteile einer Quaternion wird auch als *Konjugation* bezeichnet. Das Inverse einer Einheitsquaternion $q$ wird also durch Konjugation $\tilde{q}$ der Einheitsquaternion $q$ erzeugt. Dies zeigt man ebenfalls durch einsetzen.
Eine Division einer Quaternion $q = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{I}}$ durch ihren Skalaranteil liefert

$$q' = 1 + tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{I}}. \tag{2.11}$$

Die Vernachlässigung des Skalaranteils und die Beschränkung der Quaternion auf den Vektoranteil beschreibt dann einen *Rotationsvektor* im dreidimensionalen Raum:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{\vec{\boldsymbol{q}}}{q_0} = tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\vec{\boldsymbol{q}}}{\|\vec{\boldsymbol{q}}\|_2} = tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{\boldsymbol{n}}. \tag{2.12}$$

Für die Berechnung von Rotationen über Quaternionen wird auf das folgende Lemma 2.2 verwiesen.

**Lemma 2.2** *Sei $\Re$ eine Rotationsmatrix, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ein Vektor und $q$ das zur Rotationsmatrix gehörende Quaternion. Dann gilt: $q(\boldsymbol{x} \cdot \vec{\boldsymbol{I}})q^{-1} = (\Re \boldsymbol{x}) \cdot \vec{\boldsymbol{I}}$.*

**Beweis:** Es genügt, die Rotation um $\boldsymbol{h_3}$ mit Winkel $\theta$ zu betrachten. Einsetzen liefert :

$$
\begin{aligned}
(\Re \boldsymbol{x}) \cdot \vec{\boldsymbol{I}} &= \left( \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \right) \cdot \vec{\boldsymbol{I}} && (2.13) \\
&= \begin{pmatrix} cos(\theta)x_1 - sin(\theta)x_2 \\ cos(\theta)x_2 + sin(\theta)x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}. && (2.14)
\end{aligned}
$$

Die zugehörige Quaternion hat folgende Gestalt :

$$
q_0 = cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \qquad \|\vec{\boldsymbol{q}}\|_2 := \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = sin\left(\frac{\theta}{2}\right).
$$

Also gilt $q_3 = sin\left(\frac{\theta}{2}\right), q_1 = q_2 = 0.$

$$
\vec{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.15)
$$

Damit ist $\vec{\boldsymbol{q}}$ parallel zur Rotationsachse. Einsetzen und Ausmultiplizieren liefert:

$$
\begin{aligned}
q(\boldsymbol{x} \cdot \vec{\boldsymbol{I}})q^{-1} = (q_0 + kq_3)(ix_1 + jx_2 + kx_3)(q_0 - kq_3) &= && (2.16) \\
(q_0x_1i + q_3x_1j + q_0x_2j - q_3x_2i + x_3q_0k - q_3x_3)(q_0 - kq_3) &= && (2.17) \\
(q_0q_0i + q_0q_3x_1j + q_0q_3x_1j - q_3q_3x_1i + q_0q_0x_2j - iq_0q_3x_2 - iq_0q_3x_2 & && (2.18) \\
-jq_3q_3x_2 + q_0q_0x_3 + q_0q_3x_3 - q_0q_3x_3 + q_3q_3x_3k) &= && (2.19) \\
\begin{pmatrix} q_0^2x_1 - q_3^2x_1 - 2q_0q_3x_2 \\ 2q_0q_3x_1 + q_0^2x_2 - q_3^2x_2 \\ 1x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}. & && (2.20)
\end{aligned}
$$

Weiter gilt unter Anwendung von
$cos(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1+cos(\theta)}{2}}$ und $sin(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1-cos(\theta)}{2}}$ :

$$
\begin{aligned}
q_0^2x_1 - q_3^2x_1 - 2q_0q_3x_2 &= && (2.21) \\
cos^2(\frac{\theta}{2})x_1 - sin^2(\frac{\theta}{2})x_1 - 2x_2cos(\frac{\theta}{2})sin(\frac{\theta}{2}) &= && (2.22) \\
(\frac{1}{2} + \frac{cos(\theta)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{cos(\theta)}{2})x_1 - \sqrt{(1 + cos(\theta))(1 - cos(\theta))}x_2 &= && (2.23) \\
cos(\theta)x_1 - \sqrt{1 - cos^2(\theta)}x_2 &= && (2.24) \\
cos(\theta)x_1 - sin(\theta)x_2. & && (2.25)
\end{aligned}
$$

Analog für $j$. **qed**
Die Multiplikation von zwei Quaternionen kann über Vektorrechnung wie folgt beschrieben werden:

$$qp = (q_0 + \sum_{i=1}^{3} q_i \vec{\boldsymbol{I}}_i)(p_0 + \sum_{i=1}^{3} p_i \vec{\boldsymbol{I}}_i) = (q_0 p_0 - \vec{\boldsymbol{q}} \cdot \vec{\boldsymbol{p}}) + (q_0 \vec{\boldsymbol{p}} + p_0 \vec{\boldsymbol{q}} + \vec{\boldsymbol{q}} \times \vec{\boldsymbol{p}})\vec{\boldsymbol{I}}. \tag{2.26}$$

Dabei sei $\cdot$ das gewöhnliche Skalarprodukt und $\times$ das Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Der Rotationsvektor $\vec{\boldsymbol{r}}$ hat in Analogie zu Formel (2.12) folgende Darstellung:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{\vec{\boldsymbol{q}}}{q_0} = tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\vec{\boldsymbol{q}}}{\|\vec{\boldsymbol{q}}\|_2} = tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{\boldsymbol{n}}. \tag{2.28}$$

Den Rotationsvektor zur Beschreibung von zwei hintereinander ausgeführten Rotationsvektoren $\vec{\boldsymbol{r}}_q \circ \vec{\boldsymbol{r}}_p$ erhält man über die Quaternionendarstellung: [1]

**Lemma 2.3** *Seien $\vec{\boldsymbol{r}}_q$ und $\vec{\boldsymbol{r}}_p$ Rotationsvektoren. Für den Rotationsvektor der Hintereinanderausführung dieser Rotationen ergibt sich:*

$$\vec{\boldsymbol{r}}_q \circ \vec{\boldsymbol{r}}_p = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_p + \vec{\boldsymbol{r}}_q + \vec{\boldsymbol{r}}_p \times \vec{\boldsymbol{r}}_q}{1 - \vec{\boldsymbol{r}}_q \cdot \vec{\boldsymbol{r}}_p}. \tag{2.29}$$

**Beweis:** Seien $q, p$ die Quaternionen für $\vec{\boldsymbol{r}}_p, \vec{\boldsymbol{r}}_q$. Dann gilt:

$$qp = (q_0 p_0 - \vec{\boldsymbol{q}} \cdot \vec{\boldsymbol{p}}) + (q_0 \vec{\boldsymbol{p}} + p_0 \vec{\boldsymbol{q}} + \vec{\boldsymbol{q}} \times \vec{\boldsymbol{p}})\vec{\boldsymbol{I}}. \tag{2.30}$$

Eine Division des Vektoranteils durch den Skalaranteil liefert den Rotationsvektor der Hintereinanderausführung:

$$\begin{aligned}
\frac{(q_0 \vec{\boldsymbol{p}} + p_0 \vec{\boldsymbol{q}} + \vec{\boldsymbol{q}} \times \vec{\boldsymbol{p}})}{(q_0 p_0 - \vec{\boldsymbol{q}} \cdot \vec{\boldsymbol{p}})} &= \frac{(q_0 \frac{p_0}{p_0} \vec{\boldsymbol{p}} + p_0 \frac{q_0}{q_0} \vec{\boldsymbol{q}} + \frac{q_0 p_0}{q_0 p_0} \vec{\boldsymbol{q}} \times \vec{\boldsymbol{p}})}{(q_0 p_0 - \frac{q_0 p_0}{q_0 p_0} \vec{\boldsymbol{q}} \cdot \vec{\boldsymbol{p}})} \\
&= \frac{(q_0 p_0 (\vec{\boldsymbol{r}}_p + \vec{\boldsymbol{q}}_r + \vec{\boldsymbol{r}}_p \times \vec{\boldsymbol{r}}_q))}{(q_0 p_0 (1 - \vec{\boldsymbol{r}}_q \cdot \vec{\boldsymbol{r}}_p))} \\
&= \frac{(\vec{\boldsymbol{r}}_p + \vec{\boldsymbol{r}}_q + \vec{\boldsymbol{r}}_p \times \vec{\boldsymbol{r}}_q)}{(1 - \vec{\boldsymbol{r}}_p \cdot \vec{\boldsymbol{r}}_q)}.
\end{aligned}$$

**qed**
Rotationsvektoren werden in den Kapitel drei verwendet.

[1] $\circ$ bezeichne den Operator der Hintereinanderausführung von Rotationen, die durch Rotationsvektoren beschrieben werden.

## 2.2 Die Geometrische Algebra des n-dimensionalen Raumes

Sei $V_n$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum mit orthonormalen Basisvektoren $\{\sigma_i\}$ $i = 1, \ldots, n$. Zu dieser Basis wird ein $2^n$-dimensionaler Vektorraum definiert, der aus Kombination paarweiser verschiedener Basisvektoren entsteht:

$$1, \{\sigma_u\}, \{\sigma_u\sigma_v\}, \{\sigma_u\sigma_v\sigma_w\}, \ldots, \boldsymbol{I} = \{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n\}. \tag{2.31}$$

Als nächstes wird zu diesem $2^n$-dimensionalen Vektorraum ein Produkt definiert:

$$(\sigma_u)^2 = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad u \in \{1, \ldots, p\} \\ -1 & \text{für} \quad u \in \{p+1, \ldots, p+q\} \\ 0 & \text{für} \quad u \in \{p+q+1, \ldots, p+q+r=n\} \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\sigma_u\sigma_v = -\sigma_v\sigma_u \ (u \neq v). \tag{2.33}$$

Der $2^n$-dimensionale Vektorraum versehen mit dieser Multiplikation liefert eine Algebra, eine sogenannte Geometrische Algebra. Die so erzeugt Algebra, mit $p+q+r = n$, wird mit $G_{p,q,r}$ bezeichnet. Enthält eine Algebra Basiselemente mit $\sigma_u^2 = 0$, so wird sie entartet genannt. Die Geometrische Algebra wird über einen Raum definiert, dessen Elemente *Multivektoren* genannt werden. Dabei sind Multivektoren Linearkombinationen von Vektoren. Seien $\boldsymbol{a} = \sum_{u=1}^{n} a_u\sigma_u$ und $\boldsymbol{b} = \sum_{u=1}^{n} b_u\sigma_u$ Vektoren. Das (nichtkommutative) geometrische Produkt $\boldsymbol{ab}$ erfüllt folgende Axiome:

1. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) = (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$ (Assoziativität)
2. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}$ (Distributivität von links)
3. $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{ba}+\boldsymbol{ca}$ (Distributivität von rechts)
4. $\boldsymbol{a}\lambda = \lambda\boldsymbol{a}$ (Kommutativität mit Skalar)
5. $\boldsymbol{a}^2 \in \mathbb{R}$ (Kontraktion)

Weiter gilt folgende Zerlegung:

$$\boldsymbol{ab} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ba}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab}-\boldsymbol{ba}) =: \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}. \tag{2.34}$$

Das geometrische Produkt kann damit in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegt werden. Dabei liefert das *innere* Produkt $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ein Skalar und das *äußere* Produkt $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ einen *Bivektor*. Der Bivektor von zwei Vektoren wird als orientierte Fläche, aufgespannt durch die beiden Vektoren, interpretiert. Das äußere Produkt von $\boldsymbol{a_1}\ldots\boldsymbol{a_k}$ kann als der $k$-Vektoranteil des geometrischen Produktes dargestellt werden: $\langle\boldsymbol{a_1a_2}\ldots\boldsymbol{a_k}\rangle_k = \boldsymbol{a_1}\wedge\boldsymbol{a_2}\wedge\boldsymbol{a_3}\ldots\wedge\boldsymbol{a_k}$. Dabei bezeichnet man $\langle\boldsymbol{a_1a_2}\ldots\boldsymbol{a_k}\rangle_k$ auch als *$k$-Vektor* von $\boldsymbol{a_1a_2}\ldots\boldsymbol{a_k}$. Allgemein können Multivektoren über eine Linearkombination der $k$-Vektoren $\langle M\rangle_k$ beschrieben werden: $\boldsymbol{M} = \sum_{k=0}^{n}\langle\boldsymbol{M}\rangle_k$. Für zwei Multivektoren $\boldsymbol{A_r}$ und $\boldsymbol{B_s}$ vom Grad $r$ und $s$ kann das geometrische Produkt wie folgt beschrieben werden:

$$\boldsymbol{A}_r\boldsymbol{B}_s = \langle\boldsymbol{AB}\rangle_{r+s} + \langle\boldsymbol{AB}\rangle_{r+s-2} + \ldots + \langle\boldsymbol{AB}\rangle_{|r-s|}. \tag{2.35}$$

Für zwei Vektoren ergibt sich damit:

$$\boldsymbol{ab} = \langle\boldsymbol{ab}\rangle_2 + \langle\boldsymbol{ab}\rangle_0 = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}. \tag{2.36}$$

Damit erfüllt Gleichung (2.33)

$$\sigma_u \wedge \sigma_v \quad = \quad \sigma_u\sigma_v = -\sigma_v\sigma_u \quad (u \neq v). \tag{2.37}$$

Die Basis der geometrischen Algebra $G_{p,q,r}$ besitzt daher auch folgende Gestalt:

$$1, \{\sigma_u\}, \{\sigma_u \wedge \sigma_v\}, \{\sigma_u \wedge \sigma_v \wedge \sigma_w\}, \ldots, \boldsymbol{I} = \{\sigma_1 \wedge \sigma_2 \ldots \wedge \sigma_n\}. \tag{2.38}$$

Die $u, v, w$ seien paarweise verschieden.
Damit gibt es $\binom{n}{1}$ Vektoren, $\binom{n}{2}$ Bivektoren bis hin zu $\binom{n}{n} = 1$ $n$-Vektoren. Der $n$-Vektor $\boldsymbol{I}$ wird auch Pseudoskalar oder Hypervolumen genannt. Die Geometrische Algebra entspricht einem Vektorraum mit der Dimension $2^n$.

## 2.3 Die Geometrische Algebra des dreidimensionalen Raumes

In diesem Abschnitt erfolgt die Beschreibung der Geometrischen Algebra $G_{3,0,0}$ für den dreidimensionalen Raum. Dieser Raum kann zur Beschreibung von Vektoren und deren Rotationen verwendet werden. Da die Unteralgebra $G^+_{3,0,0}$ isomorph zu der Quaternionenalgebra ist, wird zur Erleichterung des Verständnisses nochmal auf Abschnitt 2.1 verwiesen. Für weiterführende Informationen wird auf die Literatur ([19, 20, 18, 4]) verwiesen.
Die Basis der Geometrischen Algebra $G_{3,0,0}$ hat folgende Gestalt:

$$\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \boldsymbol{I} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\}. \tag{2.39}$$

In dieser Algebra ist die Quaternionenalgebra in dem Unterraum

$$1, \{\sigma_u \wedge \sigma_v\} \tag{2.40}$$

enthalten. Die Elemente der Bivektoren stellen die Imaginärkonstanten des Quaternionenschiefkörpers dar:

$$\sigma_1\sigma_2 = \boldsymbol{I}\sigma_3 =: -k \tag{2.41}$$

$$\sigma_3\sigma_1 = \boldsymbol{I}\sigma_2 =: -j \tag{2.42}$$

$$\sigma_2\sigma_3 = \boldsymbol{I}\sigma_1 =: -i \quad . \tag{2.43}$$

Weiter liefert einsetzen : $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ und $ij = -ji = k$.
Damit folgen auch die Eigenschaften und Regeln im Raum der Quaternionen. Eine Quaternion kann über $G^{+}_{3,0,0}$ beschrieben werden: $q = q_0 + \vec{\boldsymbol{I}} \cdot \vec{\boldsymbol{q}} = q_0 + \boldsymbol{Iq}$. Die Multiplikation des Pseudoskalars $\boldsymbol{I}$ mit einem Vektor $\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{n} q_i \sigma_i$ liefert dabei einen Bivektor. Quaternionen beschreibt man häufig über ein Paar $q = (q_0, \boldsymbol{Iq})$, mit $q_0$ dem Skalaranteil, und $\boldsymbol{Iq}$ dem Bivektoranteil.
Die konjugierte Quaternion ist gegeben durch $\tilde{q} = q_0 - \vec{\boldsymbol{I}} \cdot \vec{\boldsymbol{q}} = q_0 - \boldsymbol{Iq}$ und der Betrag einer Quaternion durch $\|q\|_2^2 = q\tilde{q}$.
Dadurch wird die Inverse durch $q^{-1} = \tilde{q}\|q\|_2^{-1}$ beschrieben.
Analog zu dem vorherigen Abschnitt gilt, daß zu einem Winkel $\alpha$ und gegebener Rotationsachse $\boldsymbol{b}$ der Bivektor zur Beschreibung der Rotation als $q = cos(\frac{\alpha}{2}) - \boldsymbol{I}(sin(\frac{\alpha}{2}))\boldsymbol{b}$ festgelegt wird. Die Rotation wird dann durch $\boldsymbol{r} = q\boldsymbol{r'}\tilde{q}$ berechnet.
Einsetzen liefert weiter $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, wobei $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ wie vorher das Kreuzprodukt ist. Dies gilt jedoch nur in $G_{3,0,0}$, da das Kreuzprodukt nur für dreidimensionale Vektoren definiert ist. Da das äußere Produkt selbst in Räumen beliebiger Dimension existiert, ist es allgemeiner als das Kreuzprodukt. Weiter liefert das Kreuzprodukt von zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ einen Vektor senkrecht zu $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, so daß das äußere Produkt von zwei Vektoren den Generator von Rotationen zwischen den Vektoren liefert.

### 2.3.1 Beschreibung von dreidimensionalen Rotationen in der Geometrischen Algebra

Einer der Vorteile der Geometrischen Algebra ist, daß sich ein Rotationsvektor, der die Rotation von zwei Einheitsvektoren $\boldsymbol{c}$ nach $\boldsymbol{b}$ darstellt, direkt über die Vektoren beschreiben läßt. Aufschluß darüber gibt das folgende Lemma:

**Lemma 2.4** *Für zwei Einheitsvektoren $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ wird durch $q = 1 + \boldsymbol{bc}$ die Quaternion beschrieben, die bis auf einen skalaren Faktor die Rotation von $\boldsymbol{c}$ nach $\boldsymbol{b}$ beschreibt. Dabei beschreibt $q$ eine Rotation um eine zu $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ senkrechte Achse.*

**Beweis:** Da der Skalaranteil von $\boldsymbol{c}$ Null ist, gilt:
$\boldsymbol{b} = q\boldsymbol{c}\tilde{q} = q^2\boldsymbol{c}$. Insbesondere löst $q^2 = \boldsymbol{bc}$ das Gleichungssystem, da dann gilt:
$\boldsymbol{b} = q^2\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{bc})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{cc}) = \boldsymbol{b}$. Weiter gilt :

$$q = \sqrt{\boldsymbol{bc}} = \frac{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\|_2} = \frac{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\|_2} = \frac{\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{b}^2}{\|\boldsymbol{b}\|_2\|\boldsymbol{1}+\boldsymbol{bc}\|_2} = \frac{\boldsymbol{bc}+1}{\|\boldsymbol{bc}+1\|_2}. \tag{2.44}$$

Es genügt, die obige zweite Gleichung zu zeigen :

$$\sqrt{\boldsymbol{bc}} = \frac{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\|_2} \quad \Leftrightarrow \tag{2.45}$$

$$\boldsymbol{bc} = \frac{((\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{c})^2}{\|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\|_2^2} \quad \Leftrightarrow \tag{2.46}$$

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2\boldsymbol{bc} = ((\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{c})^2. \tag{2.47}$$

Da weiter

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2\boldsymbol{bc} &= (\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{cb}+\boldsymbol{c}^2)\boldsymbol{bc} && (2.48)\\
&= \boldsymbol{b}^3\boldsymbol{c}+\boldsymbol{bcbc}+\boldsymbol{cbbc}+\boldsymbol{c}^2\boldsymbol{bc} && (2.49)\\
&= \boldsymbol{bc}+\boldsymbol{bcbc}+1+\boldsymbol{bc}, && (2.50)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
((\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{c})^2 &= (\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{c}^2)^2 && (2.51)\\
&= (\boldsymbol{bc}+1)(\boldsymbol{bc}+1) && (2.52)\\
&= \boldsymbol{bcbc}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{bc}+1, && (2.53)
\end{aligned}
$$

gilt, ist die zweite Gleichung gezeigt. **qed**
Der Rotationsvektor zur Beschreibung einer Rotation von $\boldsymbol{c}$ nach $\boldsymbol{b}$ entlang einer Geodäten ist auf diese Weise sehr leicht zu berechnen und benötigt keine Anwendung von trigonometrischen Sätzen. Formel (2.44) kann wie folgt interpretiert werden:
Betrachtet wird die Rotation eines Einheitsvektors $\boldsymbol{c}$ nach $\boldsymbol{b}$. Geometrisch beschreibt die Transformation $\boldsymbol{c}$ nach $-\boldsymbol{ncn}$ eine Reflektion an einer Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{n} \equiv \frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\|_2}$. Abbildung 2 verdeutlicht auch die späteren Transformationen. Es gilt:

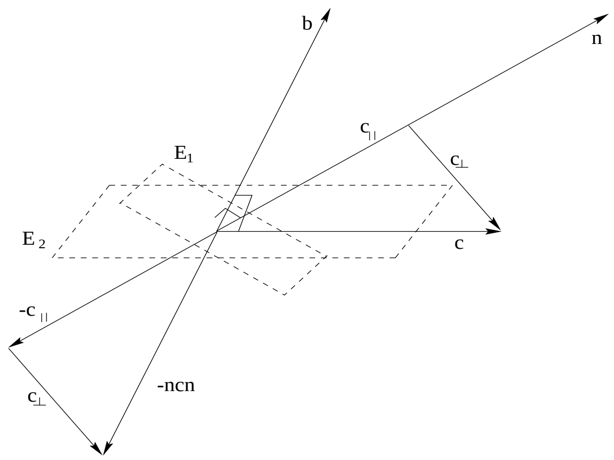



Abbildung 2: Skizze zur Verdeutlichung der Reflektionen zur Beschreibung der Rotation.

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{n}^2\boldsymbol{c} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{nc}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}_{||}+\boldsymbol{c}_{\perp}. \qquad (2.54)$$

Dabei ist $\boldsymbol{c}_{\perp}$ aus einer Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{n}$ bzw. $E_1$ und $\boldsymbol{c}_{||}$ parallel zu der Ebene. Weiter gilt:
$-\boldsymbol{ncn} = -\boldsymbol{n}((\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{c}))\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}((\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{nn}+-\boldsymbol{nn}(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{c})\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{c}) + -(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{c})\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{c}_{||}+\boldsymbol{c}_{\perp}$. D.h. $\boldsymbol{c}$ wird an der $\boldsymbol{n}$-Ebene($E_1$) durch den Ursprung zu $-\boldsymbol{ncn}$

reflektiert. D.h. $\boldsymbol{c}$ wird zu $-\boldsymbol{b}$ reflektiert und kann durch eine zweite Reflektion senkrecht zu $\boldsymbol{b}$ korrigiert werden. Algebraisch ergibt sich somit:

$$\boldsymbol{c} \rightarrow -\boldsymbol{b}(-\boldsymbol{ncn})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\|_2}\boldsymbol{c}\frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\|_2}\boldsymbol{b}. \tag{2.55}$$

Es wird $\boldsymbol{R} := \boldsymbol{b}\frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\|_2}$ und $\tilde{\boldsymbol{R}} := \frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\|_2}\boldsymbol{b}$ gesetzt. Die gewünschte Rotation wird beschrieben durch:

$$\boldsymbol{R} := \boldsymbol{b}\frac{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\|_2} = \frac{\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{b}^2}{\|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\|_2} = \frac{\boldsymbol{bc}+1}{\|\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\|_2} = \frac{\boldsymbol{bc}+1}{\|\boldsymbol{bc}+1\|_2}. \tag{2.56}$$

Dieser letzte Term (2.56) korrespondiert mit Term (2.44).

## 2.4 Geometrische Algebren des vierdimensionalen Raumes

In diesem Abschnitt erfolgt die Vorstellung der Basen für die vierdimensionalen Geometrischen Algebren, die zur Beschreibung von dreidimensionalen Bewegungen und zur Beschreibung der projektiven Geometrie verwendet werden können.

### 2.4.1 Die Geometrische Algebra des projektiven Raumes

Der projektive Raum kann über $G_{1,3,0}$ repräsentiert werden. Damit ergibt sich folgende Basis:

$$\begin{aligned} G_{1,3,0} \;=\; & \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \sigma_4\sigma_1, \sigma_4\sigma_2, \sigma_4\sigma_3, \\ & \sigma_2\sigma_3\sigma_4, \sigma_3\sigma_1\sigma_4, \sigma_1\sigma_2\sigma_4, \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \boldsymbol{I} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\}. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Dabei gilt:

$$\sigma_4^2 = 1 \tag{2.58}$$

$$\sigma_k^2 = -1 \qquad k \in \{1, 2, 3\}. \tag{2.59}$$

Man erhält ein Skalar, vier Vektoren, sechs Bivektoren, vier Trivektoren und ein Pseudoskalar. Es gilt:
$\boldsymbol{I}^2 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = \sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = -\sigma_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4 = -\sigma_4^2 = -1$. Das Pseudoskalar quadriert also zu $-1$. Eine Einführung in die projektive Geometrie erfolgt in Abschnitt 2.6. Die Einführung in die projektive Geometrie im Rahmen der Geometrischen Algebra in Abschnitt 2.6.2 ist in Anlehnung an die Literatur ([20]) allgemein gehalten. In Kapitel vier und fünf werden dann die Ergebnisse aus Abschnitt 2.6.2 in der Geometrischen Algebra $G_{1,3,0}$ verwendet.

### 2.4.2 Die Geometrische Algebra dreidimensionaler Bewegungen

Die Geometrische Algebra dreidimensionaler Bewegungen kann über $G_{3,0,1}$ repräsentiert werden. Die Basis hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} G_{3,0,1} &= \{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \sigma_4\sigma_1, \sigma_4\sigma_2, \sigma_4\sigma_3, \\ &\quad \sigma_3\sigma_2\sigma_4, \sigma_1\sigma_3\sigma_4, \sigma_2\sigma_1\sigma_4, \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \boldsymbol{I} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Dabei gilt:

$$\sigma_4^2 = 0 \tag{2.61}$$

$$\sigma_k^2 = 1 \qquad k \in \{1, 2, 3\}. \tag{2.62}$$

Man erhält ein Skalar, vier Vektoren, sechs Bivektoren, vier Trivektoren und ein Pseudoskalar. Das Pseudoskalar quadriert dabei zu Null:

$$\boldsymbol{I}^2 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = -(\sigma_3\sigma_4)(\sigma_3\sigma_4) = 0. \tag{2.63}$$

## 2.5 Die Motorenalgebra für dreidimensionale Bewegungen

In diesem Abschnitt erfolgt eine Einführung in eine entartete Geometrische Algebra, die *Algebra der Motoren*. Für nähere Informationen wird auf die Literatur ([4, 3]) verwiesen. Interessant ist eine Einschränkung von $G_{3,0,1}$ auf die gerade Unteralgebra:

$$G_{3,0,1}^+ = \{1, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \sigma_4\sigma_1, \sigma_4\sigma_2, \sigma_4\sigma_3, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\}. \tag{2.64}$$

Die Basis besteht aus einem Skalar, sechs Bivektoren und einem Pseudoskalar. Diese Algebra wird auch die *Algebra der Motoren* genannt. Elemente der Algebra der Motoren, im folgenden auch *Motoren* genannt, können über Quaternionen beschrieben werden: Ein *Motor* hat die Form

$$\boldsymbol{M} = q_1 + \boldsymbol{I}q_2 \text{ mit } q_i \text{ Quaternionen: } q_i = q_{i,0} + q_{i1}\sigma_2\sigma_3 + q_{i2}\sigma_3\sigma_1 + q_{i3}\sigma_1\sigma_2. \tag{2.65}$$

Dabei sei $q_i = (s_i + \boldsymbol{B_i})$ eine Quaternion mit $s_i$ dem Skalarteil und $\boldsymbol{B_i}$ dem Bivektorteil.

### 2.5.1 Transformation von Punkten, Geraden und Ebenen in der Algebra der Motoren

Die vierdimensionale Motorenalgebra wird zur Berechnung dreidimensionaler Bewegungen verwendet. Die Grundidee zu dieser vierdimensionalen Algebra kann man dem Matrizenkalkül entnehmen. Im dreidimensionalen Raum ist eine allgemeine Translation eine nichtlineare Abbildung. Eine Abbildung ist linear, wenn gilt: $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$. Wird zum Beispiel $f : x \to x + c$ mit $c \neq 0$ betrachtet, gilt: $f(x) + f(y) = x + c +$

$y + c = x + y + 2c \neq x + y + c = f(x + y)$. Wenn nun eine vierdimensionale Basis betrachtet wird und die dreidimensionalen Punkte $\boldsymbol{a} = (x, y, z)^T$ auf der Hyperebene $\{(x, y, z, 1)^T | x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$ eingebettet werden, ergibt sich für eine Rotation und Translation im dreidimensionalen Raum: $\boldsymbol{a'} = \Re(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{t}$. Im vierdimensionalen Raum kann diese Abbildung linearisiert werden:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re & \boldsymbol{t} \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.66}$$

Durch Einbettung in die Geometrische Algebra werden die Operatoren und die geometrischen Entitäten in der selben Algebra ausgedrückt. Dies entspricht der Darstellung von Rotationen im $\mathbb{R}^3$ durch Quaternionen.
Zunächst erfolgt die Darstellung der Strukturen in dieser Algebra:
Ein Punkt $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ besitzt die Darstellung

$$\boldsymbol{P(x)} = 1 + \boldsymbol{IB_2} = 1 + \boldsymbol{I}(x\sigma_2\sigma_3 + y\sigma_3\sigma_1 + z\sigma_1\sigma_2). \tag{2.67}$$

Dies entspricht der Einbettung $\boldsymbol{a} = (x, y, z)^T \to (\boldsymbol{a}, 1)^T = (x, y, z, 1)^T$.
Eine Gerade wird über das äußere Produkt von zwei Punkten aus der Hyperebene $(x_1\sigma_1, y_1\sigma_2, z_1\sigma_3, 1)^T$ beschrieben:

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{p_1} \wedge \boldsymbol{p_2}. \tag{2.68}$$

Die Gerade erhält damit folgende Gestalt:

$$\boldsymbol{L(x, y)} = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{Im}. \tag{2.69}$$

Dabei ist $\boldsymbol{n}$ die Richtung der Geraden und $\boldsymbol{m}$ das *Moment*, der Vektor für die Orientierung der Ebene, in der die Gerade liegt. Diese Geradenrepräsentation entspricht der *Plücker*koordinatendarstellung. Für nähere Informationen wird auf die Literatur ([4, 3]) verwiesen.
Eine Ebene kann eindeutig durch die Normale der Ebene zum Ursprung und durch den *Hesseabstand* beschrieben werden. Genau diese Informationen werden in der Ebenenrepräsentation kodiert:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B_1} + \boldsymbol{I}(s_2) \tag{2.70}$$
$$= x\sigma_2\sigma_3 + y\sigma_3\sigma_1 + z\sigma_1\sigma_2 + \boldsymbol{I}s_2. \tag{2.71}$$

Im Bivektoranteil $\boldsymbol{B_1}$ ist die Normale der Ebene als Einheitsvektor kodiert und im Pseudoskalar $s_2$ steht der *Hesseabstand*.
Den Matrizen $\begin{pmatrix} \Re & \boldsymbol{t} \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$ entsprechen in der Geometrischen Algebra $G^+_{3,0,1}$ spezielle Motoren. Eine Rotation kann wie in der Geometrischen Algebra des $\mathbb{R}^3$ über eine Quaternion berechnet werden. Ein Motor, der eine reine Quaternion beschreibt, kann zur

Beschreibung von Rotationen verwendet werden.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= a_0 + a_1\sigma_2\sigma_3 + a_2\sigma_3\sigma_1 + a_3\sigma_1\sigma_2 && (2.72)\\ &= a_0 + \boldsymbol{a} && (2.73)\\ &= cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{n}. && (2.74) \end{aligned}$$

Die Rotationen der geometrischen Entitäten werden wie folgt beschrieben:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') &= \boldsymbol{R}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{R}} && (2.75)\\ \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}') &= \boldsymbol{R}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\tilde{\boldsymbol{R}} && (2.76)\\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}') &= \boldsymbol{R}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{R}}. && (2.77) \end{aligned}$$

Ein *Translator* hat folgende Gestalt:

$$\boldsymbol{T} = \left(1 + \boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{t}}{2}\right). \tag{2.78}$$

Dabei sei $\boldsymbol{t}$ ein Translationsvektor in $\mathbb{R}^3$. Dieser Translator kann zur Beschreibung der Translation verwendet werden. Die Translationen der geometrischen Entitäten werden wie folgt beschrieben:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}') &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T} && (2.79)\\ \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}') &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\tilde{\boldsymbol{T}} && (2.80)\\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}') &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}. && (2.81) \end{aligned}$$

Die Wirkungsweise der Translatoren auf eine geometrische Entität soll kurz am Beispiel eines Punktes verdeutlicht werden:

$$\begin{aligned} \left(1 + \boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{t}}{2}\right)(\boldsymbol{P})\left(1 + \boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{t}}{2}\right) &= && (2.82)\\ \left(1 + \boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{t}}{2}\right)(1 + \boldsymbol{I}x)(1 + \boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{t}}{2}) &= && (2.83)\\ \left(1 + \boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{t}}{2} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}^2\frac{\boldsymbol{t}}{2}\boldsymbol{x}\right)\left(1 + \boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{t}}{2}\right) &= && (2.84)\\ \left(1 + \boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{t}}{2} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}\right)\left(1 + \boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{t}}{2}\right) &= && (2.85)\\ \left(1 + \boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{t}}{2} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{t}}{2}\right) &= && (2.86)\\ 1 + \boldsymbol{I}(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{x}). && && (2.87) \end{aligned}$$

Da in der vierdimensionalen Geometrischen Algebra auch Translationen in $\mathbb{R}^3$ durch Motoren beschrieben werden können, kann ein *Rotor* zur Beschreibung einer Rotation über eine beliebige Rotationsgerade im Raum wie folgt definiert werden: Um eine Rotation zu berechnen wird dafür zunächst der zu rotierende Punkt so verschoben, daß die

Rotation durch eine Rotationsachse um den Ursprung beschrieben werden kann. Anschließend wird die Rotation durchgeführt und der Punkt zurückverschoben. Der *Rotor* erhält damit, nach einsetzen, folgende Gestalt:

$$\boldsymbol{R_s} = \boldsymbol{T_c R \tilde{T}_c} \tag{2.88}$$

$$= \left(1 + \boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{t_c}}{2}\right)(a_0 + \boldsymbol{a})\left(1 - \boldsymbol{I}\frac{\boldsymbol{t_c}}{2}\right) \tag{2.89}$$

$$= a_0 + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{I}((\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{t_c}). \tag{2.90}$$

Dabei ist $\boldsymbol{T_c}$ ein geeigneter Translator, der zur Beschreibung der Translation verwendet wird. Die Rotationsachse wird also nicht durch einen Punkt, sondern durch eine Gerade repräsentiert, die im Bivektoranteil kodiert ist. In der Eulerdarstellung ergibt sich:

$$\boldsymbol{R_s} = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{In} \wedge \boldsymbol{t_c}) \tag{2.91}$$

$$= cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{l}. \tag{2.92}$$

Die Rotation wird also bezüglich der Geraden $\boldsymbol{l}$ beschrieben, die durch die Richtung $\boldsymbol{n}$ und das Moment $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{t_c}$ eindeutig definiert wird. Für nähere Informationen wird auf die Literatur [4] verwiesen.
Die Hintereinanderausführung von Rotation und Translation liefert wieder einen Motor, der nach Einsetzen in einer Eulerdarstellung folgende Gestalt erhält:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{T_s R_s} \tag{2.93}$$

$$= cos\left(\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{I}\frac{d}{2}\right) + sin\left(\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{I}\frac{d}{2}\right)\boldsymbol{l}. \tag{2.94}$$

In der Motorenalgebra wird die Translation nicht durch eine Addition, sondern durch eine Multiplikation beschrieben. Damit handelt es sich um eine lineare Abbildung.

## 2.6 Projektive Geometrie im Rahmen der Geometrischen Algebra

In diesem Abschnitt wird zunächst eine Einführung in die projektive Geometrie mit herkömmlichen mathematischen Methoden gegeben. Dies ist für die Beschreibung der klassischen Methode zur Selbstkalibrierung wichtig. Dann erfolgt eine Einführung in die projektive Geometrie im Rahmen der Geometrischen Algebra. In der Geometrischen Algebra kann die Interpretation erhalten bleiben und das Arbeiten in der Geometrischen Algebra bleibt anschaulich und übersichtlich. Für nähere Informationen zur projektiven Geometrie wird auf die Literatur ([28, 5, 8]) verwiesen. Nähere Informationen zur projektiven Geometrie im Rahmen der Geometrischen Algebra sind der Literatur ([20, 18, 4]) zu entnehmen.

### 2.6.1 Herkömmliche Konzepte der projektiven Geometrie

**Die projektive Ebene**

Die projektive Ebene ist ein mathematisches Konzept. Sie kann der Modellierung geometrischer Eigenschaften von perspektivischen Projektionen dienen. Eine projektive Transformation kann als Rearrangieren von Entitäten wie z.B. Punkten und Geraden auf einer projektiven Ebene gesehen werden. Diese Transformation nennt man *Kollineation*. Gegenüber euklidischen Transformationen gibt es zwei große Unterschiede:

1. Der Abstand in der euklidischen Ebene $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ ändert sich nicht bei euklidischen Transformationen wie einer Rotation oder Translation. Unter perspektivischer Betrachtung kann der Abstand zwischen zwei Punkten in jeden beliebigen Wert transformiert werden.

2. Das Bild zweier paralleler Geraden kann sich unter perspektivischer Betrachtung schneiden. In der euklidischen Ebene schneiden sich parallele Geraden nicht.

Die projektive Ebene kann als Verallgemeinerung der euklidischen Ebene definiert werden, bei der einige Eigenschaften vernachlässigt wurden: Zunächst wird der Begriff *Distanz* aufgegeben und es wird eine Struktur erzeugt, die *affine Ebene* genannt wird. Die Haupteigenschaft der affinen Ebene ist, daß parallele Geraden unter affinen Transformationen invariant bleiben. Ein Quadrat wird also höchstens in ein Parallelogramm transformiert. Als zweites wird im Modell der projektiven Ebene das Konzept paralleler Geraden vernachlässigt. Alle Geraden schneiden sich in einem Punkt. Dabei schneiden sich parallele Geraden im Unendlichen in einem sogenannten *Ideal*-Punkt. Die Menge von *Ideal*-Punkten bildet eine Gerade, eine unendlich ferne Gerade, die mit dem *Horizont* eines Bildes zu vergleichen ist. Die *projektive Ebene* entsteht also aus der affinen Ebene durch Hinzunahme der unendlich fernen Gerade. Die projektive Ebene erfüllt folgende Axiome:

1. Zwei verschiedene Punkte legen eine eindeutige Gerade fest.

2. Zwei Geraden legen einen eindeutigen Punkt fest.

In jeder Aussage, in der die Wörter *Punkte* und *Geraden* vorkommen, können diese vertauscht werden, ohne die Wahrheit der Aussage zu beeinflussen. Diese Eigenschaft nennt man *Dualität*.

**Modell der projektiven Ebene**

Die Grundidee der projektiven Ebene ist ein Ursprung im Raum, der zu Punkten im Raum Strahlen bildet. Man betrachtet den Schnitt der Strahlen mit einer projektiven Ebene. Ein Punkt in der Ebene wird durch drei kartesische Koordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ repräsentiert: Der Vektor $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ repräsentiert dabei einen Strahl vom Ursprung zum

Punkt $\boldsymbol{p}$. Es ist nur die Richtung wichtig. Das bedeutet, daß $\boldsymbol{p}$ und $\lambda\boldsymbol{p}$ den selben Punkt repräsentieren. Dies wird ausgedrückt durch die Schreibweise $\lambda\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{p}$. Alle Punkte auf dem durch $\boldsymbol{p}$ repräsentierten Strahl haben denselben Schnittpunkt mit der Ebene. Da $\lambda\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{p}$ gilt, wird die letzte Komponente des Vektors auch mit 1 normiert. Das heißt in der projektiven Ebene wird $(\lambda\boldsymbol{p})_3 = 1$, bzw. im projektiven Raum $(\lambda\boldsymbol{p})_4 = 1$ gesetzt. Diese Punkte werden dann auch als *homogene Punkte* bezeichnet.
Die Interpretation eines Punktes als Strahl wird in Abbildung 3 verdeutlicht. Im fol-

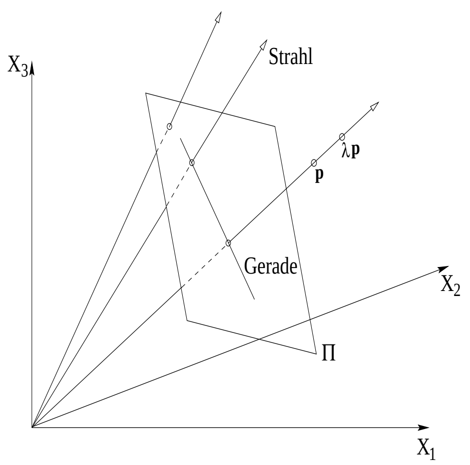



Abbildung 3: Ein Modell für die projektive Ebene kann über Strahlen im 3D-Raum konstruiert werden.

genden wird die spezielle Ebene $\Pi_e$ betrachtet, die im kartesischen Koordinatensystem senkrecht zur $X_3$-Achse ist und deren Abstand zum Ursprung 1 beträgt.
Der Schnittpunkt von $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und $\Pi_e$ ist $\begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ 1 \end{pmatrix}$. Da aus $(\lambda\boldsymbol{p})_3 = 1$, $\lambda = \frac{1}{z}$ folgt.

**Projektive Gerade**

Die Koordinatenrepräsentation einer Geraden in der projektiven Ebene wird von der Repräsentation einer Ebene durch den Ursprung abgeleitet. Eine projektive Gerade entsteht durch den Schnitt einer Ebene $\boldsymbol{u}$ mit $\Pi_e$. Die Gleichung einer Ebene durch den Ursprung ist gegeben durch $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Die Ebene wird über einen Vektor $\boldsymbol{u}$ repräsentiert und entspricht dabei den homogenen Koordinaten der projektiven Geraden. Die projektive Gleichung einer Geraden kann wie folgt dargestellt werden: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u} = 0$. Analog zu Punkten gilt $\lambda\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{u}$, da $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u} = 0 \Leftrightarrow \lambda\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u} = 0 \quad (\lambda \neq 0)$.
In kartesischen Koordinaten ist die Gleichung einer Geraden $n_x x + n_y y - d = 0$. Dabei ist $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y)$ die Normale der Geraden und $d$ der Abstand zum Ursprung. Nun kann man das Verhältnis von kartesischen Geradenparametern zu homogenen Geradenkoeffizienten für $u_3 \neq 0$ herstellen: $n_x := -d\frac{u_1}{u_3}$und $n_y := -d\frac{u_2}{u_3}$. Dies folgt sofort aus folgenden

Umformungen:

$$u_1x + u_2y + u_3 = 0 \Leftrightarrow \tag{2.95}$$

$$\frac{u_1}{u_3}x + \frac{u_2}{u_3}y + 1 = 0 \Leftrightarrow \tag{2.96}$$

$$-d\frac{u_1}{u_3}x - d\frac{u_2}{u_3}y - d = 0 \Leftrightarrow \tag{2.97}$$

$$n_x x + n_y y - d = 0. \tag{2.98}$$

Für einen Punkt $\boldsymbol{p}^\nu$ im Unendlichen, also einem Idealpunkt, gilt $x_3 = 0$. D.h. $\boldsymbol{p}^\nu$ hat die Gestalt $\boldsymbol{p}^\nu = \begin{pmatrix} p_1^\nu \\ p_2^\nu \\ 0 \end{pmatrix}$. Weiter gilt: Die Gerade durch zwei Punkte $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{p'}$ auf einer Ebene wird durch das Kreuzprodukt der beiden gegebenen Punkte $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{p'}$ beschrieben ([28, 8]).

**Projektive Transformation**

Die allgemeine Transformation eines Punktes $\boldsymbol{X}$ einer Ebene $\Pi$ in einen anderen Punkt $\boldsymbol{x}$ einer Ebene $\pi$ wird repräsentiert durch

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}, \tag{2.99}$$

oder $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{X}$. Weiter gilt:

$$x = \frac{x_1}{x_3} = \frac{t_{11}X + t_{12}Y + t_{13}1}{t_{31}X + t_{32}Y + t_{33}1} = \frac{\left(T\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}\right)_1}{\left(T\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}\right)_3} \tag{2.100}$$

und

$$y = \frac{x_2}{x_3} = \frac{t_{21}X + t_{22}Y + t_{23}1}{t_{31}X + t_{32}Y + t_{33}1} = \frac{\left(T\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}\right)_2}{\left(T\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}\right)_3}. \tag{2.101}$$

Da ein Skalierungsfaktor $\lambda$ in (2.100), (2.101) herausfällt, ist $T$ bis auf einen skalaren Faktor $\lambda$ definiert, d.h. $T \sim \lambda T$. Deshalb kann $T$ immer auf $t_{33} = 1$ normiert werden.

Für Geraden kann diese Transformation analog durchgeführt werden:
Ausgehend von $U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{P} = 0$ ist für $\boldsymbol{p} = T\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P} = T^{-1}\boldsymbol{p}$. Andererseits gilt $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{p} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{U}^T T^{-1}\boldsymbol{p} = 0$. D.h. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}^T T^{-1}$.
Vier korrespondierende Punkte definieren eine projektive Transformation. Die Transformationsmatrix $T$ beinhaltet acht unterschiedliche Parameter, da $t_{33} = 1$. Da jeder Punkt der Ebene zwei Koordinatengleichungen erfüllt, werden vier Punktkorrespondenzen zwischen zwei projektiv transformierten Ebenen benötigt, um die Transformationsmatrix eindeutig zu beschreiben. Die korrespondierenden Punkte seien $(x_i, y_i) \sim (X_i, Y_i)$. Es wird ein lineares Gleichungssystem aufgestellt, welches folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1X_1 & -x_1Y_1 \\ 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & 1 & -y_1X_1 & -y_1Y_1 \\ X_2 & Y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2X_2 & -x_2Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & 1 & -y_2X_2 & -y_2Y_2 \\ X_3 & Y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_3X_3 & -x_3Y_3 \\ 0 & 0 & 0 & X_3 & Y_3 & 1 & -y_3X_3 & -y_3Y_3 \\ X_4 & Y_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_4X_4 & -x_4Y_4 \\ 0 & 0 & 0 & X_4 & Y_4 & 1 & -y_4X_4 & -y_4Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_{21} \\ t_{22} \\ t_{23} \\ t_{31} \\ t_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}. \tag{2.102}$$

Dann gilt z.B.:

$$x_1 = X_1t_{11} + Y_1t_{12} + t_{13} - x_1X_1t_{31} - x_1Y_1t_{32} \tag{2.103}$$
$$\Leftrightarrow X_1t_{11} + Y_1t_{12} + t_{13} = x_1(1 + X_1t_{31} + Y_1t_{32}) \tag{2.104}$$
$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{X_1t_{11} + Y_1t_{12} + t_{13}}{1 + X_1t_{31} + Y_1t_{32}}. \tag{2.105}$$

Also gilt $(x_i, y_i, 1)^T \sim T(X_i, Y_i, 1)^T$.

**Doppelverhältnis für Punkte und Geraden**

Ausgegangen wird von einer projektiven Geraden im $\mathbb{R}^2$. Ein Punkt in der projektiven Gerade hat die Darstellung $\boldsymbol{P_i} = (X_1^i, X_2^i)^T = \Lambda(X^i, 1)^T \sim (X^i, 1)^T$. Projektive Transformationen zwischen Geraden werden über $2 \times 2$-Matrizen $T$, $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{X}$ beschrieben. Das Doppelverhältnis von vier *kollinearen* Punkten $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4$ ist definiert durch $Cr(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4) = \frac{(X^3-X^1)(X^4-X^2)}{(X^3-X^2)(X^4-X^1)}$, wobei $X^1$, $X^2$, $X^3$, $X^4$ die korrespondierenden Positionen von jedem Punkt sind. Dabei steht $Cr(.)$ für den englischen Begriff für das Doppelverhältnis: *Crossratio*. Punkte heißen *kollinear*, wenn sie auf einer Geraden liegen. $(X^3 - X^1)$ ist die Distanz zwischen $\boldsymbol{P}_3$ und $\boldsymbol{P}_1$. Abbildung 4 verdeutlicht dies.

**Lemma 2.5** *Das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten ist unter projektiven Transformationen invariant.*

**Beweis :** Jeder Punkt einer Geraden in einer Ebene kann über zwei homogene Koordinaten repräsentiert werden: $\boldsymbol{P_i} = (X_1^i, X_2^i)^T \sim (X^i, 1)^T$. Die kartesische Position ist durch

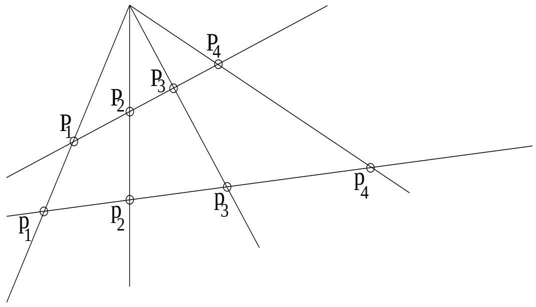



Abbildung 4: Verdeutlichung des Doppelverhältnisses.

$X^i = \frac{X_1^i}{X_2^i}$ gegeben. Dies ist analog zu einer Ebene, nur mit einer Dimension weniger. Die projektiven Transformationen zwischen Geraden werden über $2 \times 2$-Matrizen beschrieben: $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{X}$. Damit ergibt sich die Darstellung $x = \frac{x_1}{x_2} = \frac{t_{11}X + t_{12}}{t_{21}X + t_{22}}$. $D(1,2) = |[\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2]|$ bezeichne weiter die Determinante der Matrix, die durch die Punkte $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ gegeben ist. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
D(1,2) &= |[\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2]| && (2.106)\\
&= \begin{vmatrix} X_1^1 & X_1^2 \\ X_2^1 & X_2^2 \end{vmatrix} && (2.107)\\
&= X_1^1 X_2^2 - X_2^1 X_1^2 && (2.108)\\
&= X_2^1 X_2^2 \left( \frac{X_1^1}{X_2^1} - \frac{X_1^2}{X_2^2} \right) && (2.109)\\
&= X_2^1 X_2^2 (X^1 - X^2). && (2.110)
\end{aligned}
$$

Weiter ist $\boldsymbol{P_1} = X_2^1(X^1, 1) = \Lambda_1(X^1, 1)^T$ und $\boldsymbol{P_2} = X_2^2(X^2, 1) = \Lambda_2(X^2, 1)^T$, mit $\Lambda_i \in \mathbb{R}$. Sofort folgt dann $D(1,2) = \Lambda_1 \Lambda_2 (X^1 - X^2)$. $D(1,2)$ wird unter Projektion zu $d(1,2)$ transformiert, mit:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 \lambda_2 (x^1 - x^2) &= d(1,2) && (2.111)\\
&= |T([\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}])| && (2.112)\\
&= |T||[\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}]| && (2.113)\\
&= \Lambda_1 \Lambda_2 (X^1 - X^2)|T|. && (2.114)
\end{aligned}
$$

Dabei wird $\lambda_i = x_2^i$ analog zu vorher definiert. Weiter gilt:

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{D(31)}{D(32)} = \frac{|\boldsymbol{P_3}\boldsymbol{P_1}|}{|\boldsymbol{P_3}\boldsymbol{P_2}|} = \frac{\Lambda_1(X^3 - X^1)}{\Lambda_2(X^3 - X^2)} && (2.115)\\
&= \frac{\lambda_1(x^3 - x^1)}{\lambda_2(x^3 - x^2)} = \frac{|\boldsymbol{p_3}\boldsymbol{p_1}|}{|\boldsymbol{p_3}\boldsymbol{p_2}|} = \frac{d(31)}{d(32)} = r. && (2.116)
\end{aligned}
$$

Damit gilt insgesamt:

$$
\begin{aligned}
Cr(\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \boldsymbol{P_3}, \boldsymbol{P_4}) &= \frac{(X^3 - X^1)(X^4 - X^2)}{(X^3 - X^2)(X^4 - X^1)} && (2.117)\\
&= \frac{\Lambda_3\Lambda_1(X^3 - X^1)\Lambda_4\Lambda_2(X^4 - X^2)}{\Lambda_3\Lambda_2(X^3 - X^2)\Lambda_4\Lambda_1(X^4 - X^1)} && (2.118)\\
&= \frac{D(31)D(42)}{D(32)D(41)} = \frac{d(31)d(42)}{d(32)d(41)} && (2.119)\\
&= Cr(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3}, \boldsymbol{p_4}). && (2.120)
\end{aligned}
$$

**qed**

Für genauere Informationen sei auf die Literatur ([28]) verwiesen. Da Punkte und Geraden dual zueinander sind, existiert eine äquivalente Formulierung für Geraden. Dabei sind kollineare Punkte im Dualen Geraden, die sich in einem Punkt schneiden. Geraden die sich in einem Punkt schneiden werden auch als *concurrent* zueinander bezeichnet. Das Doppelverhältnis für Geraden ist also für vier Geraden definiert, die sich in einem Punkt schneiden. Jede Menge von Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, wird *Pencil*, oder Geradenbüschel genannt. Das Doppelverhältnis von einem Geradenbüschel kann in Form von Winkeln zwischen den Geraden formuliert werden: $Cr(\boldsymbol{U_1}, \boldsymbol{U_2}, \boldsymbol{U_3}, \boldsymbol{U_4}) = \frac{sin(\alpha_{13})sin(\alpha_{24})}{sin(\alpha_{23})sin(\alpha_{14})}$. Auch hier gelten die Invarianzeigenschaften bei Transformationen, was hier aber nicht bewiesen werden soll.

**Lemma 2.6** *Vorausgesetzt sei eine 3-Punktkorrespondenz* $\boldsymbol{p_i} \sim \boldsymbol{P_i}$ *zwischen zwei projektiven Transformationen einer Geraden. Für* $\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \boldsymbol{P_3}, \boldsymbol{X}$ *sei*
$Cr(\boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \boldsymbol{P_3}, \boldsymbol{X}) = Cr(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{p_3}, \boldsymbol{x}) = \tau.$
*Dann gilt: Der korrespondierende Punkt zu* $\boldsymbol{X}$ *hat die Gestalt:* $\boldsymbol{x} = \frac{x^2(x^3-x^1)-\tau(x^1(x^3-x^2))}{(x^3-x^1)-\tau(x^3-x^2)}$.

**Beweis :**

$$
\begin{aligned}
\tau &= \frac{(x^3 - x^1)(x - x^2)}{(x^3 - x^2)(x - x^1)} && (2.121)\\
\Leftrightarrow \tau(x^3 - x^2)x - (x^3 - x^2)\tau x^1 &= (x^3 - x^1)x - (x^3 - x^1)x^2 && (2.122)\\
\Leftrightarrow -(x^3 - x^2)\tau x^1 + (x^3 - x^1)x^2 &= (x^3 - x^1)x - \tau(x^3 - x^2)x && (2.123)\\
\Leftrightarrow \frac{-(x^3 - x^2)\tau x^1 + (x^3 - x^1)x^2}{(x^3 - x^1) - x^3\tau + x^2\tau} &= x. && (2.124)
\end{aligned}
$$

**qed**

**Kegelschnitte**

*Gerade Kreiskegel* zeichnen sich durch einen Kreis als Grundfläche und eine Spitze über dem Kreismittelpunkt aus. Wenn ein gerader Kreiskegel von einer Ebene geschnitten wird, dann entsteht auf ihr ein Kegelschnitt. Geht die schneidende Ebene nicht durch die Spitze, dann ergibt sich eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse in Abhängigkeit davon, ob die Ebene parallel zu zwei, nur einer, oder keiner Erzeugenden des Kegels verläuft.

**Definition 2.1** *Der folgende quadratisch homogene Ausdruck definiert eine Kegelschnitt-Kurve in der Ebene:*

$$0 = \boldsymbol{X}^T C \boldsymbol{X} \ , \ mit\ C \ = \ \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}. \tag{2.125}$$

Ein Kegelschnitt wird also über eine symmetrische Matrix $C$ beschrieben. Diese Matrix $C$ wird auch *Matrix eines Kegelschnittes* genannt. Die Kegelschnitt-Kurve erhält beim einsetzen auch folgende Form:
$0 = \boldsymbol{X}^T C \boldsymbol{X} = aX_1^2 + bX_1X_2 + cX_2^2 + dX_1X_3 + eX_2X_3 + fX_3^2 = 0$ Die projektive Transformation eines Kegelschnittes hat folgende Gestalt: Sei $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X} = T^{-1}\boldsymbol{x}$. Dann gilt
$0 = \boldsymbol{X}^T C \boldsymbol{X} = (T^{-1}\boldsymbol{x})^T C (T^{-1}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T T^{-T} C T^{-1} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T c \boldsymbol{x}$ mit $c = T^{-1}CT$. Dabei ist $c$ wieder symmetrisch: $c^T = T^{-T} C^T T^{-1} = T^{-T} C T^{-1} = c$. D.h. unter Projektion wird ein Kegelschnitt in einen Kegelschnitt transformiert.
Mit $S := T^{-1}$ ist $c = S^T C S$. Nach dem Hauptachsentransformationssatz ist $c$ äquivalent zu einer Diagonalmatrix der Gestalt $c' = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Wegen $\boldsymbol{x}^T c' \boldsymbol{x} = 0$, also $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0$ muß ein $\lambda_i$ negativ sein. So ergibt sich die Gestalt $c' = Diag(\alpha^2, \beta^2, -\gamma^2)$. Mit einer geeigneten Transformation ergibt sich die Gestalt $s = Diag(1, 1, -1)$. Damit erhält man für die $x_3 = 1$-Ebene die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = 1$ und somit eine Kreisgleichung. Jeder Kegelschnitt kann also in einen Kreis transformiert werden.
Für Kapitel vier und fünf ist der *absolute Kegelschnitt* $\Omega_\infty$ fundamental:

**Definition 2.2** *Die folgenden Bedingungen definieren den absoluten Kegelschnitt $\Omega_\infty$: Ein Punkt $(X, Y, Z, T)^T$ auf dem absoluten Kegelschnitt erfüllt*

$$T = 0, \quad und \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

Der absolute Kegelschnitt besitzt als zugehörige Matrix $C$ die Idendität $I$. Die Bedingung $T = 0$ impliziert, daß der Punkt im Unendlichen ist, und für $X_1 = \frac{X}{Z}$ und $Y_1 = \frac{Y}{Z}$ ergibt sich die Kreisgleichung $X_1^2 + Y_1^2 = -1$, mit dem Radius $i = \sqrt{-1}$. Der absolute Kegelschnitt $\Omega_\infty$ ist also ein Kreis im Unendlichen mit dem Radius $i = \sqrt{-1}$. Für nähere Informationen zum absoluten Kegelschnitt wird auf die Literatur ([11, 26, 23]) verwiesen.

### 2.6.2 Projektive Geometrie in der Geometrischen Algebra

In diesem Abschnitt erfolgt zunächst eine allgemeine Einführung in die projektive Geometrie im Rahmen der Geometrischen Algebra. Dabei wird auf das *Dualitäts*prinzip eingegangen und es werden die Operatoren *Join* und *Meet* für die Algebra der Inzidenz mit Ihren Interpretationen eingeführt. Dann werden Kegelschnitte im Rahmen der Geometrischen Algebra definiert und das dort geltende Theorem von *Pascal* erklärt. Am

Schluß des Abschnitts wird die Modellierung des dreidimensionalen projektiven Raumes mittels der geometrischen Algebra $G_{1,3,0}$ vorgestellt. Die folgenden Betrachtungen basieren auf [20, 18].

**Einleitung**

Zum besseren Verständnis werden kurz einige Axiome der Geometrischen Algebra wiederholt. Vorausgesetzt sei $V_n$, ein $n$-dimensionaler Vektorraum mit Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V_n$. Das nichtkommutative geometrische Produkt $\boldsymbol{ab}$ erfülle folgende Axiome:

1. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}) = (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$ (Assoziativität)

2. $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{bc}$ (Distributivität von links)

3. $(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{ba} + \boldsymbol{ca}$ (Distributivität von rechts)

4. $\boldsymbol{a}\lambda = \lambda\boldsymbol{a}$ (Kommutativität mit Skalar)

5. $\boldsymbol{a}^2 = \pm|\boldsymbol{a}|^2$ (Kontraktion)

Es ist zu beachten, daß diesmal keine degenerierten Basisvektoren zugelassen werden, die zu 0 quadrieren. Weiter ist $\boldsymbol{ab} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$.
Das äußere Produkt von $\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_k}$ kann als der $k$-Vektoranteil des geometrischen Produktes beschrieben werden: $\langle \boldsymbol{a_1 a_2}, ..., \boldsymbol{a_k} \rangle_k = \boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2} \wedge \boldsymbol{a_3} \wedge ... \wedge \boldsymbol{a_k}$. Allgemein können Multivektoren über eine Linearkombination der $k$-Vektoren beschrieben werden: $\sum_{k=0}^{n} \langle \boldsymbol{M} \rangle_k$. Es gilt weiter: $\boldsymbol{A}^2 = \langle \boldsymbol{A}^2 \rangle$ und das Pseudoskalar $\boldsymbol{I}$ der Geometrischen Algebra $G_n = G_{p,q}$ erfüllt $\boldsymbol{I}\tilde{\boldsymbol{I}} = (-1)^q |\boldsymbol{I}|^2$, wobei $p$ Basisvektoren zu 1 und $q$ Basisvektoren zu $-1$ quadrieren. Die Größe eines Pseudoskalars von $\boldsymbol{P} = \alpha\boldsymbol{I}$ relativ zu $\boldsymbol{I}$ wird *Bracket* von $\boldsymbol{P}$ genannt und mit $[\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{PI}^{-1} = \alpha$ beschrieben. Dadurch folgt $[\boldsymbol{I}] = \boldsymbol{II}^{-1} = 1$. Weiter wird $[\boldsymbol{a_1 a_2} ... \boldsymbol{a_n}] \equiv [\boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2} \wedge ... \wedge \boldsymbol{a_n}] = (\boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2} \wedge ... \wedge \boldsymbol{a_n})\boldsymbol{I}^{-1}$ definiert.

**Lemma 2.7** *Für Vektoren $\boldsymbol{a_1 a_2} ... \boldsymbol{a_n}$ eines $n$-dimensionalen Vektorraums entspricht $[\boldsymbol{a_1 a_2} ... \boldsymbol{a_n}]$ dem Wert der Determinante der durch $(\boldsymbol{a_1 a_2} ... \boldsymbol{a_n})$ beschriebenen Matrix.*

**Beweis:** Es wird die Leibnitzsche Determinantenformel verwendet:

$$[\boldsymbol{a_1 a_2} ... \boldsymbol{a_n}] \tag{2.126}$$
$$= \langle \boldsymbol{a_1 a_2} ... \boldsymbol{a_n} \rangle_n \boldsymbol{I}^{-1} \tag{2.127}$$
$$= \langle (a_{11}\sigma_1 + a_{21}\sigma_2 \dots a_{n1}\sigma_n)(a_{12}\sigma_1 + a_{22}\sigma_2 \dots a_{n2}\sigma_n) \dots (a_{1n}\sigma_1 + a_{2n}\sigma_2 \dots a_{nn}\sigma_n) \rangle_n \boldsymbol{I}^{-1} \tag{2.128}$$
$$= \sum_{\pi \in S(n)} sgn(\pi) a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} \tag{2.129}$$
$$= det(\boldsymbol{a_1} \dots \boldsymbol{a_n}). \tag{2.130}$$

Dabei ist $S(n)$ die Menge aller Permutationen von $(1, ..., n)$. **qed**
Für die Multivektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ von Stufe $r$ und $s$ gilt:

$$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{AB} \rangle_{r+s} = (-1)^{rs} \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{A} \quad \text{und} \tag{2.131}$$
$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{AB} \rangle_{|r-s|} = (-1)^{r(s-r)} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \quad (s \geq r). \tag{2.132}$$

Daraus folgt, daß für einen Vektor $\boldsymbol{a}$ und Multivektor $\boldsymbol{B}$ gilt:
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{aB} \rangle_{s-1} = (-1)^{(s-1)} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{aB} \rangle_{s+1} = (-1)^s \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{aB} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{B}$.

**Dualität**
Das *Dual* $\tilde{\boldsymbol{A}}$ eines $r$-Blades $\boldsymbol{A}$ bezüglich $\boldsymbol{I}$ wird durch

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}^{-1} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I}^{-1} = (-1)^{r(n-r)} \boldsymbol{I}^{-1} \boldsymbol{A} \tag{2.133}$$

definiert. Das Dual eines $r$-Blades ist also ein $(n-r)$-Blade. Weiter gilt für ein $r$-Blade $\boldsymbol{A}$ und ein $s$-Blade $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{BI}) = (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})\boldsymbol{I} = (-1)^{s(n-s)} (\boldsymbol{AI}) \cdot \boldsymbol{B} \tag{2.134}$$
$$(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})^{\sim} = \boldsymbol{A} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} = (-1)^{s(n-s)} \tilde{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{B} \tag{2.135}$$
$$\boldsymbol{A} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} = \langle \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{B}} \rangle = [\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}] \equiv [\boldsymbol{AB}]. \tag{2.136}$$

Diese Regeln lassen sich leicht mit den Formeln (2.131) und (2.132) verifizieren.

**Das Kommutatorprodukt**
Das Kommutatorprodukt der Multivektoren $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ wird über das geometrische Produkt definiert:

$$\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{N} := \frac{1}{2}(\boldsymbol{MN} - \boldsymbol{NM}) = -\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{M}. \tag{2.137}$$

**Lemma 2.8** *Für Multivektoren* $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ *und* $\boldsymbol{N}$ *gilt:*
$\boldsymbol{L} \otimes (\boldsymbol{MN}) = (\boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{N} + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{N})$

**Beweis**

$$(\boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{M})\boldsymbol{N} + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{N}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{LM} - \boldsymbol{ML})\boldsymbol{N} + \boldsymbol{M}(\frac{1}{2}(\boldsymbol{LN} - \boldsymbol{NL})) \tag{2.138}$$
$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{LMN} - \boldsymbol{MLN} + \boldsymbol{MLN} - \boldsymbol{MNL}) \tag{2.139}$$
$$= \boldsymbol{L} \otimes (\boldsymbol{MN}). \tag{2.140}$$

**qed**
Analog zeigt man nach ([20]) die *Jacobiidendität*:

$$\boldsymbol{L} \otimes (\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{N}) = (\boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{M}) \otimes \boldsymbol{N} + \boldsymbol{M} \otimes (\boldsymbol{L} \otimes \boldsymbol{N}). \tag{2.141}$$

Für jeden Vektor $\boldsymbol{a}$ gilt: $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{B}$, falls $\boldsymbol{B}$ ein Blade ungeraden Grades ist und $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B}$, falls $\boldsymbol{B}$ ein Blade geraden Grades ist. Damit kann man für $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ und ein beliebiges Blade $\boldsymbol{B}$ vom Grad $\geq 2$ die Beschreibung der Jacobiidendität auf folgende Weise finden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{B}) \qquad (2.142) \\ &= \boldsymbol{b} \wedge (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{B}). \qquad (2.143) \end{aligned}$$

Hier müssen Formel (2.131), (2.132) und Lemma (2.8) angewendet werden. Der explizite Beweis erfolgt hier nicht, die wesentlichen Schritte sind der Literatur [20] zu entnehmen. Für drei Bivektoren kann weiter gezeigt werden:
$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \langle \boldsymbol{ABC} \rangle = \langle \boldsymbol{CAB} \rangle = (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B}$. Wenn man $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{c}'$ setzt, erhält man den Ausdruck

$$\langle \boldsymbol{ABC} \rangle = \langle \boldsymbol{AB}(\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{c}') \rangle = (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{c}') - (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{c}') \cdot (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{c}). \qquad (2.144)$$

Diese Zusammenhänge werden später in den Berechnungen zur projektiven Geometrie verwendet.

**Algebra der Inzidenz**

In der Algebra der Inzidenz werden in einem Vektorraum Operationen wie Vereinigung, Schnitt oder Komplement ähnlich wie in einer Boolschen Algebra zur Verfügung gestellt [37]. Zu jedem $r$-dimensionalen Unterraum $V_r \subset V_n$ existiert ein $r$-Blade $\boldsymbol{A} = \langle \boldsymbol{A} \rangle_r$, so daß $V_r$ die Menge der Lösungen von $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{A} = 0$ ist. D.h. $V_r = \{\boldsymbol{x} \in V_n | \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{A} = 0\}$. Dabei ist $\boldsymbol{A}$ bis auf einen Skalierungsfaktor eindeutig. Also generiert $V_r$ eine Geometrische Algebra $G_k$ mit $\boldsymbol{A}$ als Pseudoskalar. Für gegebene Blades $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ existiert ein Blade $\boldsymbol{C}$ mit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C}$.
Das *Join* von zwei Blades $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ wird durch $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$ definiert.
Für Blades $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ mit gemeinsamen Faktor wird das *Meet* $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ formal nach deMorgan definiert: $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})^{\sim} = \tilde{\boldsymbol{A}} \wedge \tilde{\boldsymbol{B}}$. Das Meet ist also das Dual des Joins. So erhält man folgende Berechnung für $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} = (\tilde{\boldsymbol{A}} \wedge \tilde{\boldsymbol{B}})\boldsymbol{I} = \tilde{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{B} = (-1)^{s(n-s)} \boldsymbol{A} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}}. \qquad (2.145)$$

**Lemma 2.9** *Seien* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *und* $\boldsymbol{C}$ *drei Blades. Dann gilt:*
$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C} = (\tilde{\boldsymbol{A}} \wedge \tilde{\boldsymbol{B}} \wedge \tilde{\boldsymbol{C}})\boldsymbol{I}$.

**Beweis**
$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C} = ((\tilde{\boldsymbol{A}} \wedge \tilde{\boldsymbol{B}})\boldsymbol{I} \vee \boldsymbol{C}) = ((\tilde{\boldsymbol{A}} \wedge \tilde{\boldsymbol{B}})^{\sim} \boldsymbol{I} \wedge \tilde{\boldsymbol{C}}) = ((\tilde{\boldsymbol{A}} \wedge \tilde{\boldsymbol{B}})\boldsymbol{I}\boldsymbol{I}^{-1} \wedge \tilde{\boldsymbol{C}})\boldsymbol{I} = (\tilde{\boldsymbol{A}} \wedge \tilde{\boldsymbol{B}} \wedge \tilde{\boldsymbol{C}})\boldsymbol{I}$.
**qed**
Für den Fall, daß $r = s = n - 1$ sind $\tilde{\boldsymbol{A}}$, $\tilde{\boldsymbol{B}}$ Vektoren und es gilt : $\tilde{\boldsymbol{A}} \wedge \tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{A}} \otimes \tilde{\boldsymbol{B}}$.

**Projektive Interpretation von Blades**

Voraussetzung sei die Standardinterpretation von Punkten im projektiven Raum $P_{n-1}$

durch Strahlen in $V_n$ (siehe Abbildung 3). Jeder Strahl genügt der Gleichung $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{p} = 0$, wobei $\boldsymbol{x} \in V_n$ und $\boldsymbol{p} \in V_n$ ein Vektor ungleich Null sei. Vektoren $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{q}$ werden als *identische* projektive Punkte in $P_{n-1}$ bezeichnet, falls $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} = 0$ also $\boldsymbol{pq} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$ ist. Jede projektive Gerade in $P_{n-1}$ ist die zweidimensionale Vektorlösung der Gleichung $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{A} = 0$ mit einem 2-Blade $\boldsymbol{A}$. D.h. jeder 2-Blade entspricht einer projektiven Geraden. Zwei Blades $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ sind identische Geraden, falls $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = 0$. Weiter repräsentieren 3-Blades projektive Ebenen und $(n-1)$-Blades Hyperebenen.
Relationen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen können durch verschiedene Produkte in der Geometrischen Algebra ausgedrückt werden:

1. Die Punkte $\boldsymbol{a} \in V_n$ und $\boldsymbol{b} \in V_n$ legen mit $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ eine eindeutige Gerade fest.

2. Der Punkt $\boldsymbol{p}$ liegt auf $\boldsymbol{A}$ genau dann, wenn $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{A} = 0$ ist. Der Join von $\boldsymbol{A}$ mit $\boldsymbol{p}$ ist $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}$.

3. Zwei Geraden $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ schneiden sich, falls $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = 0$ ist, und der Schnittpunkt ist für $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a}'$ und $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}'$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= (\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) = \tilde{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{B} && (2.146)\\ &= (\tilde{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{b}' - (\tilde{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{b}')\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{aa}'\boldsymbol{b}]\boldsymbol{b}' - [\boldsymbol{aa}'\boldsymbol{b}']\boldsymbol{b}. && (2.147) \end{aligned}$$

   Dabei ist letztere Gleichung interessant, die mit den folgenden Gleichungen verifiziert werden kann:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{aa}'\boldsymbol{b}]\boldsymbol{b}' &= [\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{b}]\boldsymbol{b}' = [\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{b}]\boldsymbol{b}' = (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{b})\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{b}' && (2.148)\\ &= (\boldsymbol{A} \cdot \tilde{\boldsymbol{b}})\boldsymbol{b}' = (\tilde{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{b}'. && (2.149) \end{aligned}$$

   Dabei wird in den letzten beiden Schritten Formel (2.135) ausgenutzt. Auf diese Weise kann man den Schnitt zweier Geraden über Brackets und damit über die Determinante beschreiben.

4. Drei Geraden sind *concurrent* genau dann, wenn sie sich in einem Punkt schneiden. Die Bedingung für die Concurrenz zweier Geraden $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ zu einer Gerade $\boldsymbol{C}$ lautet $(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{C} = 0$. In $P_2$ ist dies äquivalent zu $\langle \boldsymbol{ABC} \rangle = 0$.

5. Das äußere Produkt von drei nicht kollinearen Punkten $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ beschreibt eine Ebene: $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$. Diese Punkte sind die Schnittpunkte dreier koplanarer Geraden: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{J}$, mit $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{J}^{-1} = \frac{\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}}$, $\tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{J}^{-1}$, $\tilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{J}^{-1}$ jeweils dem Dual zu den drei Punkten in der Ebene. Der Schnitt der Geraden $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ wird wie folgt ausgedrückt: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{B} = (\tilde{\boldsymbol{C}} \wedge \tilde{\boldsymbol{B}})\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{A}$.

6. Der Schnitt zweier Ebenen liefert analog eine Schnittgerade.

**Lemma 2.10** *In $P_2$ gelten für $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, und $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ wie oben (Punkt 5), folgende Eigenschaften:*

1. $\boldsymbol{a} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{a} \cdot \tilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{b} \cdot \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{b} \cdot \tilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{c} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} = 0$

2. $\boldsymbol{a} \cdot \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{b} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{c} \cdot \tilde{\boldsymbol{C}} = 1.$

**Beweis:**
Zu 1:

$$\boldsymbol{a} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{a} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}}\right) = \boldsymbol{a} \cdot \left(\frac{\langle \boldsymbol{ca} \rangle_2 \boldsymbol{J}}{\boldsymbol{J}^2}\right) = \frac{1}{\boldsymbol{J}^2} \boldsymbol{a} \cdot (\langle \boldsymbol{caJ} \rangle_1) \tag{2.150}$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{J}^2}(\langle \boldsymbol{acaJ} \rangle_0) = \frac{1}{\boldsymbol{J}^2}(\langle -\boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{cJ} \rangle_0) = \frac{1}{\boldsymbol{J}^2} 0 = 0. \tag{2.151}$$

Da $\boldsymbol{a}^2 = \lambda$ ein Skalar ist, liefert $\boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{cJ}$ ein 2−Blade. Der Skalaranteil eines 2−Blades ist stets Null.
Zu 2:

$$\boldsymbol{a} \cdot \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{a} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}}\right) = \frac{1}{\boldsymbol{J}^2}(\boldsymbol{a} \cdot (\langle \boldsymbol{bc} \underbrace{\boldsymbol{J}}_{\langle \boldsymbol{abc} \rangle_3} \rangle_1)) = \frac{1}{\boldsymbol{J}^2}(\langle \boldsymbol{abcJ} \rangle_0) \tag{2.152}$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{J}^2}(\langle \langle \boldsymbol{abc} \rangle_3 \boldsymbol{J} \rangle_0) = \frac{1}{\boldsymbol{J}^2}(\boldsymbol{J}^2) = 1. \tag{2.153}$$

**qed**
Ähnlich kann man auch folgende Aussagen zeigen:

1. $\langle \boldsymbol{CBA} \rangle = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})^2 = \boldsymbol{J}^2$

2. $\tilde{\boldsymbol{C}} \wedge \tilde{\boldsymbol{B}} \wedge \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{J}^{-1}.$

**Kegelschnitte in der Geometrischen Algebra**
Eine Menge von Geraden in einer Ebene, die sich in einem Punkt schneiden, wird Geradenbüschel (*Pencil*) genannt. Zwei Geraden $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ genügen, um ein Geradenbüschel eindeutig zu beschreiben. Die Menge wird dann durch $\boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}$ für $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ beschrieben. Zwei Geradenbüschel $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{X'} = \boldsymbol{A'} + \mu \boldsymbol{B'}$ werden in einen projektiven Zusammenhang gebracht, indem sie in eine 1− zu 1−Korrespondenz angeordnet werden. Im folgenden gelte, daß $\boldsymbol{X}$ zu $\boldsymbol{X'}$ korrespondent sei, gdw. $\lambda = \mu$. In diesem Fall ist die Menge der Schnittpunkte von korrespondierenden Geraden ein Kegelschnitt. Für $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{L'} = \boldsymbol{A'} + \lambda \boldsymbol{B'}$, die sich in $\boldsymbol{x}$ schneiden, gilt:

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{A} + \lambda \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.154}$$

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{L'} = \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{A'} + \lambda \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{B'} = 0. \tag{2.155}$$

Dies liefert jeweils $\lambda = -\frac{\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{B}}$ bzw. $\lambda = -\frac{\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{A}'}{\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{B}'}$, und kreuzweise eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{B} = \boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{A} - \boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{B}(\frac{\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{A}'}{\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{B}'}) & (2.156)\\ \Leftrightarrow 0 &= (\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{B}') - (\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{A}'), & (2.157)\end{aligned}$$

und analog

$$0 = (\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{A}')(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{A})(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{B}'). \quad (2.158)$$

Elimination von $\lambda$ liefert also eine Gleichung zweiter Ordnung in $\boldsymbol{x}$. Eine Parametergleichung für einen Kegelschnitt ist gegeben durch:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B})\vee(\boldsymbol{A}'+\lambda\boldsymbol{B}') = \boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{A}' + \lambda(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{A}') + \lambda^2\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{B}'. \quad (2.159)$$

Sei

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}', & (2.160)\\ \boldsymbol{A}' &= \boldsymbol{a}'\wedge\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{a}'\wedge\boldsymbol{b}', & (2.161)\end{aligned}$$

so daß $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{b}'$. Setze $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{A}'$. Die Parametergleichung bekommt dann die Form

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{d} + \lambda^2\boldsymbol{b}' & (2.162)\\ \Leftrightarrow \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{A}' + \lambda(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{A}') + \lambda^2\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{B}'. & (2.163)\end{aligned}$$

Nach Formel (2.158) folgt mit (2.160) und (2.161) weiter, daß $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}'$ auf einem Kegelschnitt liegen. Für einen beliebigen Punkt $\boldsymbol{p}$ gilt für ein $\mu \neq 0$:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{A}')(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{A})(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{B}') &= 0 \Leftrightarrow & (2.164)\\ (\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{a}'\wedge\boldsymbol{b})(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}') - (\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{a}'\wedge\boldsymbol{b}') &= 0 \Leftrightarrow & (2.165)\\ [\boldsymbol{pab}][\boldsymbol{pa}'\boldsymbol{b}'] &= \mu[\boldsymbol{pab}'][\boldsymbol{pa}'\boldsymbol{b}]. & (2.166)\end{aligned}$$

D.h. für einen weiteren Punkt $\boldsymbol{c}'$ auf dem Kegelschnitt gilt

$$\mu = \frac{[\boldsymbol{c}'\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{c}'\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}']}{[\boldsymbol{c}'\boldsymbol{ab}'][\boldsymbol{c}'\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}]}. \quad (2.167)$$

Damit kann ein Kegelschnitt durch fünf Punkte eindeutig definiert werden und weiter liegt ein Punkt $\boldsymbol{c}$ auf dem Kegelschnitt gdw.

$$[\boldsymbol{abc}][\boldsymbol{ab}'\boldsymbol{c}'][\boldsymbol{a}'\boldsymbol{bc}'][\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}] - [\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}'][\boldsymbol{ab}'\boldsymbol{c}][\boldsymbol{a}'\boldsymbol{bc}][\boldsymbol{abc}'] = 0. \quad (2.168)$$

Für Kegelschnitte gilt insbesondere auch das folgende Theorem:

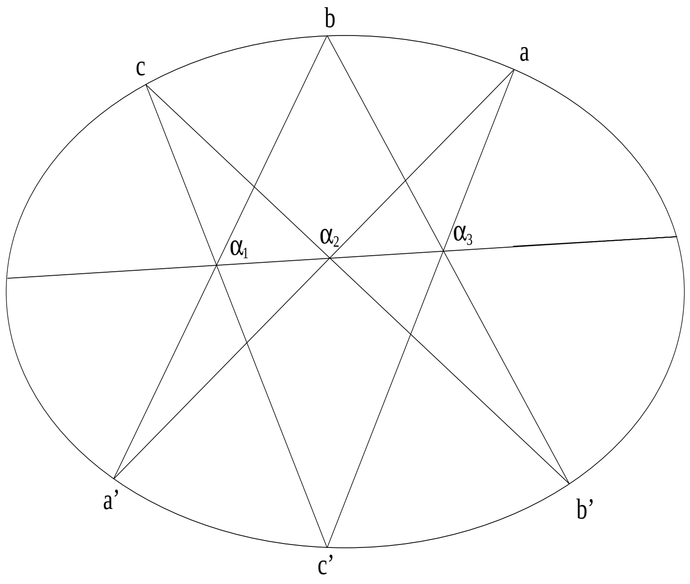



Abbildung 5: Skizze zum Theorem von Pascal. Die $\alpha_i$ liegen auf einer Geraden.

**Das Theorem von Pascal**

$$\underbrace{((\boldsymbol{a'} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{c'} \wedge \boldsymbol{c}))}_{\boldsymbol{\alpha_1}} \wedge \underbrace{((\boldsymbol{b'} \wedge \boldsymbol{c}) \vee (\boldsymbol{a'} \wedge \boldsymbol{a}))}_{\boldsymbol{\alpha_2}} \wedge \underbrace{((\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c'}) \vee (\boldsymbol{b'} \wedge \boldsymbol{b}))}_{\boldsymbol{\alpha_3}} = 0. \qquad (2.169)$$

Das Theorem besagt, daß die $\alpha_i$, die entsprechenden Schnittpunkte von Geraden, die durch die Punkte auf dem Kegelschnitt beschrieben werden, selbst auf einer Geraden liegen. Abbildung 5 verdeutlicht die Geometrie.

**Repräsentation des projektiven Raumes $P^3$ über $G_{1,3,0}$**

Wie in Abschnitt 2.4.1 erwähnt, kann der projektive Raum über $G_{1,3,0}$ repräsentiert werden. Man kann den vierten Basisvektor als die *gewählte Richtung* oder den *projektiven split* ([28, 5]) interpretieren. Analog zur vorher erarbeiteten Theorie gilt $(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})^\sim = \tilde{\boldsymbol{A}} \wedge \tilde{\boldsymbol{B}}$. Die Objekte des 3D-Raumes werden dabei wie gehabt modelliert:

1. Eine Gerade ist das äußere Produkt von zwei Punkten: $\boldsymbol{L_{12}} = \boldsymbol{x_1} \wedge \boldsymbol{x_2}$.

2. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L_{12}}$ erfüllt: $\boldsymbol{L_{12}} \wedge \boldsymbol{x} = 0$.

3. Eine Ebene ist das äußere Produkt von drei nicht collinearen Punkten: $\Phi_{123} = \boldsymbol{x_1} \wedge \boldsymbol{x_2} \wedge \boldsymbol{x_3}$.

4. Der Schnitt einer Geraden $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{x_1} \wedge \boldsymbol{x_2}$ mit einer Ebene $\Phi_{123} = \boldsymbol{y_1} \wedge \boldsymbol{y_2} \wedge \boldsymbol{y_3}$ ist gegeben durch $\boldsymbol{A} \vee \Phi_{123}$, und es ergibt sich:

$$\boldsymbol{A} \vee \Phi_{123} = [\boldsymbol{x_1 x_2 y_2 y_3}]\boldsymbol{y_1} + [\boldsymbol{x_1 x_2 y_3 y_1}]\boldsymbol{y_2} + [\boldsymbol{x_1 x_2 y_1 y_2}]\boldsymbol{y_3}. \qquad (2.170)$$

5. Der Schnitt von zwei Ebenen $\Phi_1 = \boldsymbol{x_1} \wedge \boldsymbol{x_2} \wedge \boldsymbol{x_3}$, $\Phi_2 = \boldsymbol{y_1} \wedge \boldsymbol{y_2} \wedge \boldsymbol{y_3}$ liefert eine Gerade:

$$\Phi_1 \wedge \Phi_2 \quad = \quad [\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y_1}](\boldsymbol{y_2} \wedge \boldsymbol{y_3}) + [\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y_2}](\boldsymbol{y_3} \wedge \boldsymbol{y_1}) + [\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y_3}](\boldsymbol{y_1} \wedge \boldsymbol{y_2}).$$

6. Der Schnitt von zwei Geraden $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{x_1} \wedge \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{y_1} \wedge \boldsymbol{y_2}$ existiert, falls $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = 0$ und ist gegeben durch

$$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \quad = \quad [\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y_1}]\boldsymbol{y_2} - [\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y_2}]\boldsymbol{y_1}. \tag{2.171}$$

Diese Eigenschaften sind aus der erarbeiteten Theorie schnell ersichtlich.

# 3 Das dreidimensionale Modell des Auges

In diesem Kapitel erfolgt zunächst eine Einführung in die Anatomie des Auges. Dann erfolgt die Abstraktion und Modellierung der Augenbewegungen, wobei eine schnelle Augenbewegung auch *Sakkade* genannt wird. Der Leser, der nur an den Verfahren zur Selbstkalibrierung und den Formulierungen in der Geometrischen Algebra interessiert ist, kann dieses Kapitel überspringen.
Im ersten Abschnitt erfolgt eine Einführung in die Anatomie des Auges. Im zweiten Abschnitt wird auf das Gesetz von *Listing* eingegangen und dieses im Rahmen der Geometrischen Algebra untersucht. Das Gesetz von Listing macht Aussagen über die Menge der Rotationsvektoren, die im menschlichen visuellen System eine Sakkade von einer Blickrichtung in eine beliebige andere Blickrichtung beschreiben. Diese Menge von Rotationsvektoren liegt in der Nähe einer Ebene, deren Lage von der Blickrichtung abhängt. Die in Experimenten entdeckte Gesetzmäßigkeit wurde von D. Hestenes ([19]) auf ein mathematisches Modell übertragen. Im Rahmen der Untersuchung dieses Modells wird eine explizite Funktion für die Lage der Ebene, in der sich die Rotationsvektoren befinden, angegeben. Bei der Untersuchung dieses Modells werden weiter neben Rotationen auch Translationen zugelassen. Dies kann unter geeigneten Voraussetzungen zur Einschätzung der externen Kameraparameter eines Binokularkopfes oder zur Sakkadenschätzung verwendet werden. Eine vollständige Übertragung des mathematischen Modells auf das anatomische Modell ist nur schwer möglich, da sich die Rotationsachsen beim menschlichen Auge während Rotationen translatorisch verschieben. Dies hat zur Folge, daß eine gekrümmte Fläche als Menge von Rotationsvektoren vorliegt. Dies motiviert die Vorstellung eines Modells zur Diskretisierung einer gekrümmten Fläche über Ebenensegmente, die über die Algebra der Motoren beschrieben werden. Zur Verdeutlichung der in den vorherigen Abschnitten berechneten Eigenschaften wurden am Ende des dritten Abschnitts Simulationen in MAPLE durchgeführt.

## 3.1 Anatomie des Auges

Es erfolgt eine kurze Einführung in die Anatomie des Auges, die sich auf die für diese Arbeit relevanten Inhalte beschränkt. Dazu gehört eine Beschreibung des Augapfels und die Darstellung der Muskeln, die an der Augenrotation beteiligt sind. Für nähere Informationen wird auf die Literatur ([30, 31, 13, 27]) verwiesen.

### 3.1.1 Der Augapfel

Die Abbildung 6 verdeutlicht den Aufbau des Augapfels. Der Augapfel (*Bulbus oculi*) ist in etwa kugelförmig und besitzt vorne eine lichtdurchlässige Hornhaut (*Cornea*), die einen größeren Krümmungsindex aufweist. Dahinter befindet sich die Iris, die durch Muskelkontraktion den Lichteinfluß verändern kann und, wie bei einer Kamera, die Funktion

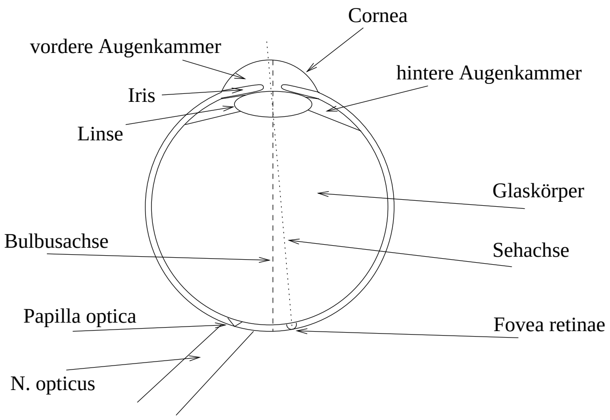



Abbildung 6: Anatomie des Augapfels.

einer Blende hat. Die dahinterliegende Linse bündelt das Licht. Das gebündelte Licht gelangt durch den lichtdurchlässigen Glaskörper zur *Retina*. Der Ort des schärfsten Sehens wird *fovea retinae* genannt. Die Wand des Augapfels besitzt mehrere Schichten. Die innerste wird auch *Retina* oder Netzhaut genannt. Hier befinden sich die Rezeptoren zur Lichtaufnahme, in denen einfallendes Licht in elektrische Impulse umgewandelt wird. Die Linse ist an sogenannten *Zonula*fasern aufgehängt, die mit dem *Cilear*muskel verbunden sind. Kontraktion des Muskels führt zu einer Abflachung der Linse, so daß parallel einfallendes Licht zur *Fovea retinae* gebündelt wird. Dies ist zum scharfen Sehen von Objekten in der Ferne nötig. Dilatation (Entspannung) des Muskels führt zu einer stärkeren Brechung des Lichts, so daß Objekte in der Nähe scharf gesehen werden können. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Nah- und Fernakkomodation. Das Auge selbst wird durch die Augenachse (*Axis bulbi*) geteilt. Seitlich davon verläßt der Sehnerv (*Nervus opticus*) den Bulbus.

### 3.1.2 Die äußeren Augenmuskeln

Die äußeren Augenmuskeln (vier gerade, zwei schräge) liegen im Fettkörper der Augenhöhle (*Orbita*) und dienen der Bewegung des Augapfels (*Bulbus oculi*). Die vier geraden Augenmuskeln (*M. rectus lateralis, medialis, superior, inferior*) haben in unterschiedlicher Entfernung vom Hornhautrand ihren Ansatz und verlaufen nach hinten (*dorsal*). Die schrägen Augenmuskeln ( *M. obliquus inferior, superior*) setzen hinter den Ansätzen der geraden Augenmuskeln an, verlaufen zunächst nach vorne durch einen knorpeligen Halbring, um dann nach hinten geführt zu werden. Abbildung 7 verdeutlicht die Muskelansätze des Auges. In Abbildung 7 r. geben die Pfeile die Richtung sowie durch ihre Länge die Kraft an, mit der ein einzelner Muskel den Bulbus bewegt. Alle sechs Muskeln haben eine rotierende aber auch leicht translatorische Wirkung auf den Bulbus. Das Auge kann vertikal, horizontal und torsional rotiert werden. Dabei

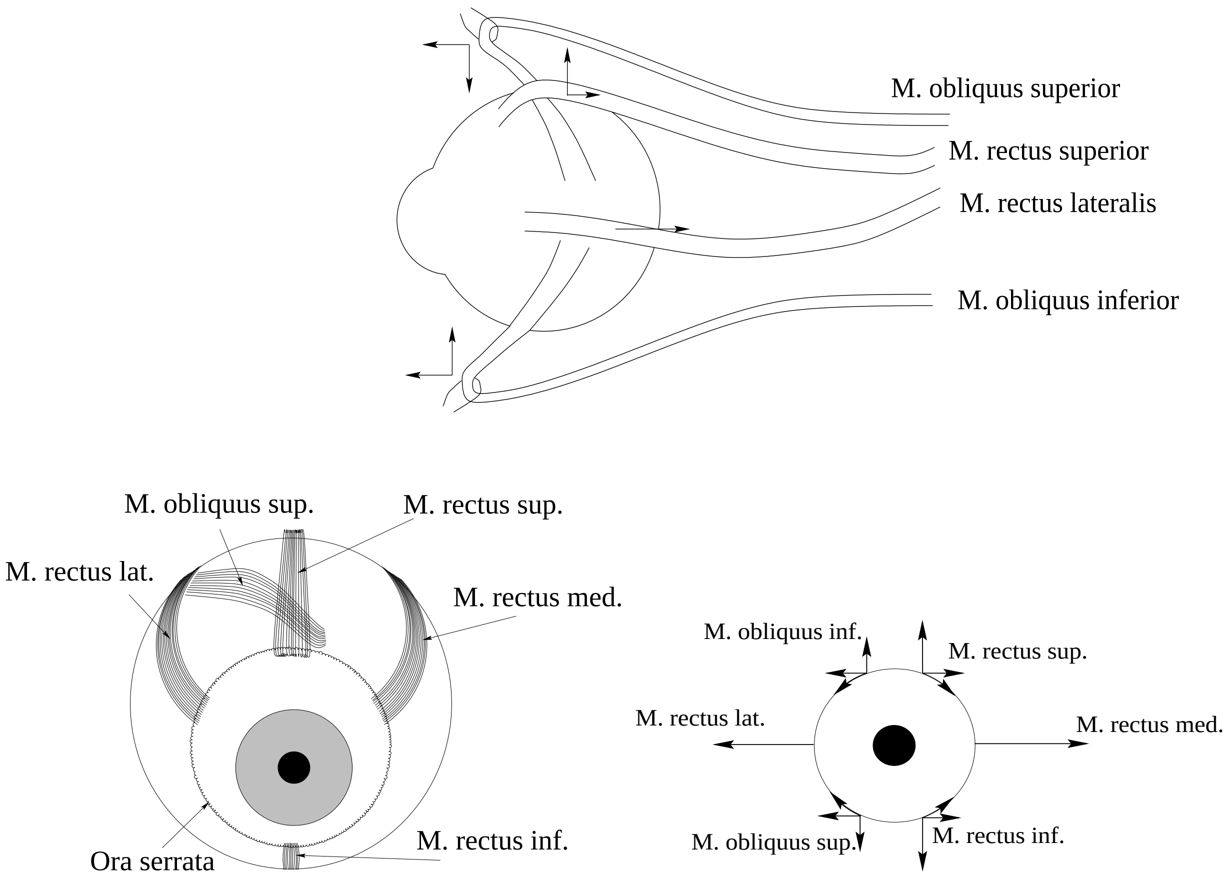



Abbildung 7: (o.) Lage der äußeren Augenmuskeln. (l.)Ansatz der äußeren Augenmuskeln am Augapfel. (r.) Wirkung der äußeren Augenmuskeln.

ist nie ein Muskel isoliert tätig; jede Augenbewegung erfolgt durch Kontraktion mehrerer Augenmuskeln, bei gleichzeitig *reziproker* Erschlaffung der *gegenspielenden* Muskeln (*Antagonisten*). Der Augapfel ist wie in einer kugeligen und mit einer Fettschicht versehenen Gelenkpfanne gelagert. Durch das Fettpolster und die Lage der Muskeln kommt es bei Muskelkontraktionen zu kleineren Verschiebungen des Rotationszentrums.

## 3.2 Abstraktion und Modellierung von Augenbewegungen

Um eine dreidimensionale Position zu beschreiben, gibt es zwei verschiedene Arten von Koordinatensystemen: Das am Kopf fixierte Koordinatensystem, auch Kopfkoordinatensystem genannt, und das an den Augen fixierte Koordinatensystem, auch Augenkoordinatensystem genannt. Das erste dient der Beschreibung relativ zu den Kopfkoordinaten, das zweite der Beschreibung relativ zu den Augenkoordinaten. Die beiden Koordinatensysteme werden analog zum Abschnitt 2.3.1 beschrieben. $\{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}\}$ sei die Basis für das Kopfkoordinatensystem und $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ die Basis für das Augenkoordinatensystem.

Weiter stimme $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ anfangs mit $\{\boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2}, \boldsymbol{h_3}\}$ überein. Bei einer Rotation dreht sich das Augenkoordinatensystem mit, das Kopfkoordinatensystem bleibt fest. In der Literatur wird eine Rotation im Kopfkoordinatensystem *aktive* und im Augenkoordinatensystem *passive* Rotation genannt. Abbildung 8 verdeutlicht die Ausgangssituation und die Veränderungen der Koordinatensysteme bei Rotationen. Die Muskeln sind dazu

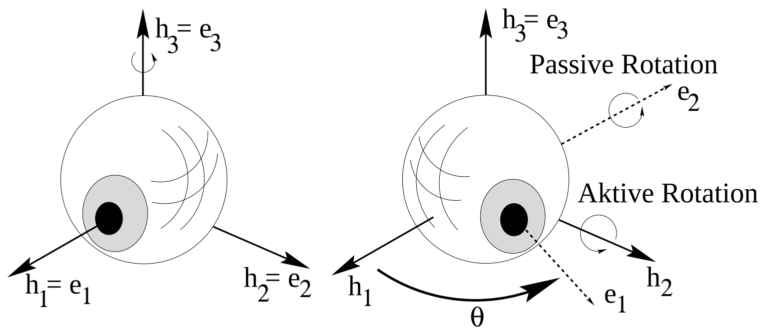



Abbildung 8: Bei einer Rotation bleibt das Kopfkoordinatensystem starr, das Augenkoordinatensystem bewegt sich mit.

in der Lage, das Auge entlang aller drei Achsen zu rotieren, insbesondere auch torsional. Es werden aber nicht alle theoretisch möglichen Rotationen des menschlichen Auges tatsächlich durchgeführt. Durch Versuche hat man eine Gesetzmäßigkeit festgestellt, die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

### 3.2.1 Das Gesetz von Listing

Zu dem Gesetz von Listing gibt es mehrere (äquivalente) Formulierungen, die hier im folgenden kurz vorgestellt werden:

1. Alle Rotationsvektoren[2], die eine dreidimensionale Augenbewegung charakterisieren, liegen *nahe* einer Ebene. Dabei gibt es eine eindeutige Blickrichtung, im folgenden *Startposition* genannt, bei der die Ebene senkrecht zur Blickrichtung ist ([17]).

2. Die Torsion (Rollstellung) eines Auges ist jeweils so, als wäre es auf dem kürzesten Weg (entlang einer *Geodäte*) von der *Startposition* in die gegenwärtige Position gedreht worden. Dies gilt auch für den Fall, daß eine Drehung nicht von der Startposition ausgeht. [3] ([24])

[2] Ein *Rotationsvektor* ist ein dreidimensionaler Vektor, der durch seine Lage die Rotationsachse beschreibt und dessen Länge proportional zum Rotationswinkel ist. Eine in Anlehnung an die Quaternionen übliche Kodierung von Rotationsvektoren ist Abschnitt 2.1, Formel (2.12) zu entnehmen.

[3] Sei $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{s}}$ die Achse der Startposition und $\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}}$ die Zielachse, so ist der kürzeste Weg die Drehung um eine Achse $\vec{\mathbf{d}}$ senkrecht zu beiden Vektoren. Die Rotation wird also durch eine Geodäte beschrieben.

3. Die Torsion einer beliebigen Augenposition ist stets die selbe wie bei einer Rotation von der *Startposition* in diese Augenposition, mit einer Rotationsachse aus einer festen Ebene senkrecht zu dieser Startposition. ([6])

Damit ergibt sich folgende Konsequenz: Die Sakkade von einer Blickrichtung, die nicht mit der Startposition übereinstimmt, wird nicht durch eine Geodäte beschrieben.
In Versuchen ([17, 32]) wurde festgestellt, daß diese Menge von Rotationsvektoren beim Menschen eine leichte Krümmung aufweist und keine exakte Ebene ist. Dies hängt vor allem damit zusammen, daß sich die Rotationsachsen im menschlichen System bei einer Rotation translativ ändern. So hat zum Beispiel eine Kontraktion des *M. rectus lateralis* (s. Abbildung 7 o.) nicht nur eine rotierende Wirkung auf den Bulbus, gleichzeitig wird der Bulbus translativ nach *hinten* gezogen ([32, 17, 35, 24]).
In der Robotik läßt sich das Gesetz von Listing anschaulich übertragen: Ausgegangen wird von einer Kamera mit einer *Vergenz*-Einheit für horizontale Rotationen und einer *Tilt*-Einheit für vertikale Rotationen. Die Kamera sei senkrecht zu den beiden Bewegungseinheiten angebracht und befindet sich damit in ihrer *Startposition*. Die Menge der Rotationsvektoren, um von dieser Blickrichtung zu einer beliebigen anderen zu gelangen. ist deshalb senkrecht zur Blickrichtung. Weiter kommen keine torsionalen Rotationen vor, so daß die Torsion einer beliebigen Kameraposition stets die selbe ist, wie bei einer Rotation von der *Startposition* in diese Blickrichtung. Also ist die Konstanz der Torsion einer bestimmten Blickrichtung erzwungen. Im menschlichen visuellen System ist das Gesetz von Listing ein Ergebnis neuronaler Kontrolle, das nicht immer gelten muß, wie Untersuchungen an schlafenden Patienten zeigen ([6]). Es gibt mehrere Erklärungsversuche für die Redundanz der Freiheitsgrade im menschlichen visuellen System. Eine mögliche Erklärung (Hering 1868) besagt, daß als Konsequenz vom Gesetz von Listing beim Betrachten einer Geraden diese auf die selbe Menge der Rezeptoren im Auge fällt, unabhängig von dem Punkt der Geraden, der fixiert wird. ([6]). Eine weitere Eigenschaft, die aus dem Gesetz von Listing folgt, ist daß Senkrechten im Raum zu Senkrechten im Bild abgebildet werden (Helmholtz 1867, [6]). Da eine aktuelle Augenposition unabhängig von vorherigen Augenpositionen ist, kann weiter eine gewisse Stabilität des Bildeindrucks zugrunde gelegt werden.
Diese Gesetzmäßigkeit soll nun auf ein mathematisches Modell übertragen werden. Die Blickrichtung wird dabei stets durch einen Einheitsvektor beschrieben. Im folgenden wird angenommen, daß in der *Startposition* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die Ebene orthogonal zur Blickrichtung ist. Das heißt zu der Blickrichtung $(1,0,0)^T$ sei Listings Ebene

$$\boldsymbol{dp} = \{(0,x,y)^T | x,y \in \mathbb{R}\}, \tag{3.1}$$

diese ist senkrecht zur Startposition.
Im biologischen System ist die Menge der Rotationsvektoren einer beliebigen Blickrich-

tung wieder in der Nähe einer Ebene. Diese Ebene hat die Eigenschaft, daß sie sich bei einer Augenrotation um $2\alpha$ um $\alpha$ mitdreht ([17, 35, 36]). Die Normale der Ebene liegt also genau zwischen der Startposition und der Blickrichtung. Diese Ebene wird dann *Verschiebungs Ebene* ([32]) genannt. Die Mitrotation der Verschiebungs Ebene um $\alpha$ bei einer Rotation um $2\alpha$ kann mathematisch folgendermaßen motiviert werden:

Es gelte die *Ausgangsstellung*: Listings Ebene sei orthogonal zur Blickrichtung. Da die Blickrichtung anfangs entlang der $\boldsymbol{h_1}$-Achse verläuft, hat die Ebene der Rotationsvektoren, im folgenden $\boldsymbol{dp}$ genannt, folgende Gestalt:

$$\boldsymbol{dp} = \{(0, x, y)^T | x, y \in \mathbb{R}\}. \tag{3.2}$$

Es wird eine Drehung um $2\alpha$, um die $\boldsymbol{h_3}$-Achse betrachtet. Für eine Drehung um $2\alpha$, um die $\boldsymbol{h_2}$-Achse verläuft die Argumentation analog. Der Rotationsvektor dieser Drehung um $2\alpha$ ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ tan(\alpha) \end{pmatrix}$ (siehe Abschnitt 2.3.1 und Formel (2.12)). Dabei erfolgt die Wahl des Rotationsvektors, nach dem Gesetz von Listing, aus der Ebene senkrecht zur Blickrichtung. Die um die $\boldsymbol{h_3}$-Achse mit dem Wert $\alpha$ gedrehte Ebene liefert:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin(\alpha)x \\ cos(\alpha)x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Damit ergibt sich die Ebene

$$\boldsymbol{dp_1} = \{(-sin(\alpha)x, cos(\alpha)x, y)^T | x, y \in \mathbb{R}\}. \tag{3.4}$$

Die Menge der Rotationsvektoren der Blickrichtung wird hier über die Hintereinanderausführung von Rotationsvektoren ermittelt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ tan(\alpha) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - (tan(\alpha)y)} \begin{pmatrix} -tan(\alpha)x \\ x \\ y + tan(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Es wird der Operator $\circ$ zur Berechnung der Hintereinanderausführung von Rotationsvektoren, Gleichung (2.29) aus Abschnitt 2.1, verwendet. Eine Vernachlässigung des Vorfaktors $\left(\overset{(1)}{\sim}\right)$ und die Substitution von $x$ durch $(cos(\alpha)x)$ und $y$ durch $(y - tan(\alpha))$ $\left(\overset{(2)}{\sim}\right)$ verändert die Ebene nicht:

$$\frac{1}{1 - (tan(\alpha)y)} \begin{pmatrix} -tan(\alpha)x \\ x \\ y + tan(\alpha) \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} -tan(\alpha)x \\ x \\ y + tan(\alpha) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

$$\overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -xcos(\alpha)tan(\alpha) \\ xcos(\alpha) \\ y + tan(\alpha) - tan(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin(\alpha)x \\ cos(\alpha)x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Damit ergibt sich die Ebene

$$\boldsymbol{dp_2} = \{(-sin(\alpha)x, cos(\alpha)x, y)^T | x, y \in \mathbb{R}\}. \tag{3.8}$$

Ein Vergleich von (3.4) mit (3.8) zeigt, daß wie gefordert eine Ebene vorliegt und diese um $\alpha$ gedreht wurde.

Diese Eigenschaft wurde erstmals in biologischen Versuchen festgestellt ([17, 32]) und kann so mathematisch nachvollzogen werden. D. Hestenes entwickelt in [19] ein Modell zur Beschreibung dieser Eigenschaft in der Geometrischen Algebra.
Eine Sakkade bezeichnet eine schnelle Augenbewegung, $\boldsymbol{c_s}$ bezeichne die Blickrichtung vor der Sakkade, die *Startposition*, die später mit dem Vektor $(1,0,0)^T$ beschrieben wird. Für jedes Ziel der Sakkade $\boldsymbol{b}$ wird

$$S = S(\boldsymbol{b}) = 1 + \boldsymbol{bc_s} = 1 + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c_s} + \boldsymbol{I}(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c_s}) \tag{3.9}$$

gesetzt. Hierbei wird Lemma 2.4 und die Gleichung (2.56) aus Abschnitt (2.3.1) ausgenutzt. Der Skalaranteil obiger Berechnung wird zunächst vernachläßigt. Die Sakkade von $\boldsymbol{c_s}$ nach $\boldsymbol{b}$ ist also explizit als algebraische Funktion angegeben. In dieser Formulierung ist die Menge der Rotationsvektoren senkrecht zur Blickrichtung.
$S(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ beschreibt eine allgemeine Sakkade von $\boldsymbol{a}$ nach $\boldsymbol{b}$. Die Sakkade von $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b}$ wird in diesem Modell über eine Rotation $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{c_s} \to \boldsymbol{b}$ beschrieben. Das heißt es muß gelten:

$$S(\boldsymbol{b}) = S(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})S(\boldsymbol{a}). \tag{3.10}$$

Dies ist die Formulierung des Gesetzes von Listing in der Geometrischen Algebra und $S(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ kann explizit berechnet werden. Diese Formel ist auch in der Literatur ([19]) zu finden, ebenso wie die folgende Umformung:

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) &= S(\boldsymbol{b})S(\boldsymbol{a})^{-1} && (3.11) \\ &= S(\boldsymbol{b})\tilde{S}(\boldsymbol{a}) && (3.12) \\ &= (1 + \boldsymbol{bc_s})(1 + \boldsymbol{c_s a}) && (3.13) \\ &= (\boldsymbol{c_s} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c_s} + \boldsymbol{a}) = 1 + \boldsymbol{c_s a} + \boldsymbol{bc_s} + \boldsymbol{ba} && (3.14) \\ &= (1 + \boldsymbol{c_s} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c_s} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{I}((\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c_s} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) && (3.15) \end{aligned}$$

Als nächstes wird der Vektoranteil von dem obigen Multivektor bezüglich dem Gesetz von Listing explizit untersucht.

Für die Referenzposition $\boldsymbol{c_s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich für ein festes $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und ein beliebiges $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$:

$$((\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c_s} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \tag{3.16}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \tag{3.17}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a_3 - b_3 \\ -a_2 + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \tag{3.18}$$

$$\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3(b_1 + 1) - (a_1 + 1) b_3 \\ (1 + a_1) b_2 - a_2(b_1 + 1) \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

In Matrixschreibweise läßt sich die Abbildung wie folgt ausdrücken:

$$P(\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & -(a_1 + 1) & a_3 \\ -a_2 & (a_1 + 1) & 0 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Da eine $3 \times 4$-Matrix vorliegt, ist der Rang der Abbildung kleiner oder gleich drei. Weiter stimmt die erste Spalte mit der vierten Spalte überein und die Vektoren in den ersten drei Spalten sind linear abhängig, da für $b_3 = \frac{-a_3 b_1}{a_1+1}$ und $b_2 = -\frac{a_2 b_1}{a_1+1}$ gilt :

$$\begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 + 1 \end{pmatrix} b_2 + \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 - 1 \\ 0 \end{pmatrix} b_3 = \tag{3.21}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a_3 a_2 b_1}{a_1+1} \\ 0 \\ -a_2 b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a_2 a_3 b_1}{a_1+1} \\ a_3 b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix} b_1. \tag{3.22}$$

Das heißt die Abbildung beschreibt eine Ebene durch den Ursprung und man erhält eine Ebenengleichung der Gestalt: $\boldsymbol{E} = \{\lambda_1 \boldsymbol{r_1} + \lambda_2 \boldsymbol{r_2} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$, mit $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$ geeigneten Richtungsvektoren. Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen der Matrix bestätigen (i.a.) den Rang zwei der Abbildung :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & -(a_1+1) & a_3 \\ -a_2 & (a_1+1) & 0 & -a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \tag{3.23}$$

$$\begin{pmatrix} a_3 & 0 & -(a_1+1) & a_3 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ -a_2 & (a_1+1) & 0 & -a_2 \end{pmatrix} \rightarrow \tag{3.24}$$

$$\begin{pmatrix} a_3 & 0 & -(a_1+1) & a_3 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & (a_1+1) & \frac{-a_2(a_1+1)}{a_3} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \tag{3.25}$$

$$\begin{pmatrix} a_3 & 0 & -(a_1+1) & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \tag{3.26}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.27}$$

Damit läßt sich für dieses Modell sagen, daß die Menge der Rotationsvektoren, um von $\boldsymbol{a}$ nach $\boldsymbol{b}$ zu gelangen, nicht nahe einer Ebene liegen, sie sind eine Ebene. Diese Ebene ist direkt über eine lineare Abbildung (Formel 3.20) berechenbar und besitzt, im Gegensatz zu Versuchsergebnissen aus der Biologie, keine Krümmung. Zur Verdeutlichung dieser Eigenschaften wurde eine Simulation in MAPLE geschrieben, die diese Tatsachen bestätigt. Die Ergebnisse dazu sind dem nächsten Abschnitt zu entnehmen.

### 3.2.2 Verallgemeinerung des Gesetzes von Listing

Als Verallgemeinerung des Gesetzes von Listing wird im folgenden auch die Verschiebung der Ebene zugelassen und somit der Übergang von dem Gesetz von Listing in einem Augenkoordinatensystem zu dem Gesetz von Listing in einem Weltkoordinatensystem vollzogen. Eine zusätzliche Translation $\boldsymbol{t}$ führt zu einer Verschiebung der Ebene: Bei der Startposition $\boldsymbol{c_s} = (1,0,0)^T$, der Listings Ebene $\boldsymbol{dp} = \{(0,x,y)^T | x,y \in \mathbb{R}\}$ und einer Rotationsmatrix $\Re$ erhält man mit einer zusätzlichen Verschiebung $\boldsymbol{t} = (t_1,t_2,t_3)^T$

$$\Phi = \{\Re(0,x,y)^T + (t_1,t_2,t_3)^T | x,y \in \mathbb{R}\}. \tag{3.28}$$

Es ist offensichtlich, daß diese nichtlineare Abbildung bei Hintereinanderausführungen zu Unübersichtlichkeiten führt. Seien $\Re'$ und $\Re$ Rotationsmatrizen und $\boldsymbol{t'}$, $\boldsymbol{t}$ Translationsvektoren. Dann ergibt sich:

$$\boldsymbol{x''} = \Re'\boldsymbol{x'} + \boldsymbol{t'} = \Re'(\Re\boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}) + \boldsymbol{t'} = \Re'\Re\boldsymbol{x} + \Re'\boldsymbol{t} + \boldsymbol{t'}. \tag{3.29}$$

Bei der Betrachtung mehrerer Listings Ebenen, wie zum Beispiel bei einem Binokularkopf, wo jede Kamera mit einer eigenen *Tilt-Vergenz*-Einheit ausgestattet ist, ist die Einführung der Translation ebenfalls wichtig. Eine geeignete Repräsentation dieser Ebenen mit ihren Verschiebungen bietet die Algebra der Motoren aus Abschnitt 2.5. Die Hintereinanderausführung von Rotationen und Translationen läßt sich, über geeignete Motoren $\boldsymbol{T'}$, $\boldsymbol{R'}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{R}$ im Vergleich zu Formel (3.29) wesentlich kompakter beschreiben:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}'') \;=\; \boldsymbol{T'R'}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}'))\tilde{\boldsymbol{R}}'\boldsymbol{T}' = (\boldsymbol{T'R'TR})(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))(\tilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{R}}'\boldsymbol{T}') \tag{3.30}$$

In der Algebra der Motoren ist sowohl die Translation als auch die Rotation eine lineare Abbildung.
Im folgenden wird angenommen, daß die zwei Kameras eines Binokularkopfes parallel zueinander angeordnet und lediglich verschoben zueinander sind. Weiter seien die Kameras in ihrer Startposition, so daß die Menge der Rotationsvektoren zur Bewegung der Kameras orthogonal zur Startposition sei. Da die Kameras parallel zueinander angeordnet sind hat dies zur Folge, daß die Listings Ebenen der Kameras parallel zueinander sind. Wenn die *linke* Kamera eine Sakkade um $2\alpha$ ausführt rotiert die Ebene um $\alpha$ mit. Damit stehen die Ebenen der Kameras unabhängig von der Verschiebung zwischen den Kameras mit einem Winkel von $\alpha$ zueinander und *zwischen* den Kameras ist das Gesetz von Listing anwendbar: Die Rotation zwischen den Kameras ist stets in einer Ebene zu suchen. Abbildung 9 verdeutlicht dies. Bei der Ermittlung der Rotation zwischen den

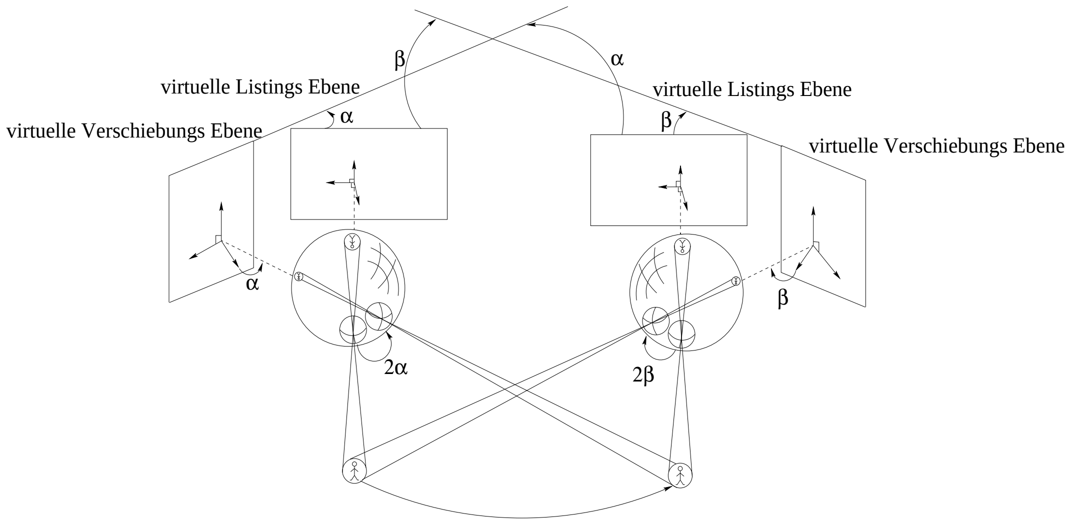



Abbildung 9: Skizze zur Verdeutlichung der Listings Ebenen bei einem Binokularkopf während einer Sakkade. Da zwischen den Augen lediglich eine Translation und keine Rotation stattfindet, liegen die Listings Ebenen parallel zueinander. Damit stehen die Verschiebungs Ebenen stets im selben Winkel zu den Listings Ebenen.

Kameras können die Freiheitsgrade der Rotation von einem dreidimensionalen Problem auf ein zweidimensionales Problem reduziert werden.
Bei einer *klassischen Stereokamerakopfanordnung* sind beide Kameras auf einer gemeinsamen *Tilt*-Einheit befestigt und besitzen jeweils eine eigene *Vergenz*-Einheit. Diese spezielle Anordnung der Kameras ist anders als in einem biologischen System, da in einem biologischen System jedes Auge eine eigene *Tilt-Vergenz*-Einheit besitzt. Bei einer klassischen Stereokamerakopfanordnung ist es möglich, die Menge der Rotationsvektoren zwischen den Kameras um eine weitere Dimension zu reduzieren, da die Rotationen stets entlang einer Achse, der *Vergenz*-Achse, ausgeführt werden. Das Gesetz von Listing ist nicht anwendbar.

### 3.2.3 Deformationen der Listings Ebene

In der Literatur ([32]) wurde in Versuchen von Y.Suzuki, D.Straumann, B.J.Hess und V. Henn festgestellt, daß die Menge der Rotationsvektoren von einer Blickrichtung aus eine gekrümmte Ebene beschreibt. Dies liegt vor allem an anatomischen Eigenschaften des Auges. Die bisherige Anfangsannahme war, daß während der Sakkade die Rotationsachsen fest sind. Dies ist bei einem Auge nicht immer der Fall. Eine Kontraktion eines Muskels hat nicht nur eine Rotation zur Folge, sondern auch eine Translation z.B. in *dorsaler*, also rückenwärts gerichteter Richtung. Dies führt zu einer Verschiebung der kompletten Sehachse, wodurch die Krümmung hervorgerufen werden kann. Diese Verschiebung beträgt bis zu drei Milimeter ([13, 24]). Genauso kann es durch die schrägen Augenmuskeln (*M. obliquus*) zu leichten torsionalen Rotationen kommen. Diese leichten torsionalen Rotationen sind auch Abbildung 7 (r.) zu entnehmen. Bei der Modellierung der Blickrichtung über einen Einheitsvektor macht sich eine torsionale Rotation nicht bemerkbar, da sie die Blickrichtung nicht ändert. Hier muß durch entsprechende Formulierungen wie in Formel (3.10) und (3.20) die Gültigkeit des Gesetzes von Listing erzwungen werden.
Die anatomisch bedingte Krümmung der Listings Ebene kann über eine diskrete Anzahl von Ebenensegmenten mit Ebenen aus der Algebra der Motoren, dargestellt werden. Voraussetzung ist, daß zu einem Abstand $\rho$ ein Winkel $\phi$ gegeben ist, der die entsprechende Krümmung der Ebene angibt. Da bei *kleinem* $\rho$ von einer Ebene ausgegangen wird, wird in der Algebra der Motoren ebenfalls von einer Ebene $\Phi_1 = \boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{I}d_1$ ausgegangen und das Ebenensegment mit Abstand $\rho$ zur Normalen der Ebene betrachtet. Abbildung 10 verdeutlicht die Ausgangssituation. Zu einem Abstand $\rho$ und einem Winkel $\phi$ wird nun die Ebene $\Phi_2$ gesucht. Dafür wird auf die Formeln zur Berechnung von schiefwinkligen ebenen Dreiecken zurückgegriffen: Bei gegebenen $(a, \alpha, \beta)$ wie in Abbildung 11 ergibt sich:

$$\gamma \;=\; 180 - \alpha - \beta \tag{3.31}$$

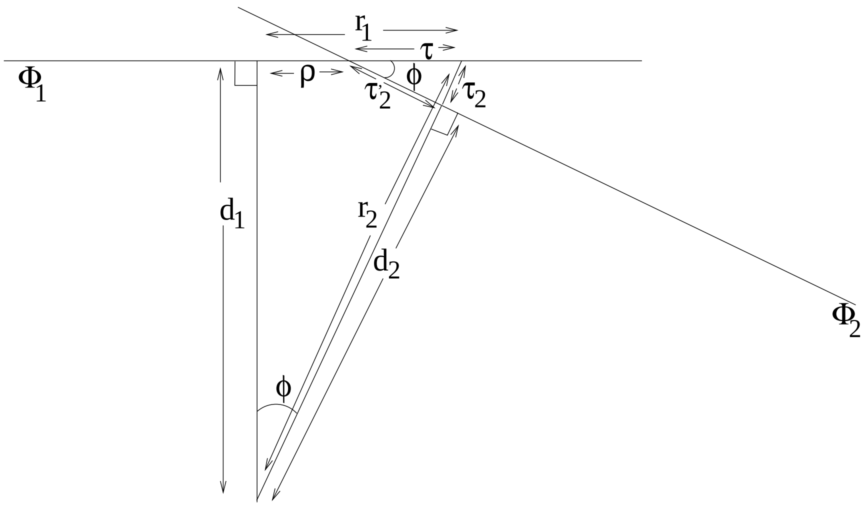



Abbildung 10: Parameter für die Berechnung der Ebene $\Phi_2$.

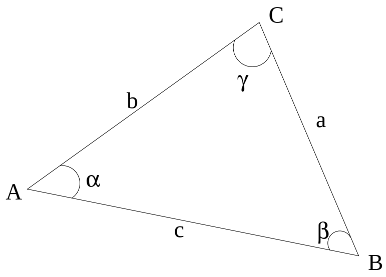



Abbildung 11: Parameter eines Dreiecks.

$$b = \frac{a \cdot sin(\beta)}{sin(\alpha)} \tag{3.32}$$

$$c = \frac{a \cdot sin(\gamma)}{sin(\alpha)}. \tag{3.33}$$

$\Phi_2 = \boldsymbol{n_2} + \boldsymbol{I}d_2$ läßt sich nun wie folgt berechnen.
Die Normale $\boldsymbol{n_2}$ ergibt sich durch einfache Rotation von $\boldsymbol{n_1}$ um $\phi$:

$$\boldsymbol{n_2} = \boldsymbol{R}_\phi \boldsymbol{n_1} \tilde{\boldsymbol{R}}_\phi \tag{3.34}$$

Die Länge $d_2$ läßt sich über eine Funktion $F(d_1, \rho, \phi)$ beschreiben, dafür wird zunächst das Dreieck $(d_1, r_1, r_2)$ aus Abbildung 10 betrachtet. In diesem Dreieck sind zwei Winkel bekannt: $\beta = \phi$ und $\alpha = 90 - \phi$.
Es ergibt sich mit den Formeln (3.31)-(3.33):

$$r_1 = b = \frac{a \cdot sin(\beta)}{sin(\alpha)} = \frac{d_1 \cdot sin(\phi)}{sin(90 - \phi)} \quad \text{und} \tag{3.35}$$

$$r_2 = \frac{d_1}{sin(90 - \phi)}. \tag{3.36}$$

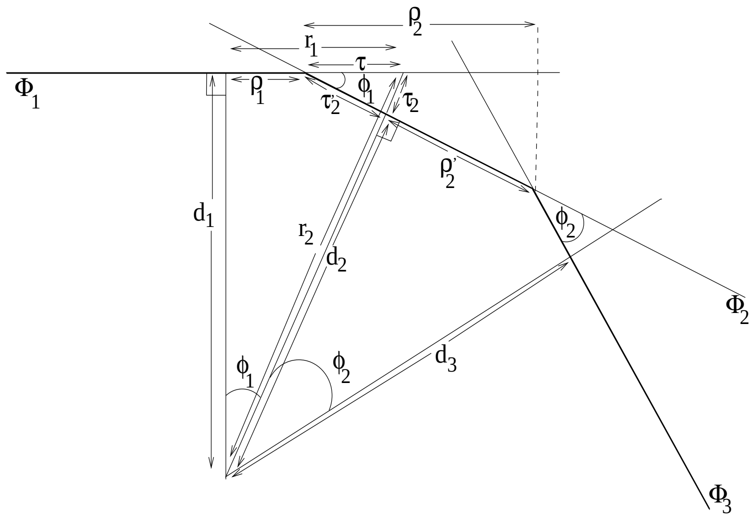



Abbildung 12: Parameter zur Fortführung der Diskretisierung.

Damit gilt:

$$\tau = r_1 - \rho = \frac{d_1 \cdot sin(\phi)}{sin(90 - \phi)} - \rho. \tag{3.37}$$

Als nächstes wird das Dreieck $(\tau, \tau_2', \tau_2)$ aus Abbildung 10 betrachtet. Analog zu vorher ergibt sich mit den Formeln (3.31)-(3.33):

$$\tau_2' = \tau \cdot sin(90 - \phi) \quad \text{und} \tag{3.38}$$
$$\tau_2 = \tau \cdot sin(\phi). \tag{3.39}$$

Also ist

$$d_2 = r_2 - \tau_2 = \frac{d_1}{sin(90 - \phi)} - (\frac{d_1 \cdot sin(\phi)}{sin(90 - \phi)} - \rho) \cdot sin(\phi) =: F(d_1, \rho, \phi). \tag{3.40}$$

Die Ebene $\Phi_2$ besitzt in der Algebra der Motoren folgende Darstellung:

$$\Phi_2 = \boldsymbol{n_2} + \boldsymbol{I} d_2 = \boldsymbol{R}_\phi \boldsymbol{n_1} \tilde{\boldsymbol{R}}_\phi + \boldsymbol{I} F(d_1, \rho, \phi). \tag{3.41}$$

Für ein weiteres Ebenensegment läßt sich dieses weiter fortführen, wie Abbildung 12 verdeutlicht.
Dafür muß $\rho_2'$ durch das durch $(\rho_2, \rho_2' + \tau_2', \phi_1)$ gegebene Dreieck berechnet werden. Es ergibt sich:

$$\rho_2' = \frac{\rho_2}{sin(90 - \phi_1)} - \tau_2' = \frac{\rho_2}{sin(90 - \phi_1)} - \tau sin(90 - \phi_1) \tag{3.42}$$
$$= \frac{\rho_2}{sin(90 - \phi_1)} - (\frac{d_1 sin(\phi_1)}{sin(90 - \phi_1)} - \rho_1) sin(90 - \phi_1). \tag{3.43}$$

Nun liegt mit $d_2$, $n_2$, $\rho_2'$, $\phi_2$ eine ähnliche Ausgangssituation wie vorher vor. Also ergibt sich:

$$\Phi_3 = \boldsymbol{n_3} + \boldsymbol{I}d_3 = \boldsymbol{R}_{\phi_2}\boldsymbol{n_2}\tilde{\boldsymbol{R}}_{\phi_2} + \boldsymbol{I}F(d_2, \rho_2', \phi_2). \tag{3.44}$$

Damit lassen sich die Ebenen iterieren:

$$\begin{aligned}
\rho < \rho_1 \rightarrow \Phi_1 &= \boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{I}d_1 & (3.45)\\
\rho_1 < \rho < \rho_1 + \rho_2 \rightarrow \Phi_2 &= \boldsymbol{R}_{\phi_1}\boldsymbol{n_1}\tilde{\boldsymbol{R}}_{\phi_1} + \boldsymbol{I}F(d_1, \rho, \phi_1) & (3.46)\\
\rho_1 + \rho_2 < \rho < \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \rightarrow \Phi_3 &= \boldsymbol{R}_{\phi_2}\boldsymbol{n_2}\tilde{\boldsymbol{R}}_{\phi_2} + \boldsymbol{I}F(d_2, \rho_2', \phi_2) & (3.47)\\
&\dots\\
\sum_{i=1}^{n}\rho_i < \rho < \sum_{i=1}^{n+1}\rho_i \rightarrow \Phi_{n+1} &= \boldsymbol{R}_{\phi_n}\boldsymbol{n_n}\tilde{\boldsymbol{R}}_{\phi_n} + \boldsymbol{I}F(d_n, \rho_n', \phi_n). & (3.48)
\end{aligned}$$

Auf diese Art läßt sich eine bei einer Blickrichtung vorliegende gekrümmte Listings Ebene über Ebenensegmente in der Algebra der Motoren diskretisieren. Abbildung 13 verdeutlicht das Zusammensetzen der gekrümmten Fläche aus einzelnen Ebenensegmenten. Dabei kann auch die Position der gekrümmten Ebene variiert werden.
Ein Vorteil der Diskretisierung einer gekrümmten Fläche über Ebenensegmente aus der Algebra der Motoren besteht darin, daß Transformationen wie Rotation oder Translation der gekrümmten Fläche leicht über die Transformationen der Ebenensegmente beschrieben weden können. Es wurde eine Simulation von $G^+_{3,0,1}$ in MAPLE programmiert. Dazu

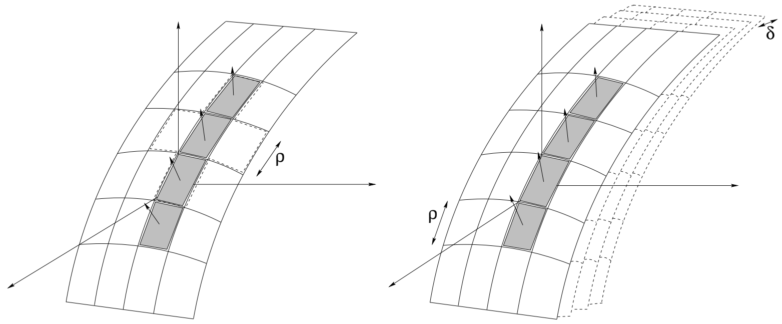



Abbildung 13: Diskretisierung der gekrümmten Fläche.

gehört auch ein Modul zur graphischen Darstellung von Ebenen in $G^+_{3,0,1}$. Dieses Modul wird nun anhand der Formeln zur Diskretisierung einer gekrümmten Fläche für ein Beispiel verwendet. Es wird von der Ebene $\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\boldsymbol{I}$ ausgegangen. Mit $\rho = 1$ und $\phi_1 = 17^o$, $\phi_2 = 13^o$, den Rotationsachsen $\boldsymbol{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergeben sich die folgenden Ebenen:

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} 0.95630 \\ 0 \\ 0.29237 \end{pmatrix} + 4.11759\boldsymbol{I}, \qquad \Phi_3 = \begin{pmatrix} 0.95630 \\ 0 \\ -0.29237 \end{pmatrix} + 4.11759\boldsymbol{I}, \tag{3.49}$$

$$\Phi_4 = \begin{pmatrix} 0.97437 \\ -0.22495 \\ 0 \end{pmatrix} + 4.12243\boldsymbol{I}, \qquad \Phi_5 = \begin{pmatrix} 0.97437 \\ 0.22495 \\ 0 \end{pmatrix} + 4.12243\boldsymbol{I}. \tag{3.50}$$

Die graphische Darstellung der Ebenen ist Abbildung 14 zu entnehmen.

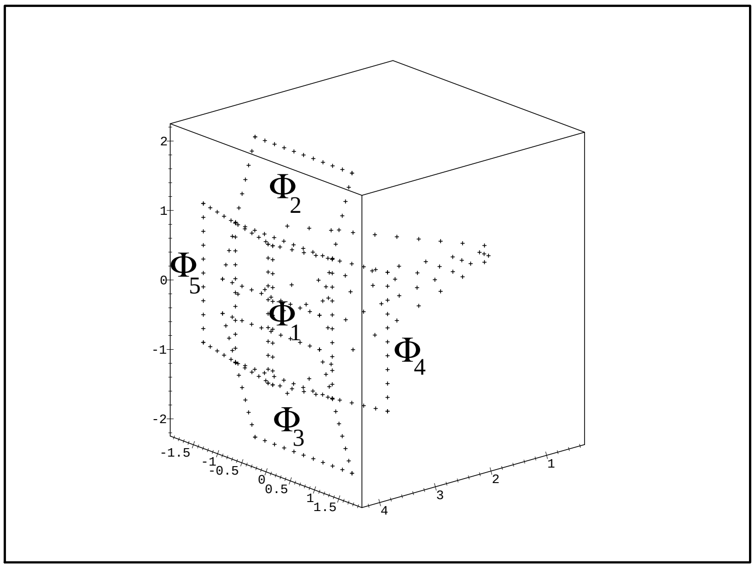



Abbildung 14: Diskretisierung einer gekrümmten Fläche über Ebenen.

## 3.3 Veranschaulichung des Gesetzes von Listing

Zur Verdeutlichung der im vorherigen Abschnitt berechneten Eigenschaften wurden Simulationen in MAPLE durchgeführt. Nach Gleichung (3.20) kann man für ein beliebiges $\boldsymbol{a}$ als Ausgangsblickrichtung und ein variables $\boldsymbol{b}$ eine Punktwolke berechnen und graphisch darstellen. Abbildung 15 zeigt die Ebene bei der Startposition $\boldsymbol{a} = (1,0,0)^T$. Die Ebene ist senkrecht zur Blickrichtung. In Abbildung 16 wurde die Blickrichtung um $64^o$ rotiert. Die Ebene dreht sich um die Hälfte mit. Die Blickrichung ist durch die durchgezogene *Gerade* (durch Punkte angedeutet) gekennzeichnet. Die Ausgangsrichtung ist die von der Ebene ausgehende *Gerade*. Die eingezeichnete Normale der Ebene, die Punkte senkrecht zur Ebene, zeigt, daß sich die Ebene um die Hälfte mitdreht. In Abbildung

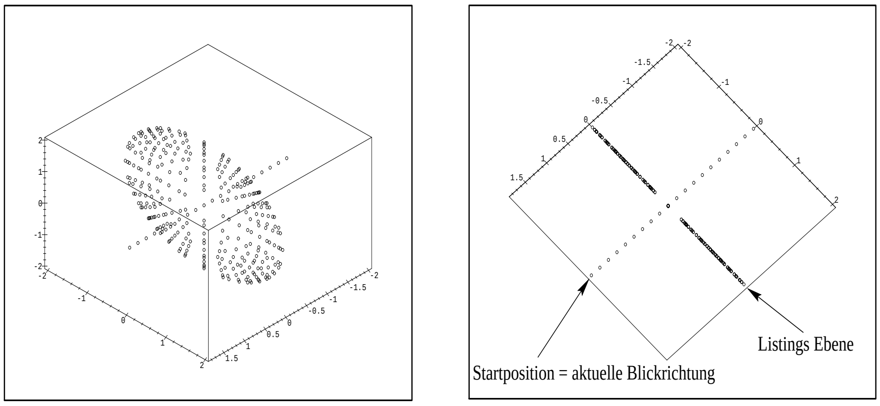



Abbildung 15: Darstellung der Listings Ebene: Die Ebene ist senkrecht zur Blickrichtung.

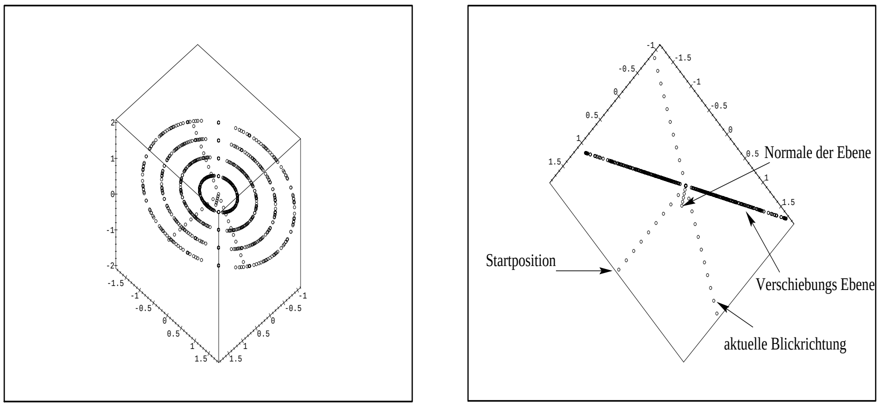



Abbildung 16: Darstellung der Verschiebungs Ebene bei 64 Grad Rotation des Auges.

17 wurde eine $90^o$ Rotation des Vektors durchgeführt. Die Normale der Ebene bestätigt wieder, daß sich die Ebene um die Hälfte dreht.
Als nächstes wird neben Formel (3.20) auch ein Translationsvektor zugelassen. Eine Simulation in MAPLE zeigt das Verhalten der Verschiebungs Ebenen bei Bewegungen des betrachteten Objekts, bzw. bei Bewegungen des Betrachters. In Abbildung 18 werden lediglich die Ebenen bei der Fixierung eines Objekts gezeigt. In Abbildung 19 bewegt sich der Betrachter auf das Objekt zu. Die Ebenen ändern sich bei einer Änderung des Blickwinkels. In Abbildung 20 wird eine Objektverfolgung dargestellt. Auch dabei ändern sich die Ebenen bei einer Änderung des Blickwinkels. Abbildung 21 stellt einen komplexeren Bewegungsablauf dar. Ein Objekt wird zunächst verfolgt, dann geht der Betrachter darauf zu.
In einem späteren Experiment zur Kalibrierung der internen Kameraparameter (Kapi-

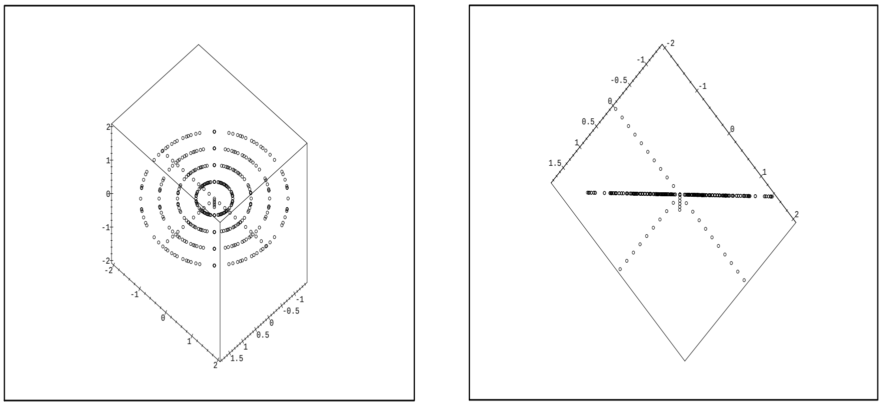


Abbildung 17: Darstellung der Verschiebungs Ebene bei 90 Grad Rotation des Auges.

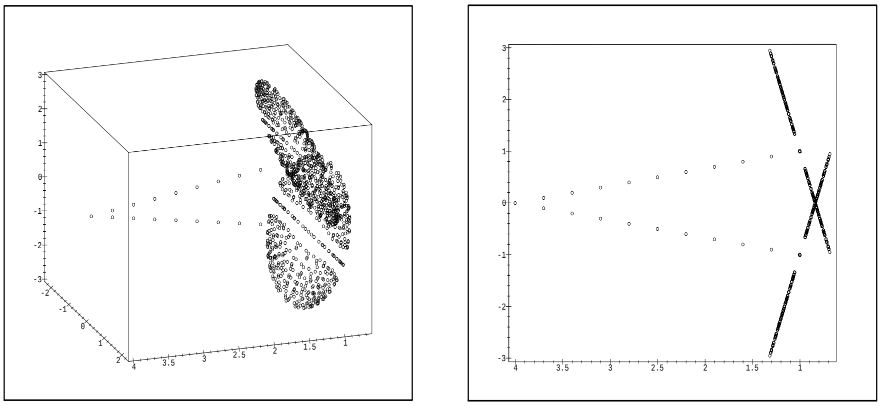


Abbildung 18: Ebenen eines Binokularkopfes.

tel 5) wird eine Szene mit zwei Häusern aufgenommen (Abbildung 32). Rotationen des Roboterrumpfes wurden nicht durchgeführt. Die Ebenen und das Szenario der Bildfolge werden in Abbildung 22 dargestellt. Es folgt eine Zusammenfassung der Ergebnisse:

- Die Menge der Rotationsvektoren, um von $\boldsymbol{a}$ nach $\boldsymbol{b}$ zu gelangen, liegen in dem verwendeten mathematischen Modell zum Gesetz von Listing nicht nahe einer Ebene, sie sind eine Ebene. Die Verschiebungs Ebene ist direkt als lineare Abbildung aus einem gegebenem Einheitsvektor (Blickrichtung) berechenbar.

- Die Diskretisierung einer gekrümmten Fläche über eine endliche Anzahl von Ebenensegmenten ermöglicht eine Rückkopplung vom mathematischen Modell des Auges zum biologischen Modell und zu gemessenen Werten. Die Repräsentation der gekrümmten Fläche über eine Menge von Ebenen in der Algebra der Motoren ermöglicht eine einfache Beschreibung von Rotationen und Translationen dieser

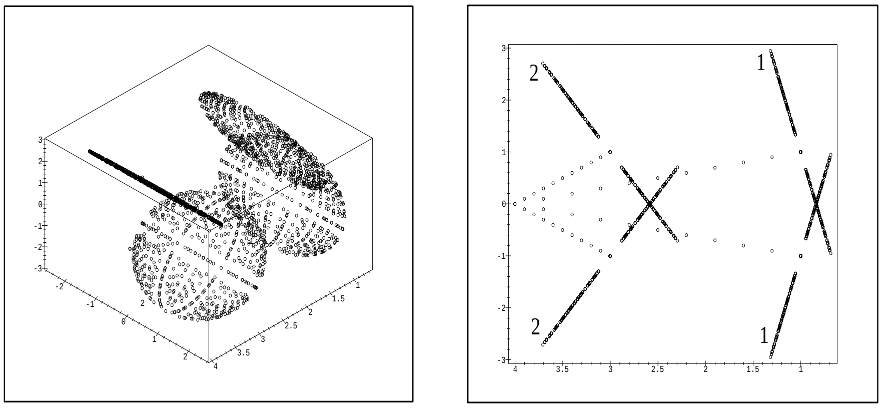



Abbildung 19: Binokularkopf nach einer Bewegung 1→2 bei erhaltener Fixierung.

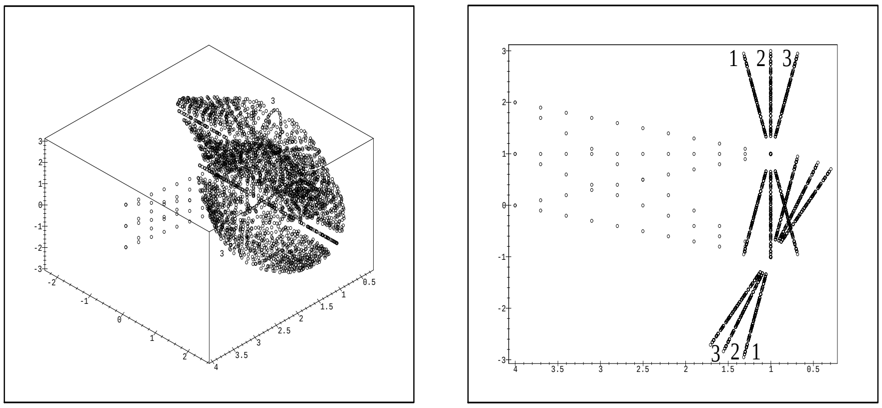



Abbildung 20: Eine Sakkade eines Binokularkopfes bei einer Objektverfolgung 1→2→3.

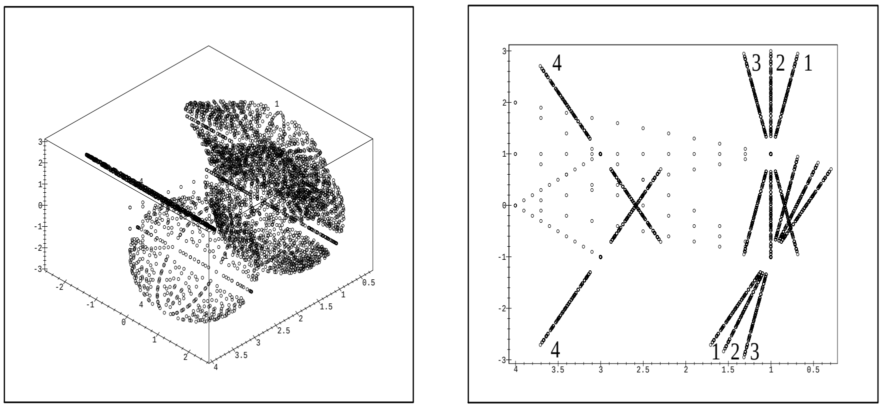



Abbildung 21: Objektverfolgung mit Bewegung 1→2→3 →4.

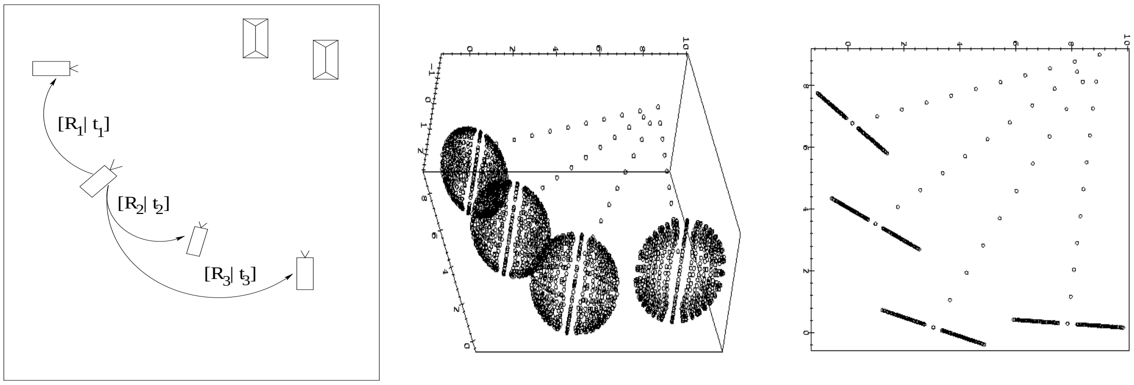



Abbildung 22: Szenario der Bildfolge für das erste Beispiel zur Kalibrierung.

gekrümmten Fläche.

Diese Aussagen wurden im Rahmen dieser Untersuchung gezeigt. Schätzverfahren, die die Sakkade eines Binokularkopfes mit drei Freiheitsgraden für *Vergenz*, *Tilt* und *Torsion* schätzen sollen, könnten diese Ergebnisse unter geeigneten Voraussetzungen ausnutzen und schneller konvergieren, da der Rotationsvektor dieser Sakkade nicht im dreidimensionalen Raum zu suchen ist, sondern lediglich in einer Ebene. Das Gesetz von Listing ist dann auch zwischen den relativen Kameras eines Binokularkopfes, in dem jede Kamera mit einer eigenen *Vergenz-Tilt-Torsion*-Einheit ausgestattet ist, anwendbar und könnte zur externen Kalibrierung verwendet werden. Bei einer klassischen Stereokamerakopfanordnung ist eine Verwendung des Gesetzes von Listing nicht möglich, wie in Abschnitt 3.2.2 festgestellt wird.
Das menschliche visuelle System kann mit zwei Augen ein dreidimensionales Modell der Umgebung rekonstruieren. Dies motiviert die Entwicklung eines Verfahrens zur internen Kalibrierung zwischen zwei Kameras. Dabei ist vor allem ein *Selbstkalibrierungsverfahren* interessant, das lediglich aus Punktkorrespondenzen, ohne weitere Voraussetzungen, die Matrix der *internen Kameraparameter* liefert. Mit den externen Kameraparametern und den internen Kameraparametern ist es dann möglich, aus Punktkorrespondenzen ein dreidimensionales Modell der Umgebung zu rekonstruieren. Die Herleitung eines Verfahrens zur internen Kamerakalibrierung erfolgt in Kapitel vier.

# 4 Kameraselbstkalibrierung

Unter *Kalibrierung* wird die Bestimmung der Projektionsmatrix $P$ für eine Kamera verstanden, mit der die Projektion eines Weltpunktes auf einen Bildpunkt beschrieben wird. Eine klassische Methode der Kalibration funktioniert über die Aufnahme eines Kalibrierungsmusters. Dabei werden dreidimensionale Punkte im Raum vorgegeben, abgebildet und daraus die Projektionsmatrix berechnet. Bei der *Kameraselbstkalibrierung* verzichtet man auf eine Kalibrationsvorlage. Ein solches Verfahren ist zum Beispiel für autonome Robotersysteme wichtig. Das gängigste Verfahren zur Selbstkalibrierung wurde von Faugeras und Maybank 1992 vorgestellt ([26, 11]). Die einzige Voraussetzung sind dabei Bildpunktkorrespondenzen von vier verschiedenen Kamerabildern. In dieser Arbeit soll das Verfahren im Rahmen der Geometrischen Algebra untersucht und erweitert werden. Die Geometrische Algebra ermöglicht eine geometrische Untersuchung des Verfahrens und fördert damit das Verständnis für das vorliegende geometrische Problem. Zusätzlich können Theoreme der projektiven Geometrie angewandt werden, mit denen das Verfahren erweitert wird. Die Motivation besteht darin, ein Verfahren zu entwickeln, mit dem man schon zwischen zwei Kamerabildern intern kalibrieren kann. Dieses ist für eine Orientierung künstlicher visueller Systeme an biologisch visuelle Systeme wichtig, da das menschliche visuelle System mit zwei Augen ein dreidimensionales Modell der Umgebung konstruieren kann.
In diesem Kapitel erfolgt in den ersten beiden Abschnitten eine Einführung in die Kamera- und Epipolargeometrie. Im dritten Abschnitt wird das gängige herkömmliche Verfahren zur Selbstkalibrierung vorgestellt ([25, 11, 26, 23]). Dabei liegt das Interesse auf der Ermittlung der internen Kameraparameter. Die einzige Voraussetzung sind Punktkorrespondenzen zwischen den Bildern. Im nächsten Abschnitt wird dieses Verfahren im Rahmen der Geometrischen Algebra untersucht und eine Herleitung der für die Kalibration notwendigen Kruppagleichungen im Rahmen der Geometrischen Algebra geliefert. Die Darstellung der Gleichungen erfolgt in Form von Brackets. Damit ist erstmals eine geometrische Untersuchung der Gleichungen möglich und das Verständnis für degenerierte Fälle wird gefördert. Im fünften Abschnitt wird das Theorem von Pascal zur Selbstkalibrierung verwendet. Dabei wird sowohl auf konstante interne Kameraparameter während der Bewegung, als auch auf sich während der Bewegung verändernde interne Kameraparameter eingegangen. Experimente in Simulationsumgebungen und mit echten Bildern erfolgen mit einer Diskussion im Anschluß

## 4.1 Das Lochkameramodell

Ausgangspunkt ist das Lochkameramodell: Ein Punkt $\boldsymbol{M}$ im dreidimensionalen Raum wird durch ein *optisches Zentrum* $\boldsymbol{C}$ auf einen Punkt $\boldsymbol{m}$ einer Bildebene $R$ abgebildet. Die *optische Achse* schneidet $\boldsymbol{C}$, steht senkrecht zu der Ebene $R$ und schneidet diese in einem Punkt $\boldsymbol{c}$ in der Ebene $R$. Gegeben sei ein orthonormales Koordinatensystem, im folgenden auch *Pixelkoordinatensystem* genannt, in der Bildebene $R$ mit dem Zentrum $\boldsymbol{c}$ und zwei Achsen $\boldsymbol{x_c}$ und $\boldsymbol{y_c}$. Dieses Koordinatensystem wird formal über $\langle \boldsymbol{x_c}, \boldsymbol{y_c}, \boldsymbol{c} \rangle$ beschrieben. Man kann nun ein dreidimensionales orthonormales System von Koordinaten mit optischem Zentrum $\boldsymbol{C}$ sowie zwei Achsen, die parallel zu den Achsen $\boldsymbol{x_c}$ und $\boldsymbol{y_c}$ verlaufen, und einer Achse, die parallel zur optischen Achse verläuft, definieren : $\langle \boldsymbol{X_c}, \boldsymbol{Y_c}, \boldsymbol{Z_c}, \boldsymbol{C} \rangle$. Dieses Koordinatensystem wird auch als *Weltkoordinatensystem* bezeichnet. Abbildung 23 verdeutlicht das Modell. Die Projektion des Punktes

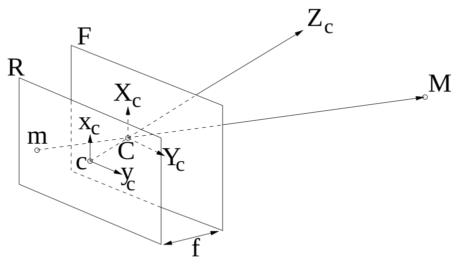



Abbildung 23: Darstellung des Lochkameramodells.

$\boldsymbol{M} = (X_c, Y_c, Z_c, 1)^T$ im Weltkoordinatensystem auf einen Punkt $\boldsymbol{m} = (x_c, y_c, 1)^T$ der Pixelebene läßt sich über $x_c = -f\frac{X_c}{Z_c}$ und $y_c = -f\frac{Y_c}{Z_c}$ berechnen. Dies gilt, da der Ursprung dieses Weltkoordinatensystems beim optischen Zentrum $\boldsymbol{C}$ ist, und für $Z_c = -f$ die Ebene im Raum den Sehstrahl schneidet. Der Abstand $f$ von $\boldsymbol{c}$ zu $\boldsymbol{C}$ wird auch als *Brennweite* bezeichnet. In homogenen Koordinaten, mit einem Normierungsfaktor $T_c \neq 0$ für endliche Punkte, ergibt sich folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} T_c Z_c x_c \\ T_c Z_c y_c \\ T_c Z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_c X_c \\ T_c Y_c \\ T_c Z_c \\ T_c \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Für $T_c \neq 0$ wird bei Anwendungen $T_c$ mit 1 normiert, so daß mit homogenen Koordinaten gearbeitet wird. Wichtig ist, daß der Zusammenhang zwischen Weltkoordinaten und Pixelkoordinaten linear projektiv ist. D.h. die Projektion eines Punktes im projektiven Raum in eine projektive Ebene kann durch eine lineare Abbildung beschrieben werden. Dabei sind Punkte im Weltkoordinatensystem Punkte aus $\langle \boldsymbol{X_c}, \boldsymbol{Y_c}, \boldsymbol{Z_c}, \boldsymbol{C} \rangle$, und Punkte im Pixelkoordinatensystem Punkte aus $\langle \boldsymbol{x_c}, \boldsymbol{y_c}, \boldsymbol{c} \rangle$.

Sei $\langle \boldsymbol{X_o}, \boldsymbol{Y_o}, \boldsymbol{Z_o}, \boldsymbol{O} \rangle$ ein weiteres Weltkoordinatensystem, das durch eine Bewegung (Rotation $\Re$, Translation $\boldsymbol{t}$) aus $\langle \boldsymbol{X_c}, \boldsymbol{Y_c}, \boldsymbol{Z_c}, \boldsymbol{C} \rangle$ entsteht. Weiter sei $\langle \boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_o}, \boldsymbol{o} \rangle$ ein zweites Pixelkoordinatensystem. Das Pixelkoordiantensystem $\langle \boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_o}, \boldsymbol{o} \rangle$ hängt mit dem Pixelkoordiantensystem $\langle \boldsymbol{x_c}, \boldsymbol{y_c}, \boldsymbol{c} \rangle$ durch eine Skalierung der Achsen $\boldsymbol{x_o}$ und $\boldsymbol{y_o}$ mit den Größen $k_u$ und $k_v$ sowie einer Translation $(u_o, v_o)^T$ zusammen. Zusätzlich wird die $\boldsymbol{y_o}$-Achse um

$\boldsymbol{o}$ rotiert, so daß sie mit einem Winkel von $\theta$ auf die $\boldsymbol{x_o}$-Achse steht. Die Parameter, die zwei Pixelkoordinatensysteme verbinden, werden *interne Parameter* genannt. Abbildung 24 verdeutlicht die Definition der externen und internen Kameraparameter.
Sei $(X, Y, Z, T)^T$ ein Vektor aus $\langle \boldsymbol{X_o}, \boldsymbol{Y_o}, \boldsymbol{Z_o}, \boldsymbol{O} \rangle$, dem zweiten Weltkoordinatensystem. In Anlehnung an Gleichung (4.1) läßt sich nun die Projektion des Punktes $(X, Y, Z, T)^T$

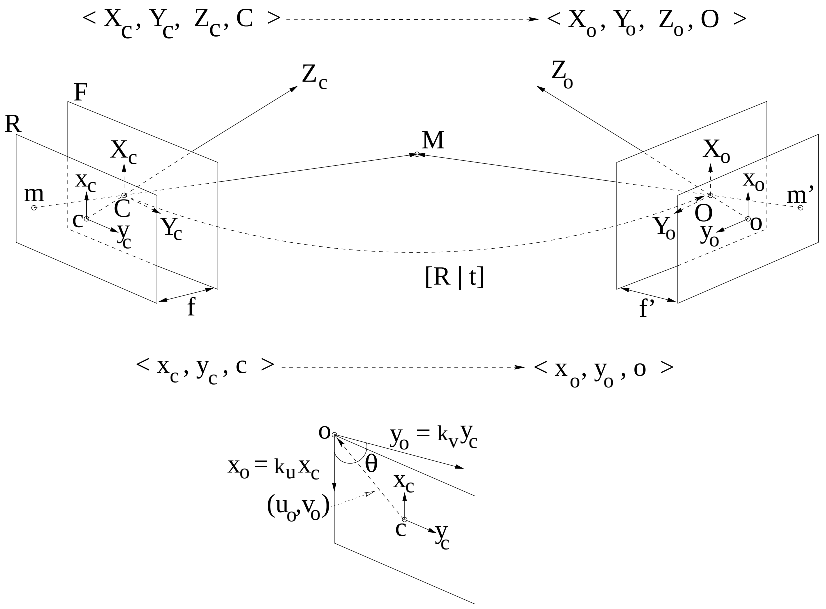



Abbildung 24: (O.) Die externen Kameraparameter beschreiben die Rotation und Translation zwischen den Weltkoordinatensystemen. (U.) Die internen Kameraparameter beschreiben die Transformationen der Pixelkoordinatensysteme.

im Weltkoordinatensystem zu einem Vektor $(U, V, W)^T$ aus dem Pixelkoordinatensystem $\langle \boldsymbol{x_o}, \boldsymbol{y_o}, \boldsymbol{o} \rangle$ über zwei geeignete Matrizen $K$ und $D$ auf folgende Weise beschreiben:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \underbrace{K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D}_{P} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Die $3 \times 3$-Matrix $K$ beschreibt die Veränderungen des Pixelkoordinatensystems und die $4 \times 4$-Matrix $D$ die Veränderungen des Weltkoordinatensystems beschreibt. Mit Ausnahme der unendlich fernen Punkte (für $W = 0$) hängen die Pixelkoordinaten mit den projektiven Koordinaten durch $u = \frac{U}{W}$ und $v = \frac{V}{W}$ zusammen. Die Pixelkoordinaten im Bild sind also die homogenen Koordinaten $(u, v, 1)^T \sim (U, V, W)^T$. Analog gilt (außer für $T = 0$) $X_1 = \frac{X}{T}$, $Y_1 = \frac{Y}{T}$ und $Z_1 = \frac{Z}{T}$. Die endlichen Weltkoordinaten werden auch über die homogenen Koordinaten des projektiven Raums definiert:

$(X_1, Y_1, Z_1, 1)^T \sim (X, Y, Z, T)^T$. $K$ kann wie folgt beschrieben werden:

$$K \;=\; \begin{pmatrix} -fk_u & fk_u cot(\theta) & u_0 \\ 0 & \frac{-fk_v}{sin(\theta)} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Dabei ist $f$ die Brennweite, $k_u$ der Skalierungsfaktor der $\boldsymbol{x_o}$-Achse, $k_v$ der Skalierungsfaktor der $\boldsymbol{y_o}$-Achse, $u_0$ die Translation entlang der $\boldsymbol{x_o}$-Achse, $v_0$ die Translation entlang der $\boldsymbol{y_o}$-Achse und $\theta$ der Betrag der Rotation der Achsen der Ebene. Für $\alpha_u = -fk_u$ und $\alpha_v = -fk_v$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$ hat $K$ folgende Gestalt:

$$K = \begin{pmatrix} \alpha_u & 0 & u_0 \\ 0 & \alpha_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Die Annahme $\theta = \frac{\pi}{2}$ bedeutet, daß die Basisvektoren senkrecht zueinander stehen. Dies gilt zum Beispiel bei einem CCD-Chip. Weiter beschreibt bei einem CCD-Chip $(u_o, v_o)^T$ die Translation des Ursprungs in die linke obere Ecke des CCD-Chips.
Die Matrix $D$ hängt von sechs externen Parametern ab. Drei Parameter beschreiben die Rotation $\Re$ und drei die Translation $\boldsymbol{t}$. Die Matrix $D$ hat folgende Gestalt:

$$D = \begin{pmatrix} \Re & \boldsymbol{t} \\ 0_3^T & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

In der gängigen Literatur ist für eine Projektionsmatrix $P$ auch folgende Notation zu finden:

$$P = K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D = K[\Re|\boldsymbol{t}]. \tag{4.6}$$

Dabei bezeichnet $[\Re|\boldsymbol{t}]$ die aus $\Re$ und $\boldsymbol{t}$ zusammengesetzte $3 \times 4$-Matrix.
Für die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Methode zur Selbstkalibrierung ist der absolute Kegelschnitt $\Omega_\infty$ aus Abschnitt 2.6, Definition 2.2 fundamental. Ein Punkt $(X, Y, Z, T)$ auf dem absoluten Kegelschnitt erfüllt $T = 0$ und $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$. Die Bedingung $T = 0$ impliziert, daß der Punkt im Unendlichen liegt, und für $X_1 = \frac{X}{Z}$ und $Y_1 = \frac{Y}{Z}$ ergibt sich die Kreisgleichung $X_1^2 + Y_1^2 = -1$, mit dem Radius $i = \sqrt{-1}$. Der absolute Kegelschnitt ist invariant unter endlichen Verschiebungen und das Bild des Kegelschnitts in der Kamera ist wieder ein Kegelschnitt, der unabhängig von der Lage der Kamera ist. Die Kegelschnittgleichung hängt damit nur von den internen und nicht von den externen Kameraparametern ab. Die Matrix des Bildes des absoluten Kegelschnitts wird in Lemma 4.1 behandelt:

**Lemma 4.1** *Die Matrix des Bildes des absoluten Kegelschnitts ist eine Matrix $B$ mit der Gestalt $B = K^{-T}K^{-1}$. Die Matrix $K$ ist dabei die Matrix mit den internen Kameraparametern aus der Projektionsmatrix.*

**Beweis :** Der absolute Kegelschnitt genügt der Gleichung $X^2+Y^2+Z^2 = 0$ und $T = 0$. Das Bild eines Punktes $\boldsymbol{X} = (X, Y, Z, T)^T$ des absoluten Kegelschnitts hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= P\boldsymbol{X} = KD\boldsymbol{X} = K[\Re|\boldsymbol{t}]\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} && (4.7)\\ &= K[\Re|\boldsymbol{t}]\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 0 \end{pmatrix} = K\Re\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + 0\boldsymbol{t}. && (4.8)\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \Re^T K^{-1}\boldsymbol{x}$. Wegen obiger Kegelschnittgleichung gilt weiter:

$$0 = (X, Y, Z)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^T K^{-T}\underbrace{\Re\Re^T}_{I}K^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T\underbrace{K^{-T}K^{-1}}_{B}\boldsymbol{x}. \tag{4.9}$$

**qed**

Das Bild des absoluten Kegelschnitts ist invariant unter euklidischen Transformationen. Da der absolute Kegelschnitt bezüglich der externen Kameraparameter invariant ist, kann er als Kalibrationsvorlage benutzt werden, die immer vorhanden ist.

## 4.2 Die Epipolargeometrie

In diesem Abschnitt erfolgt eine Einführung in die Epipolargeometrie. Seien $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C'}$ optische Zentren von zwei Kameras und $\boldsymbol{\Pi_1}$, $\boldsymbol{\Pi_2}$ zwei Bildebenen. Sei $\boldsymbol{M}$ ein Punkt im Weltkoordinatensystem und $\boldsymbol{m} = P_1\boldsymbol{M}$ beziehungsweise $\boldsymbol{m'} = P_2\boldsymbol{M}$ die Projektion des Punktes in der jeweiligen Ebene. Die Projektion der optischen Zentren liefert $\boldsymbol{e} = P_1\boldsymbol{C'}$ und $\boldsymbol{e'} = P_2\boldsymbol{C}$, die jeweiligen *Epipole*. Der Punkt $\boldsymbol{M}$ im Raum definiert mit $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{e'}$ die *Epipolarebene* $\boldsymbol{\Pi}$. Geraden in der Bildebene, die den Epipol schneiden, werden *Epipolargeraden* genannt. In der ersten Bildebene ist zum Beispiel die durch $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{m}$ beschriebene Gerade $\boldsymbol{l_{m'}}$ eine Epipolargerade. Im zweiten Kamerabild ist die durch $\boldsymbol{e'}$ und $\boldsymbol{m'}$ beschriebene Gerade $\boldsymbol{l'_m}$ ebenfalls eine Epipolargerade.

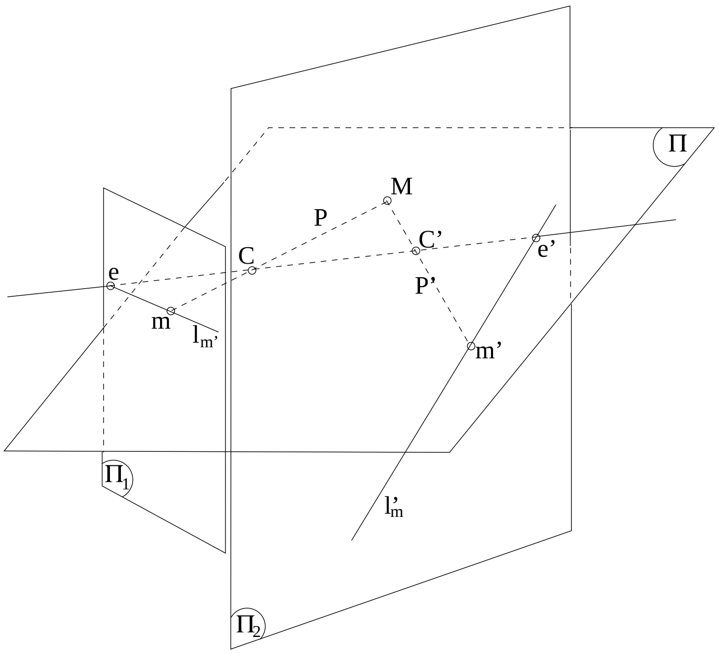



Abbildung 25: Darstellung der Epipolargeometrie.

In der projektiven Ebene wird eine Gerade über das Kreuzprodukt von zwei Punkten auf der Geraden eindeutig definiert. Man erhält die Darstellung $\boldsymbol{l'_m} = \boldsymbol{e'} \times \boldsymbol{m'}$. Dies gilt jedoch nur für die projektive Ebene. Abbildung 25 verdeutlicht die Epipolargeometrie. Interessante Korrespondenzen treten zwischen den Geradenbüscheln von Epipolargeraden der verschiedenen Bildebenen auf. Es gilt:

$$\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, m_3)^T \in \boldsymbol{l_{m'}} = (l_1, l_2, l_3)^T \Leftrightarrow \boldsymbol{l_{m'}}^T \boldsymbol{m} = 0. \tag{4.10}$$

Die Beziehung von $\boldsymbol{m}$ zu $\boldsymbol{l'_m}$ ist linear projektiv. Die *Fundamentalmatrix* beschreibt diese Korrespondenz: $\boldsymbol{l'_m} = F\boldsymbol{m}$. Da $\boldsymbol{m'}$ zu $\boldsymbol{m}$ korrespondiert und $\boldsymbol{m'} \in \boldsymbol{l'_m}$ muß gelten:

$$\boldsymbol{m'}^T \boldsymbol{l'_m} = \boldsymbol{m'}^T F \boldsymbol{m} = 0. \tag{4.11}$$

Für die Epipole ergibt sich $F\boldsymbol{e} = F^T\boldsymbol{e'} = \boldsymbol{0}$. Weiter setzt man $F_{33} = 1$. Da $Rang(F) \leq 2$ und somit $det(F) = 0$ gilt, (mit $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e'}$ ist die Dimension des Kerns von $F$ mindestens eins) hängt $F$ nur von sieben unabhängigen Parametern ab. $F$ wird durch 7 Punktkorrespondenzen und die Gleichung $\boldsymbol{m'}^T F\boldsymbol{m} = 0$ eindeutig bestimmt. Weiter kann die Fundamentalmatrix in interne und externe Kameraparameter zerlegt werden. Nach ([11, 23]) ergibt sich: $F = K^{-T}EK^{-1}$. Dabei ist $E$ die sogenannte *Essential*-Matrix mit den externen Kameraparametern $E = [\boldsymbol{t}]_\times \Re$. Die Matrix $E$ stellt sich als Produkt einer antisymmetrischen Matrix mit einer orthogonalen Matrix dar.
In der Praxis kann der Ursprung eines Weltkoordinatensystems in die erste Bildebene gelegt werden. Die Projektionsmatrix $P_1$ hat dann die Gestalt $P_1 = K_1[I_3|0]$. Sei $\Re$

die Rotation und $\boldsymbol{t}$ die Translation vom optischen Zenter $\boldsymbol{C}$ zum optischen Zenter $\boldsymbol{C'}$. Die Matrix $D$ habe die Gestalt $D = \begin{pmatrix} \Re & \boldsymbol{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{C'} - \boldsymbol{C})$. Dann erhält die Projektionsmatrix $P_2$ folgende Gestalt:

$$P_2 = K_2[I_3|0]D^{-1}. \tag{4.12}$$

Es gilt:

$$\boldsymbol{e} = P_1\boldsymbol{C'} = P_1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ 1 \end{pmatrix} = K_1\boldsymbol{t} \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{e'} = P_2\boldsymbol{C} = K_2[I_3|0]D^{-1}(0,0,0,1)^T. \tag{4.14}$$

Dabei wird häufig $K = K_1 = K_2$ angenommen. Für nähere Informationen zur Epipolargeometrie sowie den internen und externen Kameraparametern wird auf die Literatur [11, 26, 23, 8] verwiesen.

## 4.3 Kruppagleichungen und interne Kameraparameter

Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung der *Kruppagleichungen*. Eine Lösung der Kruppagleichungen liefert die gesuchten internen Kameraparameter. Zum Aufstellen der Kruppagleichungen wird das Bild des absoluten Kegelschnitts und das Konzept der Epipolargeometrie verwendet. Da keine Kalibrationsvorlage verwendet wird , bezeichnet man diese Art der Kalibrierung auch als *Selbstkalibrierung*. Bei zwei verschiedenen Kameras ist die Transformation zwischen zwei Pixelkoordinatensystemen abhängig von den jeweiligen internen und externen Kameraparametern. Zur Herleitung der Kruppagleichungen, deren Lösung die internen Kameraparameter liefert, wird das Dualitätsprinzip der projektiven Geometrie ausgenutzt.
Sei $B$ die Matrix zum Bild $\omega$ von $\Omega_\infty$, wobei $\Omega_\infty$ der absolute Kegelschnitt aus Lemma 4.1 sei. Die Matrix des Dualen des Kegelschnitts von $\omega$ ist die Dualmatrix $W = B^* = det(B)B^{-1}$, die proportional zu $B^{-1}$ ist. Dabei bedeutet Dualität, daß eine Gerade, als Dual eines Punktes, tangential zu $\omega$ ist. Es gilt:
$W = B^* = \lambda B^{-1} = \lambda(K^{-T}K^{-1})^{-1} = \lambda KK^T$, nach Lemma 4.1. Da die Skalierung irrelevant ist, wird $W = KK^T$ gesetzt. Bei gegebenem $W$ ist $K$, die interne Kamerakalibrierung, eindeutig durch die *Choleskyzerlegung* $W = KK^T$ gegeben.
Das Symbol $\hookrightarrow$ bezeichnet die Überführung einer Struktur in ihren Dualraum. Zwei Punkte induzieren eine Gerade, die in der projektiven Ebene über das Kreuzprodukt von zwei Punkten auf der Geraden beschrieben werden. Weiter werden die Eigenschaften der Fundamentalmatrix ausgenutzt:
$\boldsymbol{y} \hookrightarrow \boldsymbol{l_y} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{y}$

$B \hookrightarrow B^*$.
Weiter ist $\boldsymbol{l_y} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{y}$ tangential zu $\omega \Leftrightarrow \boldsymbol{l_y}^T B^* \boldsymbol{l_y} = 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{y})^T W (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{y}) = 0$. Wegen $F\boldsymbol{y} = \boldsymbol{l_{y'}} = (\boldsymbol{e'} \times \boldsymbol{y'})$ gilt analog $\boldsymbol{y^T} F^T W F \boldsymbol{y} = 0$. $W$ hat dabei folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
W &= KK^T && (4.15)\\
&= \begin{pmatrix} \alpha_u & 0 & u_0 \\ 0 & \alpha_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_u & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_v & 0 \\ u_0 & v_0 & 1 \end{pmatrix} && (4.16)\\
&= \begin{pmatrix} \alpha_u^2 + u_0^2 & u_0 v_0 & u_0 \\ u_0 v_0 & \alpha_v^2 + v_0^2 & v_0 \\ u_0 & v_0 & 1 \end{pmatrix} && (4.17)\\
&=: \begin{pmatrix} -\delta_{23} & \delta_3 & \delta_2 \\ \delta_3 & -\delta_{13} & \delta_1 \\ \delta_2 & \delta_2 & -\delta_{12} \end{pmatrix}. && (4.18)
\end{aligned}$$

Für $\boldsymbol{y} = (1, \tau, 0)^T$ und einen Epipol $\boldsymbol{e} = (p_1, p_2, p_3)^T$ ergibt sich:
$(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{y}) = (p_1, p_2, p_3)^T \times (1, \tau, 0)^T = (-p_3\tau, p_3, p_1\tau - p_2)^T$. Ziel ist es, mit der unbekannten $\tau$ eine Gerade zu erzwingen, die tangential zum Dualen des Bildes des absoluten Kegelschnitts ist. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 = \boldsymbol{l_y}^T B^* \boldsymbol{l_y} &= && (4.19)\\
(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{y}) W (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{y})^T &= && (4.20)\\
(-p_3\tau, p_3, p_1\tau - p_2) \begin{pmatrix} -\delta_{23} & \delta_3 & \delta_2 \\ \delta_3 & -\delta_{13} & \delta_1 \\ \delta_2 & \delta_1 & -\delta_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_3\tau \\ p_3 \\ p_1\tau - p_2 \end{pmatrix} &= && (4.21)\\
(-p_3\tau, p_3, p_1\tau - p_2) \begin{pmatrix} p_3\tau\delta_{23} + p_3\delta_3 + p_1\tau\delta_2 - p_2\delta_2 \\ -p_3\tau\delta_3 - p_3\delta_{13} + p_1\tau\delta_1 - p_2\delta_1 \\ -p_3\tau\delta_2 + p_3\delta_1 - p_1\tau\delta_{12} + p_2\delta_{12} \end{pmatrix} &= && (4.22)\\
-p_3^2\tau^2\delta_{23} - p_3^2\tau\delta_3 - p_1p_3\tau^2\delta_2 + p_2\delta_2p_3\tau & && (4.23)\\
-p_3^2\tau\delta_3 - p_3^2\delta_{13} + p_1p_3\tau\delta_1 - p_3p_2\delta_1 & && (4.24)\\
-p_1p_3\tau\delta_2 + p_1p_3\tau\delta_1 - p_1^2\tau^2\delta_{12} + p_1p_2\tau\delta_{12} & && (4.25)\\
+p_2p_3\tau\delta_2 - p_2p_3\delta_1 + p_1p_2\tau\delta_{12} - p_2^2\delta_{12} & \quad , && (4.26)
\end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
(-p_3\tau, p_3, p_1\tau - p_2) \begin{pmatrix} -\delta_{23} & \delta_3 & \delta_2 \\ \delta_3 & -\delta_{13} & \delta_1 \\ \delta_2 & \delta_1 & -\delta_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_3\tau \\ p_3 \\ p_1\tau - p_2 \end{pmatrix} &= 0 && (4.27)\\
\Leftrightarrow k_0 + k_1\tau + k_2\tau^2 &= 0. && (4.28)
\end{aligned}$$

Dabei seien

$$k_0 = -\delta_{13}p_3^2 - \delta_{12}p_2^2 - 2\delta_1 p_2 p_3 \tag{4.29}$$

$$k_1 = 2(\delta_{12}p_1p_2 - \delta_3 p_3^2 + \delta_2 p_2 p_3 + \delta_1 p_1 p_3) \tag{4.30}$$

$$k_2 = -\delta_{23}p_3^2 - \delta_{12}p_1^2 - 2\delta_2 p_1 p_3. \tag{4.31}$$

Damit erhält man folgende Gleichung:

$$P_1(\tau) = k_0 + k_1\tau + k_2\tau^2 = 0. \tag{4.32}$$

In diesem Polynom kommen als Unbekannte die internen Kameraparameter und $\tau$ vor. Über das zweite Kamerabild läßt sich nun ein zweites Polynom über eine Unbekannte $\tau$ definieren und mit obigem ersten Polynom gleichsetzen. Auf diese Weise kann man die Unbekannte $\tau$ wegkürzen und erhält nur noch Gleichungen, in denen die internen Kameraparameter als Unbekannte vorkommen. Diese Gleichungen sind die *Kruppagleichungen.*
Im zweiten Kamerabild wird der zweite Epipol verwendet und es wird analog zum ersten Kamerabild vorgegangen. Die Unbekannte $\tau$ ist mit einer Unbekannten $\tau'$ zu ersetzen. Über einen Faktor, der sich aus der sogenannten *homographische Korrespondenz* ergibt, können $\tau$ und $\tau'$ in einen Zusammenhang gebracht werden. Zu dem Begriff *homographische Korrespondenz* wird auf die Literatur ([11, 10, 26, 25]) verwiesen. Zu $(1, \tau, 0)^T$ wird dabei der Faktor $\rho$ mit $\rho = \frac{p_1 p_2'}{p_1' p_2}$ multipliziert. Damit liefert $(1, \tau', 0)^T \sim (1, \rho\tau, 0)^T$ Gleichungen folgender Gestalt:

$$P_2(\tau) = k_0' + k_1'\rho\tau + k_2'\rho^2\tau^2 = 0. \tag{4.33}$$

Da die Lösung von $P_1(\tau)$ ein skalares Vielfaches der Lösung von $P_2(\tau)$ ist, können die *Kruppagleichungen* über drei Gleichungen beschrieben werden:

$$\rho k_0' k_1 = k_0 k_1' \tag{4.34}$$

$$k_2' k_1 = k_2 \rho k_1' \tag{4.35}$$

$$\rho^2 k_0' k_2 = k_0 k_2'. \tag{4.36}$$

Dabei implizieren zwei Gleichungen die dritte, so daß zwei unabhängige Gleichungen aufgestellt werden. Die Gleichungen (4.34-4.36) sind also die Kruppagleichungen, mit deren Lösung die internen Kameraparameter ermittelt werden können.
Anstatt das zweite Polynom über den zweiten Epipol aufzustellen, der eine Gerade $\boldsymbol{l}$ im zweiten Kamerabild erzeugt welche über die homographische Korrespondenz auf das erste Kamerabild bezogen wird, kann man auch direkt die Fundamentalmatrix ausnutzen. Bei der Multiplikation der Fundamentalmatrix $F$ mit dem Vektor $(1, \tau, 0)^T$ erhält man beim einsetzen von $F(1, \tau, 0)^T$ statt einer Geraden $\boldsymbol{l}$ ein Polynom der Gestalt:

$$P_3(\tau) = k_0'' + k_1''\tau + k_2''\tau^2 = 0. \tag{4.37}$$

Da $F(1,\tau,0)^T$ eine Gerade im ersten Kamerabild liefert, entfällt die Multiplikation mit einem homographischen Faktor. Man erhält direkt die Gleichungen:

$$\frac{k_0''}{k_0} = \frac{k_1''}{k_1} \tag{4.38}$$

$$\frac{k_0''}{k_0} = \frac{k_2''}{k_2} \tag{4.39}$$

$$\frac{k_1''}{k_1} = \frac{k_2''}{k_2}. \tag{4.40}$$

Diese zweite Darstellung der Kruppagleichungen (4.38-4.40) wird in der Praxis verwendet. So erhält man ein quadratisches Gleichungssystem. Die Invarianz des absoluten Kegelschnitts liefert diese Gleichungen für die gesuchten Koeffizienten. Mindestens drei Verschiebungen sind für eine eindeutige Lösung nötig. Bei mehr Verschiebungen bietet sich eine Fehlerminimierung des überbestimmten Gleichungssystems an.

**Erstes Verfahren zur Selbstkalibrierung**

Nach obigen theoretischen Grundlagen hat ein erster Algorithmus folgende Gestalt:

*do* $m$ *times* $(m \geq 3)$
  *begin*
    *select* $n$ *points* $(n \geq 7)$
    *move camera to other position while tracking the points*
    *compute epipoles*
    *write Kruppa's equations for the camera displacement*
  *end*
*use Kruppa's equations to solve for the coefficients*
  *of the image of the absolute conic*
*Cholesky decomposition of the image of the absolute conic.*

Dieses Verfahren wurde erstmals in der Literatur ([11]) vorgestellt. Einen weiteren interessanten Ansatz bietet die Herleitung der Kruppagleichungen aus der Fundamentalmatrix. Dies ist zwar nicht elementar für die Erweiterungen im Abschnitt 4.4, es vervollständigt jedoch den Überblick über die bisherigen Veröffentlichungen in diesem Zusammenhang.

### 4.3.1 Herleitung von Kruppagleichungen aus der Fundamentalmatrix

Seien $P$, $P'$ zwei Projektionsmatrizen mit denselben internen Kameraparametern und $W = KK^T$ die Matrix für das Duale des Bildes des absoluten Kegelschnitts. Sei $F$ die Fundamentalmatrix für dieses Kamerapaar. Weiter seien $A$, $A'$ Transformationsmatrizen, so daß die Fundamentalmatrix von $AP$, $AP'$ die Gestalt

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

besitzt. Die Matrix $E$ ist die Fundamentalmatrix bei spezieller Wahl der Bildkoordinatensysteme und entsteht aus einer geeigneten Transformation von $F$. Die Fundamentalmatrix $E$ hat die Eigenschaft, daß die beiden Epipole im Ursprung liegen und die korrespondierenden Epipolargeraden in den zwei Bildern identisch sind. Diese Transformation ändert auch das Duale des Bildes des absoluten Kegelschnitts, welches neue Kegelschnittgleichungen $D$, $D'$ erzeugt. Da $A$ und $A'$ i.a. unterschiedlich sind, kann nicht angenommen werden, daß $D = D'$. Die Gerade, die durch $(\lambda, \mu, 0)^T$ repräsentiert wird, sei tangential zum Bild des absoluten Kegelschnitts:
$(\lambda, \mu, 0)D(\lambda, \mu, 0)^T = 0$, bzw. $(\lambda, \mu, 0)D'(\lambda, \mu, 0)^T = 0$.
Dies liefert Gleichungen der Gestalt:
$\lambda^2 d_{11} + 2\lambda\mu d_{12} + \mu^2 d_{22} = 0$ bzw. $\lambda^2 d'_{11} + 2\lambda\mu d'_{12} + \mu^2 d'_{22} = 0$.
Mit $D = [d_{ij}]$ und $D' = [d'_{ij}]$ sind diese bis auf einen Skalierungsfaktor identisch, da zwei Geraden, die tangential zum Bild des absoluten Kegelschnitts sind, dieselben zwei Geraden in diesen zwei Bildern sind. Also sind obige Gleichungen bis auf einen Skalierungsfaktor identisch und es gilt

$$\frac{d_{11}}{d'_{11}} = \frac{d_{12}}{d'_{12}} = \frac{d_{22}}{d'_{22}}. \tag{4.42}$$

Die $d_{ij}$ können nun in der Form des Dual des Bildes des absoluten Kegelschnitts ausgedrückt werden. Für eine Gerade $\boldsymbol{\lambda}$ und einen Punkt $\boldsymbol{u}$ auf der Geraden kann man die Matrix $A$ einfügen:

$$\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{u} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda}^T A^{-1} A \boldsymbol{u} = 0 \Leftrightarrow (A^{-T}\boldsymbol{\lambda})^T A\boldsymbol{u} = 0. \tag{4.43}$$

D.h. $\boldsymbol{u}$ liegt auf einer Geraden $\boldsymbol{\lambda}$ gdw. $(A^{-T}\boldsymbol{\lambda})^T A\boldsymbol{u} = 0$. Also gilt weiter

$$\boldsymbol{\lambda} \in W \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda}^T W \boldsymbol{\lambda} = 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{\lambda}^T A^{-1})(AWA^T)(A^{-T}\boldsymbol{\lambda}) = 0. \tag{4.44}$$

Damit haben $D$ und $D'$ die Gestalt $D = AWA^T$ und $D' = A'WA'^T$.
Setze $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1}^T \\ \boldsymbol{a_2}^T \\ \boldsymbol{a_3}^T \end{pmatrix}$ und es gilt: $d_{ij} = \boldsymbol{a_i}^T W \boldsymbol{a_j}$. Dies führt zu den Bedingungen:

$$\frac{\boldsymbol{a_1}^T W \boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{a_1}'^T W \boldsymbol{a}'_1} = \frac{\boldsymbol{a_1}^T W \boldsymbol{a_2}}{\boldsymbol{a_1}'^T W \boldsymbol{a}'_2} = \frac{\boldsymbol{a_2}^T W \boldsymbol{a_2}}{\boldsymbol{a_2}'^T W \boldsymbol{a}'_2}. \tag{4.45}$$

Nun wird $A$ über eine Singulärwertzerlegung von $F$ beschrieben: $F$ kann über $F = UXV^T$ beschrieben werden mit $U \perp V$ und $X = Diag(r, s, 0)$. Dies ist analog zu der Zerlegung

$$F = U \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V^T. \tag{4.46}$$

$A'$ wird über $A' = Diag(r, s, 0)U^T$ beschrieben und $A$ über $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V^T$, so daß $F = A'^T EA$ mit $A$, $A'$ nicht singulär ist. Für ein korrespondierendes Punktepaar ist $\boldsymbol{u}'^T F\boldsymbol{u} = 0$, also $\boldsymbol{u}'^T A'^T EA\boldsymbol{u} = 0$ und mit $\hat{\boldsymbol{a}} = A\boldsymbol{u}$ und $\hat{\boldsymbol{u}}' = A'\boldsymbol{u}'$ gilt $\hat{\boldsymbol{u}}'^T E\hat{\boldsymbol{u}} = 0$.
$A'$ kann nun beschrieben werden über:
$A' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1}'^T \\ \boldsymbol{a_2}'^T \\ \boldsymbol{a_3}'^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\boldsymbol{u_1}^T \\ s\boldsymbol{u_2}^T \\ \boldsymbol{u_3}^T \end{pmatrix}$ bzw. $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1}^T \\ \boldsymbol{a_2}^T \\ \boldsymbol{a_3}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v_2}^T \\ -\boldsymbol{v_1}^T \\ \boldsymbol{v_3}^T \end{pmatrix}$, mit $\boldsymbol{u_i}$, $\boldsymbol{v_i}$ der i. Spalte von $U$, $V$.
Mit der vorhergehenden Gleichung erhält man:

$$\frac{\boldsymbol{v_2}^T W \boldsymbol{v_2}}{r^2 \boldsymbol{u_1}^T W \boldsymbol{u_1}} = \frac{-\boldsymbol{v_2}^T W \boldsymbol{v_1}}{rs\boldsymbol{u_1}^T W \boldsymbol{u_2}} = \frac{\boldsymbol{v_1}^T W \boldsymbol{v_1}}{s^2 \boldsymbol{u_2}^T W \boldsymbol{u_2}}. \tag{4.47}$$

Dies sind die gesuchten Kruppagleichungen, beschrieben über die Fundamentalmatrix. Die Bestimmung der Kruppagleichungen besteht aus drei Schritten:

1. Bilde die Fundamentalmatrix $F$.

2. Zerlege $F$ in $UXV^T$.

3. Bilde daraus die Kruppagleichungen.

Dieses Beispiel aus der Literatur ([15]) zeigt, wie schwer es ist, eine geometrische Interpretation in Kruppagleichungen zu geben, wenn im Matrizenkalkül gearbeitet wird. Da die Geometrische Algebra die Möglichkeit der geometrischen Interpretation bietet, ist die Herleitung der Kruppagleichungen in der Geometrischen Algebra für das Verständnis der Gleichungen wichtig und besonders interessant.

### 4.3.2 Schätzung der externen Kameraparameter

In diesem Abschnitt wird kurz die Bestimmung der externen Kameraparameter aus Bildpunktkorrespondenzen beschrieben. Da die einzige Voraussetzung zur Kalibrierung Bildpunktkorrespondenzen sind, das später erklärte Verfahren zur Kalibrierung über das Theorem von Pascal jedoch die externen Kameraparameter benötigt, wird ein gängiges

Verfahren ([2, 1]) zur Erfüllung dieser Bedingung vorgestellt.
Bei diesem Zugang werden über ein vereinfachtes Kameramodell und Bildpunktkorrespondenzen Gleichungen aufgestellt und über einen iterierten extended Kalmanfilter der Fehler minimiert. Unter den Unbekannten der Gleichungen befinden sich auch die gesuchten externen Kameraparameter.
Im herkömmlichen Lochkameramodell wird der Ursprung des Weltkoordinatensystems im optischen Zentrum $\boldsymbol{C}$ angenommen. Ein Sehstrahl vom Ursprung zu einem Punkt $\boldsymbol{X} = (X_c, Y_c, Z_c)^T$ genügt folgender Gleichung:

$$\boldsymbol{g} = \lambda \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix}. \tag{4.48}$$

$\boldsymbol{g}$ schneidet bei der Brennweite $f$ die Ebene bei $\lambda = \frac{f}{Z_c}$, da dann gilt:

$$\lambda \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f}{Z_c} X_c \\ \frac{f}{Z_c} Y_c \\ \frac{f}{Z_c} Z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f}{Z_c} X_c \\ \frac{f}{Z_c} Y_c \\ f \end{pmatrix} \simeq \frac{f}{Z_c} \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \end{pmatrix}. \tag{4.49}$$

Hier wird das Modell etwas abgeändert. Der Ursprung des Weltkoordinatensystems wird in die Bildebene verschoben, so daß das optische Zentrum bei $\boldsymbol{C} = (0, 0, -f)^T$ liegt. Abbildung 26 verdeutlicht dies. Für die Geradengleichung und den Schnittpunkt mit

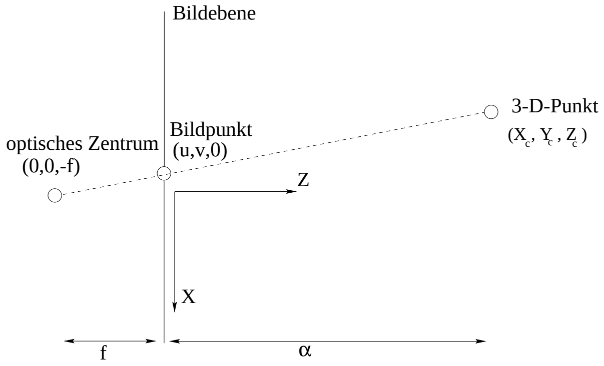



Abbildung 26: Darstellung des Lochkameramodells bei entsprechend gewählter Basis.

der Ebene ergibt sich dann

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + Z_c \beta} \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \end{pmatrix}. \tag{4.50}$$

Dabei sei $\beta$ das Inverse der Brennweite. Diese Darstellung ist bei numerischen Berechnungen stabiler, ändert aber nichts an den Grundprinzipien.

Für die projektive Tiefe $\alpha = Z_c$ gilt

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} u\beta \\ v\beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1 + Z_c\beta) \\ v(1 + Z_c\beta) \\ Z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix}. \tag{4.51}$$

Auf diese Weise können bei gegebenen Werten die dreidimensionalen Weltkoordinaten eines Punktes rekonstruiert werden. Für eine zweite Ebene ergibt sich eine andere Basis mit Bildpunkt $(X_r, Y_r, Z_r)^T$. Abbildung 27 verdeutlicht dies. Über eine Basistransforma-

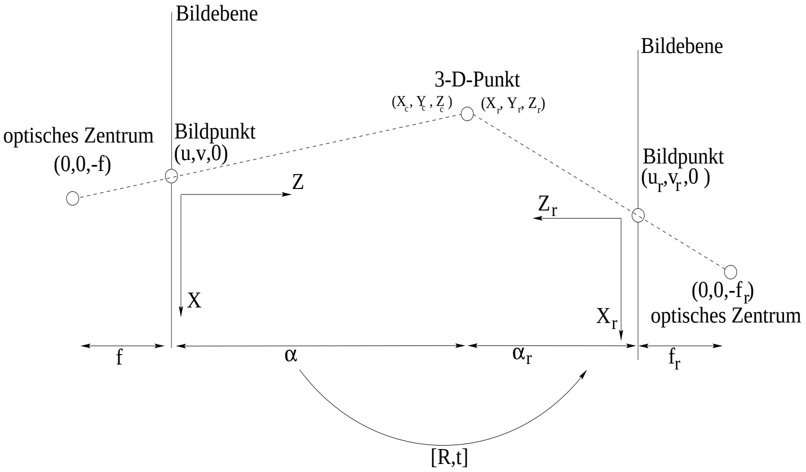



Abbildung 27: Darstellung von zwei Ebenen mit entsprechenden Basen.

tion läßt sich $(X_r, Y_r, Z_r)^T$ auf $(X_c, Y_c, Z_c)^T$ zurückführen:

$$\begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} + \Re_b \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{pmatrix}. \tag{4.52}$$

Dabei sei $\Re_b$ eine skalierte Rotationsmatrix:

$$\Re_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.53}$$

Analog gilt:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ v_r \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + Z_r\beta_r} \begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \end{pmatrix}. \tag{4.54}$$

Ein Bildpunkt $(u_r, v_r)^T$ des rechten Kamerabildes läßt sich über $(X_r, Y_r, Z_r)^T$ zu dem korrespondierenden Bildpunkt $(u, v)^T$ des linken Kamerabildes gleichsetzen, so daß sich jeweils zwei Gleichungen ergeben. Bei einem zweiten korrespondierenden Bildpunkt ergibt sich eine zusätzliche Unbekannte $\alpha_2$ für die zweite (i.a. unterschiedliche) projektive Tiefe des Punktes, ebenfalls mit zwei Gleichungen. Auf diese Art können mit ausreichend vielen Korrespondenzen genügend Gleichungen zur Bestimmung der Kameraparameter aufgestellt werden. Über einen iterierten extended Kalmanfilter mit den Parametern

$$K = (t_x, t_y, t_z\beta_r, \Re_b, \beta_r, \beta_l, \alpha_1, \dots \alpha_n) \tag{4.55}$$

wird der Fehler minimiert. Dabei wird insbesondere $\Re_b$ über eine Quaternion mit vier Freiheitsgraden, drei für die Richtung, einer für den Winkel, repräsentiert. Für genauere Informationen sei auf die Literatur ([2, 1]) verwiesen.

## 4.4 Betrachtung des herkömmlichen Verfahrens in der Geometrischen Algebra

In diesem Abschnitt erfolgt zunächst eine Herleitung der Kruppagleichungen im Rahmen der Geometrischen Algebra. Dafür werden die Grundkonzepte des vorherigen Abschnitts 4.3 übernommen. Im zweiten Abschnitt erfolgt eine Beschreibung der Kruppagleichungen in Form von Brackets. Dadurch bleibt die geometrische Interpretation erhalten und das Selektieren von degenerierten Fällen wird einfacher.

### 4.4.1 Herleitung der Kruppagleichungen in der Geometrischen Algebra

Für die Herleitung der Kruppagleichungen werden folgende Aufgaben gelöst:

1. Formulierung des absoluten Kegelschnitts $\Omega_\infty$ in der Geometrischen Algebra.
2. Formulierung des Bildes des absoluten Kegelschnitts $\omega$ im Rahmen der Geometrischen Algebra.
3. Ausnutzen des Dualitätssprinzips und der Epipole von zwei Kameras zur Formulierung von Polynomen der Gestalt $P_1(\tau) = k_0 + k_1 \cdot \tau + k_2 \cdot \tau^2$ und $P_2(\tau) = k'_0 + k'_1 \cdot \tau + k'_2 \cdot \tau^2$. Die Polynome liefern Zwangsbedingungen, die zur Kalibrierung verwendet werden können.

**Lösung der Aufgaben**

Zu 1.

Ein Kegelschnitt kann nach Kapitel 2.6.2 über fünf Punkte auf dem Kegelschnitt eindeutig definiert werden ([20]). Ein sechster Punkt $\boldsymbol{C}$ liegt auf dem durch $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A'}, \boldsymbol{B'}, \boldsymbol{C'}$ beschriebenen Kegelschnitt, genau dann, wenn:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{ABC}][\boldsymbol{AB'C'}][\boldsymbol{A'BC'}][\boldsymbol{A'B'C}] - [\boldsymbol{A'B'C'}][\boldsymbol{AB'C}][\boldsymbol{A'BC}][\boldsymbol{ABC'}] &= 0 && (4.56)\\ \Leftrightarrow [\boldsymbol{ABC}][\boldsymbol{A'B'C}] - \frac{[\boldsymbol{A'B'C'}][\boldsymbol{ABC'}]}{[\boldsymbol{AB'C'}][\boldsymbol{A'BC'}]}[\boldsymbol{AB'C}][\boldsymbol{A'BC}] &= 0. && (4.57) \end{aligned}$$

Die fünf Punkte aus $G_{1,3,0}$ zur Beschreibung des absoluten Kegelschnitts $\Omega_\infty$ seien:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A'} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.58}$$

Zunächst liegen diese fünf Punkte auf dem absoluten Kegelschnitt, da sie im Unendlichen liegen (die vierte Komponente der Vektoren ist Null) und die Bedingung $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A'}^T\boldsymbol{A'} = \boldsymbol{B'}^T\boldsymbol{B'} = \boldsymbol{C'}^T\boldsymbol{C'} = 0$ erfüllen. Weiterhin bietet sich diese Wahl an, da die Vektoren möglichst einfach und orthogonal gewählt wurden. Im Verlauf wird sich herausstellen, daß die Punkte leicht abgeändert gewählt werden sollten. Dies ändert jedoch nichts am Grundprinzip.

Zu 2.

Das Bild des absoluten Kegelschnitts wird durch das Bild seiner Punkte beschrieben. Dabei sei $P$ eine Projektionsmatrix mit $P = K[\Re|\boldsymbol{t}]$. Da die Punkte im Unendlichen liegen, fällt der $\boldsymbol{t}$-Teil bei den externen Kameraparametern weg. Damit ergibt sich für das Bild der Punkte:
$P\boldsymbol{A} = K[\Re|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{A} = K\Re\boldsymbol{A}$, $P\boldsymbol{B} = K[\Re|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{B} = K\Re\boldsymbol{B}$, $P\boldsymbol{A'} = K[\Re|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{A'} = K\Re\boldsymbol{A'}$, $P\boldsymbol{B'} = K[\Re|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{B'} = K\Re\boldsymbol{B'}$, $P\boldsymbol{C'} = K[\Re|\boldsymbol{t}]\boldsymbol{C'} = K\Re\boldsymbol{C'}$.
Mit dem Produkt $K\Re\boldsymbol{A}$ ist die Multiplikation der $3 \times 3$-Matrix $K\Re$ mit dem $3 \times 1$-Vektor $[I_3|0]\boldsymbol{A}$ gemeint, so daß die vierte Komponente des Vektors $\boldsymbol{A}$, die Null ist, im Bild vernachlässigt werden kann. Weiter gilt für eine beliebige Rotation $\Re$ folgendes Lemma:

**Lemma 4.2** *Sei $\boldsymbol{X}$ ein Punkt und $\Re$ eine Rotationsmatrix. Dann gilt:*
$\boldsymbol{X} \in \Omega_\infty \Leftrightarrow \Re\boldsymbol{X} \in \Omega_\infty$.

**Beweis :** Es gelte $\boldsymbol{X} \in \Omega_\infty$, also $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} = 0$. Einsetzen liefert
$(\Re\boldsymbol{X})^T(\Re\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^T\Re^T\Re\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} = 0$. Analog gilt die Rückrichtung.
**qed**

Dies ist eine schnelle Folgerung aus der in Lemma 4.1 gezeigten Invarianz des absoluten Kegelschnitts gegenüber euklidischen Transformationen. Als Repräsentationspunkte des absoluten Kegelschnitts werden nun $\Re^T\boldsymbol{A}$, $\Re^T\boldsymbol{B}$, $\Re^T\boldsymbol{A'}$, $\Re^T\boldsymbol{B'}$, $\Re^T\boldsymbol{C'}$ gewählt. Dabei sei $\Re$ die Rotationsmatrix aus den externen Kameraparametern. Für das Bild des absoluten Kegelschnitts ergibt sich folgende Gleichung: Ein Punkt $\boldsymbol{c}$ des Bildkoordinatensystems liegt nach Gleichung (4.57) und wegen $P(\Re^T\boldsymbol{A}) = K\Re\Re^T\boldsymbol{A} = K\boldsymbol{A}$ auf dem Bild des absoluten Kegelschnitts genau dann, wenn

$$[(K\Re\Re^T\boldsymbol{A})(K\Re\Re^T\boldsymbol{B})\boldsymbol{c}][(K\Re\Re^T\boldsymbol{A'})(K\Re\Re^T\boldsymbol{B'})\boldsymbol{c}] - \tag{4.59}$$

$$\frac{[(K\Re\Re^T\boldsymbol{A'})(K\Re\Re^T\boldsymbol{B'})(K\Re\Re^T\boldsymbol{C'})][(K\Re\Re^T\boldsymbol{A})(K\Re\Re^T\boldsymbol{B})(K\Re\Re^T\boldsymbol{C'})]}{[(K\Re\Re^T\boldsymbol{A})(K\Re\Re^T\boldsymbol{B'})(K\Re\Re^T\boldsymbol{C'})][(K\Re\Re^T\boldsymbol{A'})(K\Re\Re^T\boldsymbol{B})(K\Re\Re^T\boldsymbol{C'})]} \cdot \tag{4.60}$$

$$[(K\Re\Re^T\boldsymbol{A})(K\Re\Re^T\boldsymbol{B'})\boldsymbol{c}][(K\Re\Re^T\boldsymbol{A'})(K\Re\Re^T\boldsymbol{B})\boldsymbol{c}] = 0 \tag{4.61}$$

$$\Leftrightarrow [(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B})\boldsymbol{c}][(K\boldsymbol{A}')(K\boldsymbol{B}')\boldsymbol{c}] - \tag{4.62}$$

$$\frac{[(K\boldsymbol{A}')(K\boldsymbol{B}')(K\boldsymbol{C}')][(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B})(K\boldsymbol{C}')]}{[(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B}')(K\boldsymbol{C}')][(K\boldsymbol{A}')(K\boldsymbol{B})(K\boldsymbol{C}')]}[(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B}')\boldsymbol{c}][(K\boldsymbol{A}')(K\boldsymbol{B})\boldsymbol{c}] = 0. \tag{4.63}$$

Die externen Kameraparameter kann man auf diese Weise eliminieren und im Bruch stehen nur bekannte Punkte und die internen Kameraparameter. Weiter sind für den Bruch folgende Umformungen möglich:

$$\frac{[(K\boldsymbol{A}')(K\boldsymbol{B}')(K\boldsymbol{C}')][(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B})(K\boldsymbol{C}')]}{[(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B}')(K\boldsymbol{C}')][(K\boldsymbol{A}')(K\boldsymbol{B})(K\boldsymbol{C}')]} = \tag{4.64}$$

$$\frac{[K(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}')][K(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}')]}{[K(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}')][K(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}')]} = \tag{4.65}$$

$$\frac{det(K)[(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}')]det(K)[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}')]}{det(K)[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}')]det(K)[(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}')]} = \tag{4.66}$$

$$\frac{[(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}')][(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}')]}{[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}')][(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}')]} =: Inv. \tag{4.67}$$

Die Matrix $K$ kann über die Determinante außerhalb der Brackets gezogen werden, da für lineare Abbildungen das Bracket eine Definition der Determinante darstellt und für eine Determinante die Multiplikationsregel $det(K)det(\boldsymbol{ABC}) = det(K(\boldsymbol{ABC}))$ gilt.[4] Auf diese Weise kann man auch die internen Kameraparameter im Bruch eliminieren und den Bruch berechnen. Der Bruch stellt bezüglich der internen Kameraparameter eine Invariante dar. Bei den oben angegebenen Punkten aus (5.58) für $\Omega_\infty$ ergibt sich für die Invariante: $Inv = 2$. Um allgemeiner zu bleiben wird die Invariante im folgenden mit $Inv$ abgekürzt. Die Kegelschnittgleichung für $\boldsymbol{c}$ nimmt damit folgende Gestalt an:

$$[(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B})\boldsymbol{c}][(K\boldsymbol{A}')(K\boldsymbol{B}')\boldsymbol{c}] - Inv[(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B}')\boldsymbol{c}][(K\boldsymbol{A}')(K\boldsymbol{B})\boldsymbol{c}] = 0. \tag{4.68}$$

Zu 3. Zunächst sei eine weitere Bildebene angenommen, so daß eine Epipolargeometrie wie in Abschnitt 4.2 zugrunde gelegt werden kann. In den vorhergehenden Abschnitten wurde bereits bewiesen, daß die Matrix $B$ für das Bild des absoluten Kegelschnitts die Gleichung $B = K^{-T}K^{-1}$ erfüllt. Da das Duale einer Matrix proportional zu dem Inversen der Matrix ist, ergibt sich für das duale Bild des absoluten Kegelschnitts $B^* \sim B^{-1} = KK^T$.

**Lemma 4.3** *Aufgrund des Dualitätsprinzips gilt $B\boldsymbol{c} = l_c$. Dabei sei $l_c$ eine Gerade, die durch den Epipol $\mathbf{p}$ des Bildes und durch $\mathbf{c}$ führt.*

**Beweis :** $\boldsymbol{c}$ liege auf dem Bild des absoluten Kegelschnitts. Dann gilt:

$$0 = \boldsymbol{c}^T B\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}^T B^T \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}^T B^T)B^{-1}(B\boldsymbol{c}) = l_c^T B^* l_c. \tag{4.69}$$

[4]Siehe Abschnitt 2.6.2. D.Hestenes spricht in diesem Zusammenhang ([18]) auch von einem *Outermorphism.*

Diese Gleichungskette gilt genau für $B\boldsymbol{c} = l_c$. Das bedeutet, daß die Multiplikation eines Punktes $\boldsymbol{c}$ auf dem Bild des absoluten Kegelschnitts mit der Matrix $B$ des Bildes des absoluten Kegelschnitts, eine Gerade, die tangential zum Dualen des Bildes des absoluten Kegelschnitts ist, liefert. **qed**
Man setzt:

$$l_c = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.70}$$

Dabei sei $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ der Epipol des Bildes und $(1, \tau, 0)^T$ ein Punkt im Unendlichen. $l_c$ beschreibt damit in der Bildebene eine Gerade, die durch $\boldsymbol{p}$ und $(1, \tau, 0)^T$ eindeutig gegeben ist. Hierbei wurde die Notation und Idee aus Abschnitt 4.3 übernommen. Ziel ist es wieder mit $l_c$ eine Gerade, die tangential zum Bild des absoluten Kegelschnitts ist, zu erzwingen. In der Geometrischen Algebra stellt sich die Gerade als äußeres Produkt dar:

$$l_c = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{I}. \tag{4.71}$$

Mit $\tau$ wird analog zum herkömmlichen Verfahren (siehe Abschnitt (4.3)) ein Polynom erzeugt, mit dem die Kruppagleichungen aufgestellt werden können. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} B\boldsymbol{c} &= l_c && (4.72)\\ \Leftrightarrow \boldsymbol{c} &= B^{-1} l_c && (4.73)\\ \Leftrightarrow \boldsymbol{c} &= KK^T l_c. && (4.74) \end{aligned}$$

Damit erhält man für $\boldsymbol{c}$ einen Term, den man in die obige Kegelschnittgleichung (4.68) einsetzen kann:

$$\begin{aligned} [(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B})\boldsymbol{c}][(K\boldsymbol{A'})(K\boldsymbol{B'})\boldsymbol{c}] - Inv[(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B'})\boldsymbol{c}][(K\boldsymbol{A'})(K\boldsymbol{B})\boldsymbol{c}] &= 0\\ \Leftrightarrow [(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B})(KK^T l_c)][(K\boldsymbol{A'})(K\boldsymbol{B'})(KK^T l_c)] - &\\ Inv[(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B'})(KK^T l_c)][(K\boldsymbol{A'})(K\boldsymbol{B})(KK^T l_c)] &= 0\\ \Leftrightarrow [K(\boldsymbol{AB}(K^T l_c))][K(\boldsymbol{A'B'}(K^T l_c))] - Inv[K(\boldsymbol{AB'}(K^T l_c))][K(\boldsymbol{A'B}(K^T l_c))] &= 0\\ \Leftrightarrow det(K)[\boldsymbol{AB}(K^T l_c)]det(K)[\boldsymbol{A'B'}(K^T l_c)] - &\\ Inv \quad det(K)[\boldsymbol{AB'}(K^T l_c)]det(K)[\boldsymbol{A'B}(K^T l_c)] &= 0\\ \Leftrightarrow [\boldsymbol{AB}(K^T l_c)][\boldsymbol{A'B'}(K^T l_c)] - Inv[\boldsymbol{AB'}(K^T l_c)][\boldsymbol{A'B}(K^T l_c)] &= 0 \quad . \end{aligned}$$

In jedem Bracket stehen genau einmal die internen Parameter. Wegen

$$l_c = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.75}$$

ergibt sich ein Polynom vom Grad zwei bezüglich $\tau$, da das $\tau$ in jedem Bracket in jeder Zeile höchstens einmal vorkommt. Die folgende explizite Berechnung des Polynoms bestätigt dies. Eine Simulation in MAPLE zeigt, daß folgende Berechnungen gelten:

Sei $K := \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A'}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B'}, \boldsymbol{C'}$ wie in Formel (4.58) bereits gewählt.

Der Punkt $\boldsymbol{C'}$ kommt in den folgenden Berechnungen nicht mehr vor, beeinflußt aber den Wert der Invarianten $Inv$ aus Formel (4.68). Bei der Wahl der Punkte aus Gleichung (4.58) ergibt sich $Inv = 2$. Weiter gilt für die Epipolargerade $l_c$

$$l_c = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.76}$$

$$= \begin{pmatrix} -p_3\tau \\ p_3 \\ p_1\tau - p_2 \end{pmatrix}. \tag{4.77}$$

Damit ist weiter

$$K^T l_c = \begin{pmatrix} -k_{11}p_3\tau \\ -k_{12}p_3\tau + k_{22}p_3 \\ -k_{13}p_3\tau + k_{23}p_3 + p_1\tau - p_2 \end{pmatrix}. \tag{4.78}$$

Einsetzen liefert:

$$[(\boldsymbol{AB}(K^T l_c))][(\boldsymbol{A'B'}(K^T l_c))] = \tag{4.79}$$

$$-4(k_{13}p_3\tau - k_{23}p_3 - p_1\tau + p_2)p_3(-k_{12}\tau + k_{22}). \tag{4.80}$$

Für das zweite Bracketpaar gilt mit dem Wert $Inv = 2$:

$$Inv[(\boldsymbol{AB'}(K^T l_c))][(\boldsymbol{A'B}(K^T l_c))] = \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned} &-2(-k_{11}p_3\tau - ik_{12}p_3\tau + ik_{22}p_3 - ik_{13}p_3\tau + ik_{23}p_3 + ip_1\tau - ip_2) \\ &(k_{11}p_3\tau - ik_{12}p_3\tau + ik_{22}p_3 - ik_{13}p_3\tau + ik_{23}p_3 + ip_1\tau - ip_2). \end{aligned} \tag{4.82}$$

Für $Inv = 2$ ergibt sich:

$$[(\boldsymbol{AB}(K^T l_c))][(\boldsymbol{A'B'}(K^T l_c))] - Inv[(\boldsymbol{AB'}(K^T l_c))][(\boldsymbol{A'B}(K^T l_c))] = \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned} &4p_1\tau p_2 - 2p_1^2\tau^2 - 2k_{22}^2p_3^2 - 4k_{23}p_3p_1\tau + 4k_{23}p_3p_2 - 2k_{13}^2p_3^2\tau^2 - 2k_{12}^2p_3^2\tau^2 - 2k_{23}^2p_3^2 \\ &-2p_2^2 - 2k_{11}^2p_3^2\tau^2 + 4k_{12}p_3^2\tau k_{22} - 4k_{13}p_3\tau p_2 + 4k_{13}p_3^2\tau k_{23} + 4k_{13}p_3\tau^2 p_1. \end{aligned} \tag{4.84}$$

Ein Aufspalten des Polynoms in die Gestalt $P(\tau) = k_0 + k_1\tau + k_2\tau^2$ liefert

$$k_0 = -2k_{22}^2p_3^2 + 4k_{23}p_3p_2 - 2k_{23}^2p_3^2 - 2p_2^2 \tag{4.85}$$

$$k_1 = 4p_1p_2 - 4k_{23}p_3p_1 + 4k_{12}p_3^2k_{22} - 4k_{13}p_3p_2 + 4k_{13}p_3^2k_{23} \tag{4.86}$$

$$k_2 = -2p_1^2 - 2k_{13}^2p_3^2 - 2k_{12}^2p_3^2 - 2k_{11}^2p_3^2 + 4k_{13}p_3p_1. \tag{4.87}$$

Bis auf ein skalares Vielfaches stimmen diese Koeffizienten völlig mit den Koeffizienten des Polynoms nach dem herkömmlichen Verfahren ([11, 26, 25, 23]) überein. Da sich ein skalares Vielfaches bei der Erstellung der Kruppagleichungen wegkürzt, liefert obiges Verfahren bei zwei Epipolen genau die Kruppagleichungen. In Simulationen wurde festgestellt, daß eine Permutation der Punkte $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}'$, die den absoluten Kegelschnitt repräsentieren, die Gleichungen nicht beeinflussen. Also wurde im Rahmen der Geometrischen Algebra eine Herleitung der Kruppagleichungen gefunden.

### 4.4.2 Kruppagleichungen in der Bracketdarstellung

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die Darstellung der Koeffizienten $k_0, k_1, k_2$ des Polynoms $P(\tau)$ in Form von Brackets herzuleiten. Zunächst wird ein Bracket des Kegelschnitts betrachtet: $[\boldsymbol{AB}(K^T l_c)]$. Es gilt:

$$K^T l_c = K^T \begin{pmatrix} -p_3\tau \\ p_3 \\ p_1\tau - p_2 \end{pmatrix} = K^T \begin{pmatrix} 0 \\ p_3 \\ -p_2 \end{pmatrix} + K^T \begin{pmatrix} -p_3\tau \\ 0 \\ p_1\tau \end{pmatrix} = K^T t_r + K^T t_t. \quad (4.88)$$

Damit läßt sich $K^T l_c$ in zwei Vektoren teilen, in dem einen existieren nur Koeffizienten mit $\tau$, $K^T t_t$, in dem anderen nur Koeffizienten ohne $\tau$, $K^T t_r$. Dieses Teilen ist ein rein algebraischer *Trick* um eine Darstellung der Kruppagleichungen in Form von Brackets zu ermöglichen. Das Bracket läßt sich in zwei weitere Brackets spalten. Der Vektor des einen Brackets enthält kein $\tau$, der des anderen nur $\tau$. Es gilt:

$$[\boldsymbol{AB}(K^T l_c)] = [\boldsymbol{AB}\left(K^T \begin{pmatrix} 0 \\ p_3 \\ -p_2 \end{pmatrix}\right)] + [AB\left(K^T \begin{pmatrix} -p_3\tau \\ 0 \\ p_1\tau \end{pmatrix}\right)]. \quad (4.89)$$

Somit ergibt sich: $[\boldsymbol{AB}K^T l_c] = a_1 + \tau b_1$.
Jedes Bracket ist also ein Polynom über $\tau$, welches sich in Form von Brackets spalten und beschreiben läßt. Für die Brackets der Kegelschnittgleichung ergibt sich ein Polynom, das sich folgendermaßen umformen läßt:

$$\begin{aligned}
0 &= [(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B})\boldsymbol{c}][(K\boldsymbol{A}')(K\boldsymbol{B}')\boldsymbol{c}] - Inv[(K\boldsymbol{A})(K\boldsymbol{B}')\boldsymbol{c}][(K\boldsymbol{A}')(K\boldsymbol{B})\boldsymbol{c}] \Leftrightarrow & (4.90)\\
0 &= (a_1 + \tau b_1)(a_2 + \tau b_2) - Inv(a_3 + \tau b_3)(a_4 + \tau b_4) \Leftrightarrow & (4.91)\\
0 &= a_1 a_2 + \tau b_1 a_2 + a_1 \tau b_2 + \tau^2 b_1 b_2 - Inv(a_3 a_4 + a_3 a_4 \tau + b_3 a_4 \tau + b_3 b_4 \tau^2) \Leftrightarrow & (4.92)\\
0 &= \underbrace{a_1 a_2 - Inv(a_3 a_4)}_{k_0} + \tau(\underbrace{a_1 b_2 + b_1 a_2 - Inv(a_3 b_4 + a_4 b_3)}_{k_1}) & \\
&\quad + \tau^2(\underbrace{b_1 b_2 - Inv(b_3 b_4)}_{k_2}). & (4.93)
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten von Formel (4.88) besitzen folgende explizite Darstellung:

$$K^T t_r = \begin{pmatrix} 0 \\ k_{22}p_3 \\ k_{23}p_3 - p_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K^T t_t = \begin{pmatrix} -k_{11}p_3 \\ -k_{12}p_3 \\ -k_{13}p_3 + p_1 \end{pmatrix}. \tag{4.94}$$

Dabei ist $K^T t_t$ $\tau$-Teil und $K^T t_r$ der *Rest*-Teil von $K^T l_c$. Geometrisch läßt sich dies kaum interpretieren, da es sich um einen algebraischen Trick handelt. Für die Koeffizienten des Polynoms ergibt sich folgende explizite Darstellung:

$$\begin{aligned} k_0 &= [\boldsymbol{AB}(K^T t_r)][\boldsymbol{A'B'}(K^T t_r)] - Inv[\boldsymbol{AB'}(K^T t_r)][\boldsymbol{A'B}(K^T t_r)] && (4.95)\\ k_1 &= [\boldsymbol{AB}(K^T t_t)][\boldsymbol{A'B'}(K^T t_r)] + [\boldsymbol{AB}(K^T t_r)][\boldsymbol{A'B'}(K^T t_t)] \\ &\quad -Inv[\boldsymbol{AB'}(K^T t_r)][\boldsymbol{A'B}(K^T t_t)] - Inv[\boldsymbol{AB'}(K^T t_t)][\boldsymbol{A'B}(K^T t_r)] && (4.96)\\ k_2 &= [\boldsymbol{AB}(K^T t_t)][\boldsymbol{A'B'}(K^T t_t)] - Inv[\boldsymbol{AB'}(K^T t_t)][\boldsymbol{A'B}(K^T t_t)]. && (4.97) \end{aligned}$$

Da $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A'}, \boldsymbol{B'}, Inv$ bekannt sind, sind bei gegebenem Epipol $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ die einzigen Unbekannten die internen Kameraparameter. Diese lassen sich durch weitere Epipole und die aufgestellten Kruppagleichungen bestimmen.

### Vorteile der Darstellung der Kruppagleichungen in Brackets

Eine Formulierung der Koeffizienten der Kruppagleichungen in Form von Brackets ermöglicht eine geometrische Untersuchung der Gleichungen. Der Schwerpunkt liegt darin, zu untersuchen, wann die Gleichungen trivial sind, oder stark vereinfacht werden können. Zunächst werden $k_0$ und $k_2$ untersucht, $k_0$ erfüllt nach Gleichung(4.95) folgendes:

$$\begin{aligned} k_0 &= a_1 a_2 - Inv(a_3 a_4) && (4.98)\\ &= [\boldsymbol{AB}(K^T t_r)][\boldsymbol{A'B'}(K^T t_r)] - Inv[\boldsymbol{AB'}(K^T t_r)][\boldsymbol{A'B}(K^T t_r)] && (4.99)\\ &= det\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & k_{22}p_3 \\ 0 & 0 & k_{23}p_3 - p_2 \end{pmatrix} det\begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_{22}p_3 \\ 1 & i & k_{23}p_3 - p_2 \end{pmatrix} - && (4.100)\\ &\quad Inv \quad det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & 0 & k_{22}p_3 \\ 0 & i & k_{23}p_3 - p_2 \end{pmatrix} det\begin{pmatrix} i & i & 0 \\ 0 & 1 & k_{22}p_3 \\ 1 & 0 & k_{23}p_3 - p_2 \end{pmatrix}. && (4.101) \end{aligned}$$

$k_2$ erfüllt analog folgendes:

$$\begin{aligned}
k_2 &= b_1b_2 - Inv(b_3b_4) && (4.102)\\
&= [\boldsymbol{AB}(K^Tt_t)][\boldsymbol{A'B'}(K^Tt_t)] - Inv[\boldsymbol{AB'}(K^Tt_t)][\boldsymbol{A'B}(K^Tt_t)] && (4.103)\\
&= det\begin{pmatrix} 1 & i & -k_{11}p_3 \\ i & 1 & -k_{12}p_3 \\ 0 & 0 & -k_{13}p_3+p_1 \end{pmatrix} det\begin{pmatrix} i & 1 & -k_{11}p_3 \\ 0 & 0 & -k_{12}p_3 \\ 1 & i & -k_{13}p_3+p_1 \end{pmatrix} - && (4.104)\\
& \quad Inv \quad det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -k_{11}p_3 \\ i & 0 & -k_{12}p_3 \\ 0 & i & -k_{13}p_3+p_1 \end{pmatrix} det\begin{pmatrix} i & i & -k_{11}p_3 \\ 0 & 1 & -k_{12}p_3 \\ 1 & 0 & -k_{13}p_3+p_1 \end{pmatrix}. && (4.105)
\end{aligned}$$

Eine Untersuchung von $k_1$ ist zwar möglich, gestaltet sich aber ungleich schwieriger, da $k_1$ nach Gleichung (4.96) mehr Koeffizienten als $k_0$ und $k_2$ besitzt. Im Gegensatz zu den Kruppagleichungen aus Abschnitt 4.3 erhält man als algebraisches Ergebnis zwar dasselbe Polynom, in der Bracketdarstellung bleibt jedoch die Interpretation erhalten, und $k_0$ und $k_2$ können geometrisch interpretiert werden:
Dabei wird vor allem ausgenutzt, daß der Wert eines Brackets mit dem Wert der entsprechenden Determinante übereinstimmt. Der Wert einer Determinante ist Null, wenn der Rang der entsprechenden Matrix kleiner als drei ist. Es ist ersichtlich, daß für $p_3 = 0$ die internen Parameter wegfallen und ein triviales Polynom aufgestellt wird. Der Wert $p_3 = 0$ bedeutet, daß der Epipol im Unendlichen liegt, somit muß es zu einer Translation entlang der Bildebene gekommen sein, da nur für diesen Fall die Epipole im Unendlichen liegen.
Andere Fälle, die zur Reduktion des Polynoms führen, wie $-k_{13}p_3 + p_1 = 0$ oder $k_{23}p_3 - p_2 = 0$ sind offensichtlich, da in den entsprechenden Brackets der Rang zwei erzeugt wird, und somit die Werte der Brackets Null werden. Der Epipol ist im Bild in der Regel mit $p_3 = 1$ normiert, durch einsetzen erhält man dann die Aussagen $k_{13} = p_1$ und $k_{23} = p_2$, die zu einer Reduktion des Polynoms führen. Geometrisch kommt es also zu einer Überlagerung eines Wertes der internen Kameraparameter mit dem Wert des Epipols im Bild. Man erhält über die Untersuchung der Brackets ein einfaches Verfahren zur Erkennung, ob Polynome zu trivialen Kruppagleichungen führen.
Interessant ist auch, daß $k_0 = 0$, bzw. $k_2 = 0$ selbst Kegelschnittgleichungen darstellen. Für $k_1$ gilt diese Aussage nicht. Damit Kruppagleichungen nicht trivial werden, sollte natürlich $k_0 \neq 0$ und $k_2 \neq 0$ gelten. D.h. $K^Tt_t$ bzw. $K^Tt_r$ sollten nicht im Bild des absoluten Kegelschnitts liegen. Eine solche Beobachtung ist in der Literatur meines Wissens nach bisher nicht zu finden.

## 4.5 Verwendung des Theorems von Pascal zur Selbstkalibrierung

In diesem Abschnitt wird das Theorem von Pascal aus Abschnitt 2.6.2 zur Selbstkalibrierung verwendet. Eine Eigenschaft des Verfahrens zur Selbstkalibrierung über die Kruppagleichungen ist, daß Bildpunktkorrespondenzen von mindestens vier verschiedenen Kamerabildern erforderlich sind. Die Motivation dieses Abschnitts besteht darin, ein Verfahren zu entwickeln, mit dem man schon zwischen zwei Kamerabildern intern kalibrieren kann. Dazu wird das Theorem von Pascal verwendet:
Das Theorem von Pascal besagt: Für sechs Punkte auf einem Kegelschnitt gilt:

$$\underbrace{((\boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{c}' \wedge \boldsymbol{c}))}_{\boldsymbol{\alpha}'_1} \wedge \underbrace{((\boldsymbol{b}' \wedge \boldsymbol{c}) \vee (\boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{a}))}_{\boldsymbol{\alpha}'_2} \wedge \underbrace{((\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c}') \vee (\boldsymbol{b}' \wedge \boldsymbol{b}))}_{\boldsymbol{\alpha}'_3} = 0. \tag{4.106}$$

Abbildung 28, bzw. Abbildung 5, verdeutlichen dieses Theorem. Die $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}'$ sind

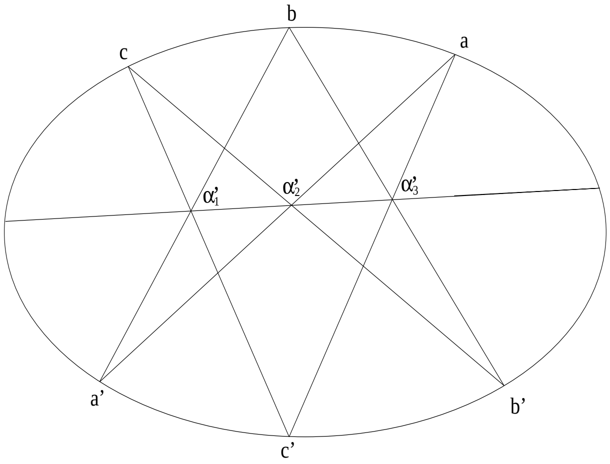



Abbildung 28: Skizze zum Theorem von Pascal: Die $\alpha'_i$ liegen auf einer Geraden.

dabei die Bilder von $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}', \boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}'$. Sie besitzen analog zum Abschnitt 4.4.1 die Gestalt

$$\boldsymbol{a} = K[\Re|0]\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{b} = K[\Re|0]\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{a}' = K[\Re|0]\boldsymbol{A}', \quad \boldsymbol{b}' = K[\Re|0]\boldsymbol{B}', \quad \boldsymbol{c}' = K[\Re|0]\boldsymbol{C}'.$$

Analog zum vorherigen Abschnitt wird $\boldsymbol{c} = KK^T l_c$ gesetzt. Abbildung 29 verdeutlicht das Szenario. Die Vektoren $\boldsymbol{e}_{12}$ und $\boldsymbol{e}_{21}$ stellen die Epipole dieser beiden Kamerabilder dar. Es gilt: $\boldsymbol{\alpha}'_2 = (\boldsymbol{b}' \wedge \boldsymbol{c}) \vee (\boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{a}) = [\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}']\boldsymbol{a} - [\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}]\boldsymbol{a}'$ und entsprechendes gilt für die anderen $\boldsymbol{\alpha}'_i$. Die $\boldsymbol{\alpha}'_i$ sind also Schnittpunkte von Geraden in der Bildebene.
Wie im vorherigen Abschnitt kann die Rotation der externen Kameraparameter durch eine geschickte Wahl von $\boldsymbol{A}$,...,$\boldsymbol{C}'$ eliminiert werden. Da das Theorem von Pascal gilt, kann man für die internen Kameraparameter folgende Umformungen und Vereinfachungen durchführen:

$$\boldsymbol{\alpha}'_1 \wedge \boldsymbol{\alpha}'_2 \wedge \boldsymbol{\alpha}'_3 \quad = \quad 0 \Leftrightarrow$$

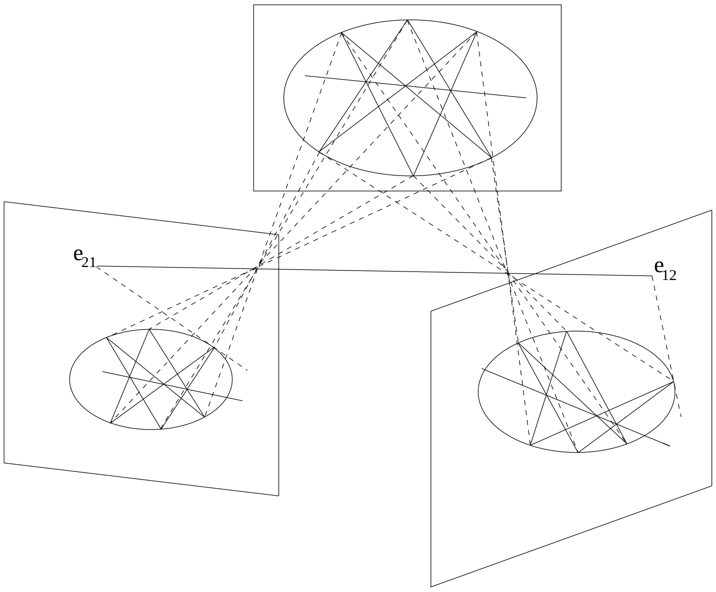



Abbildung 29: Das Theorem von Pascal in den Bildern des absoluten Kegelschnitts.

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\alpha'_1} \wedge \boldsymbol{\alpha'_2} \wedge \boldsymbol{\alpha'_3} \rangle_3 &= 0 \Leftrightarrow \\ det(\boldsymbol{\alpha'_1}, \boldsymbol{\alpha'_2}, \boldsymbol{\alpha'_3}) &= 0. \end{aligned} \tag{4.107}$$

Dabei bezeichnet $det(\boldsymbol{\alpha'_1}, \boldsymbol{\alpha'_2}, \boldsymbol{\alpha'_3})$ die Determinante der durch $\boldsymbol{\alpha'_i}$ induzierten Matrix. Der Punkt $\boldsymbol{\alpha'_1}$ kann weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha'_1} &= (\boldsymbol{a'} \wedge \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{c'} \wedge \boldsymbol{c}) && (4.108) \\ &= [\boldsymbol{a'bc'}]\boldsymbol{c} - [\boldsymbol{a'bc}]\boldsymbol{c'} && (4.109) \\ &= [(K\boldsymbol{A'})(K\boldsymbol{B})(K\boldsymbol{C'})](KK^T l_c) - [(K\boldsymbol{A'})(K\boldsymbol{B})(KK^T l_c)](K\boldsymbol{C'}) && (4.110) \\ &= det(K)K([\boldsymbol{A'BC'}](K^T l_c) - [\boldsymbol{A'B}(K^T l_c)]\boldsymbol{C'}) && (4.111) \\ &= det(K)K(\boldsymbol{\alpha_1}). && (4.112) \end{aligned}$$

Während $\boldsymbol{\alpha_1}$ einen Punkt im Unendlichen beschreibt, ist $\boldsymbol{\alpha'_1}$ ein Punkt der projektiven Ebene und ist als Projektion von $\boldsymbol{\alpha_1}$ zu interpretieren. Dabei wird während der Projektion bei den gewählten Punkten $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C'}$, $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B'}$ die vierte Komponente des Vektors, die Null ist, vernachlässigt, da $K$ eine dreidimensionale Matrix ist und in der projektiven Ebene gearbeitet wird. Über Gleichung (4.112) gelingt es den Punkt $\boldsymbol{\alpha'_1}$ der projektiven Ebene auf $\boldsymbol{\alpha_1}$ zu beziehen. Ähnliches läßt sich für $\boldsymbol{\alpha_2}$ und $\boldsymbol{\alpha_3}$ durchführen. Einsetzten von Gleichung (4.112) in Gleichung (4.107) liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= det(\boldsymbol{\alpha'_1}, \boldsymbol{\alpha'_2}, \boldsymbol{\alpha'_3}) \Leftrightarrow && (4.113) \\ 0 &= det(det(K)K\boldsymbol{\alpha_1}, det(K)K\boldsymbol{\alpha_2}, det(K)K\boldsymbol{\alpha_3}) \Leftrightarrow && (4.114) \\ 0 &= det(det(K)K(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3})) \Leftrightarrow && (4.115) \\ 0 &= det(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}) \Leftrightarrow && (4.116) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= ([\boldsymbol{A'BC'}](K^T l_c) - [\boldsymbol{A'B}(K^T l_c)]\boldsymbol{C'}) \wedge ([\boldsymbol{B'}(K^T l_c)\boldsymbol{A'}]\boldsymbol{A} - [\boldsymbol{B'}(K^T l_c)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{A'}) \wedge \\ &\quad ([\boldsymbol{A'AB'}]\boldsymbol{B} - [\boldsymbol{C'AB}]\boldsymbol{B'}). \qquad (4.117)\end{aligned}$$

Die internen Kameraparameter sind wie im vorherigen Abschnitt nur noch in $K^T l_c$ gegeben.
Der *rechte* Punkt $\boldsymbol{\alpha'_3}$ ist dabei ein invarianter Punkt, da für diesen Punkt nur vorgegebenen Punkte aus Formel (4.58) verwendet werden. Es wird in der projektiven Ebene $P^2$ gearbeitet, $\boldsymbol{c}$ sei also wieder definiert als $\boldsymbol{c} = KK^T l_c$ mit:

$$l_c = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.118)$$

Als nächstes erfolgt eine Untersuchung der homogenen $\boldsymbol{\alpha'_i}$, da

$$\boldsymbol{\alpha'_i} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \alpha_{i3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{i3}} \\ \frac{\alpha_{i2}}{\alpha_{i3}} \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.119)$$

Vorausgesetzt sei eine Rotation $\Re_1$ und Translation $t_1$ zwischen den Kameras. Die internen Parameter des Lochkameramodells seien

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.120)$$

Damit ergibt sich für die Projektionsmatrizen:

$$P_1 = K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.121)$$

$$P_2 = P_1[I|0] \begin{pmatrix} \Re_1 & \boldsymbol{t_1} \\ 0_3^T & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \qquad (4.122)$$

Für die optischen Zentren ergeben sich in Analogie zu Abschnitt 4.2:
$\boldsymbol{C_1} = (0, 0, 0, 1)^T$, $\boldsymbol{C_2} = [\Re_1|\boldsymbol{t_1}]\boldsymbol{C_1}$.
Die Epipole sind damit $\boldsymbol{e_{21}} = P_2\boldsymbol{C_1}$, $\boldsymbol{e_{12}} = P_1\boldsymbol{C_2}$.
Für die folgenden Berechnungen ist es zunächst einfacher, feste Werte für $\Re_1$ bzw. $\boldsymbol{t_1}$ anzunehmen, da sie später als gegeben vorausgesetzt werden und unabhängig von den eigentlichen Variablen sind. Ebenfalls sei vorausgesetzt, daß die internen Kameraparameter der Projektionsmatrizen gleich seien. Eine Verallgemeinerung erfolgt später.
Bevor die Invarianzeigenschaften der $\boldsymbol{\alpha'_i}$ allgemein berechnet werden erfolgt zum besseren

Verständnis ein kurzes Beispiel, welches die Struktur der Invarianten und die Vorgehensweise zur Ermittlung der $\boldsymbol{\alpha}_i'$ genau beschreibt. In diesem Beispiel sei

$$\begin{pmatrix} \Re_1 & \boldsymbol{t_1} \\ 0_3^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.123}$$

Damit läßt sich nach Gleichung (4.122) die Projektionsmatrix $P_2$ berechnen. Eingesetzt ergibt sich für die allgemeinen Epipole:
$\boldsymbol{e_{21}} = (k_{11} + 2k_{12} - 3k_{13}, 2k_{22} - 3k_{23}, -3)^T$, $\boldsymbol{e_{12}} = (2k_{11} - k_{12} + 3k_{13}, -k_{22} + 3k_{23}, 3)^T$.
Mit dem Epipol $\boldsymbol{e_{12}}$ wird nun weitergerechnet, d.h. die folgenden Betrachtungen gelten im ersten Kamerabild. Die nächsten Schritte können auch mit dem anderen Epipol im zweiten Kamerabild durchgeführt werden und liefern ähnliche Ergebnisse. Dies wurde über eine Simulation in MAPLE bestätigt. Für den Epipol $\boldsymbol{e_{12}}$, $\boldsymbol{c} = KK^T l_c$ und die Werte aus Gleichung (4.58) eingesetzt in die Gleichungen (4.108) und (4.117) gilt:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_1' &= (\boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{b}) \vee (\boldsymbol{c}' \wedge (KK^T l_c)) && (4.124) \\ &= [\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}'](K^T l_c) - [\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}(K^T l_c)]\boldsymbol{C}' && (4.125) \\ &= \begin{pmatrix} (-3+3i)k_{11}\tau \\ 3k_{11}\tau - ik_{12}\tau + ik_{22} + 2ik_{11}\tau - 3k_{12}\tau + 3k_{22} \\ ik_{11}\tau + 3k_{12}\tau - 3k_{22} + ik_{12}\tau - ik_{22} \end{pmatrix} && (4.126) \\ \boldsymbol{\alpha}_2' &= (\boldsymbol{b}' \wedge (KK^T l_c)) \vee (\boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{a}) && (4.127) \\ &= [\boldsymbol{B}'(K^T l_c)\boldsymbol{A}']\boldsymbol{A} - [\boldsymbol{B}'(K^T l_c)\boldsymbol{A}]\boldsymbol{A}' && (4.128) \\ &= \begin{pmatrix} -3ik_{11}\tau - 2k_{12}\tau + 2k_{22} - 2k_{11}\tau \\ -6i(k_{12}\tau - k_{22}) \\ -3k_{11}\tau - 4ik_{12}\tau + 4ik_{22} + 2ik_{11}\tau \end{pmatrix}. && (4.129) \end{aligned}$$

In diesem Kegelschnitt ist $\boldsymbol{\alpha}_3'$ ein fester Punkt für den gilt:

$$\boldsymbol{\alpha}_3' = (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{C}') \vee (\boldsymbol{B}' \wedge \boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da das Theorem von Pascal gelten muß, erhält man beim einsetzen von Gleichung (4.126), (4.129) und $\boldsymbol{\alpha}_3' = (1-i, 1-i, 2)^T$ ein Polynom zweiten Grades in $\tau$:

$$-40ik_{12}^2\tau^2 - 52ik_{11}^2\tau^2 - 16ik_{11}\tau k_{22} + 16ik_{11}\tau^2 k_{12} - 40ik_{22}^2 + 80ik_{12}\tau k_{22} = 0. \tag{4.130}$$

Dieses Polynom läßt sich nach $\tau$ lösen. Dabei existieren im allgemeinen zwei Lösungen, von denen eine beliebig gewählt werden kann. Algebraisch ist dies damit zu erklären, daß die Gleichung quadratisch in $\tau$ ist, geometrisch dadurch, daß von einem festen Punkt zu einem Kreis stets zwei Tangenten existieren.

$$\tau := \frac{16ik_{11}k_{22} - 80ik_{12}k_{22} + 24\sqrt{14}k_{11}k_{22}}{2(-40ik_{12}^2 - 52ik_{11}^2 + 16ik_{11}k_{12})}. \tag{4.131}$$

Dies kann man in die $\boldsymbol{\alpha}_i'$ einsetzen und erhält für die homogenen Koordinaten:

$$\alpha_{11}' = \frac{-(2k_{11} - 10k_{12} + 3ik_{11}\sqrt{14} + 8ik_{12} + 2k_{12}\sqrt{14} - 10ik_{11} + 2\sqrt{14}k_{11})}{2ik_{11} - 10ik_{12} - 3\sqrt{14}k_{11} - 4k_{12} - 4ik_{12}\sqrt{14} - 16k_{11} + 2ik_{11}\sqrt{14}} \tag{4.132}$$

$$\alpha_{12}' = \frac{2i(-2ik_{12} - 3k_{12}\sqrt{14} + 13ik_{11})}{2ik_{11} - 10ik_{12} - 3\sqrt{14}k_{11} - 4k_{12} - 4ik_{12}\sqrt{14} - 16k_{11} + 2ik_{11}\sqrt{14}} \tag{4.133}$$

$$\alpha_{21}' = \frac{(1-i)(2ik_{11} - 10ik_{12} - 3\sqrt{14}k_{11})}{5k_{11} - 4k_{12} + ik_{11}\sqrt{14} + 2ik_{12} + 3k_{12}\sqrt{14} - 13ik_{11} + ik_{12}\sqrt{14}} \tag{4.134}$$

$$\alpha_{22}' = \frac{11ik_{11} + 8ik_{12} + 3\sqrt{14}k_{11} - 6k_{12} - ik_{12}\sqrt{14} - 3k_{11} + 2ik_{11}\sqrt{14} - 3k_{12}\sqrt{14}}{5k_{11} - 4k_{12} + ik_{11}\sqrt{14} + 2ik_{12} + 3k_{12}\sqrt{14} - 13ik_{11} + ik_{12}\sqrt{14}}. \tag{4.135}$$

Wenn man nun senkrechte Bildachsen zugrunde legt, wie es bei einem CCD-Chip angenommen werden kann, ergibt sich nach Gleichung (4.4) $k_{12} = 0$. Eingesetzt in die Formeln (4.132)-(4.135) ergibt sich:

$$\alpha_{11}' = \frac{2i - 3\sqrt{14} + 10 + 2i\sqrt{14}}{2 + 3i\sqrt{14} + 16i + 2\sqrt{14}} \tag{4.136}$$

$$\alpha_{12}' = 26 \cdot \frac{i}{2 + 3i\sqrt{14} + 16i + 2\sqrt{14}} \tag{4.137}$$

$$\alpha_{21}' = \frac{(1+i)(-2i + 3\sqrt{14})}{-5i + \sqrt{14} - 13} \tag{4.138}$$

$$\alpha_{22}' = -\frac{-11 + 3i\sqrt{14} - 3i - 2\sqrt{14}}{-5i + \sqrt{14} - 13}. \tag{4.139}$$

Dies sind feste, von $K$ unabhängige Werte, die bezüglich $K$ invariant sind. Lediglich die Verschiebung zwischen den Kameras hat diese Gestalt beeinflußt. Obwohl der absolute Kegelschnitt invariant bezüglich der externen Kameraparameter der Projektionsmatrix ist, erhält man hier über den Epipol Elemente der externen Kameraparameter, da diese die Lage des Epipols und damit die Tangente zum Kegelschnitt beeinflussen. Die Invarianten sind komplexe Brüche und algebraisch nicht trivial.
Um obige Berechnung allgemein darstellen zu können, sei
$\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)^T = [I|0][\Re_1|\boldsymbol{t_1}]^{-1}\boldsymbol{C_1}$ und $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)^T = [I|0][\Re_1|\boldsymbol{t_1}]\boldsymbol{C_1}$.
In $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{s}$ wird die relative Verschiebung der Kameras zueinander zusammengefasst. Damit ist $\boldsymbol{e_{21}} = K[I|0][\Re_1|\boldsymbol{t_1}]^{-1}\boldsymbol{C_1} = K\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{e_{12}} = K[I|0][\Re_1|\boldsymbol{t_1}]\boldsymbol{C_1} = K\boldsymbol{s}$.
Die Epipole können auf diese Weise kompakter beschrieben werden. Für $\boldsymbol{\alpha}_i'$ erhält man für die homogenen Koordinaten (u.a.) folgende allgemeine Ausdrücke:

$$\alpha_{11}' = -\frac{(-s_3 s_1 s_2 + i s_3 \sqrt{s_3^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)} - i s_3^3 - i s_3 s_1^2 + s_1 \sqrt{s_3^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)} - i s_2 s_3^2)}{(-i s_3 s_1 s_2 - s_3 \sqrt{s_3^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)} - s_3^3 - s_3 s_1^2 + i s_1 \sqrt{s_3^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)} + s_2 s_3^2)} \tag{4.140}$$

$$\alpha_{21}' = \frac{-2 s_3 (s_3^2 + s_1^2)}{-i s_3 s_2 s_1 - s_3 \sqrt{s_3^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)} - s_3^3 - s_3 s_1^2 + i s_1 \sqrt{s_3^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)} + s_2 s_3^2} \tag{4.141}$$

$$\alpha'_{12} = \frac{(-1-i)(is_1 s_2+\sqrt{s_3^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)})s_3}{-is_3 s_1 s_2-s_3\sqrt{s_3^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)}+s_3 s_1^2+s_3^3+s_1\sqrt{s_3^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)}-is_2 s_3^2} \tag{4.142}$$

$$\alpha'_{22} = \frac{i(is_3 s_1 s_2+s_3\sqrt{s_3^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)}+is_1\sqrt{s_3^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)}+s_2 s_3^2+is_3 s_1^2+is_3^3)}{-is_3 s_1 s_2-s_3\sqrt{s_3^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)}+s_3 s_1^2+s_3^3+s_1\sqrt{s_3^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)}-is_2 s_3^2}. \tag{4.143}$$

Es ist zu beachten, daß die internen Kameraparameter wegfallen. Dies kann man für ein Kalibrationsverfahren verwenden. Vorausgesetzt seien die Epipole $\boldsymbol{e_{12}}$, $\boldsymbol{e_{21}}$ sowie die

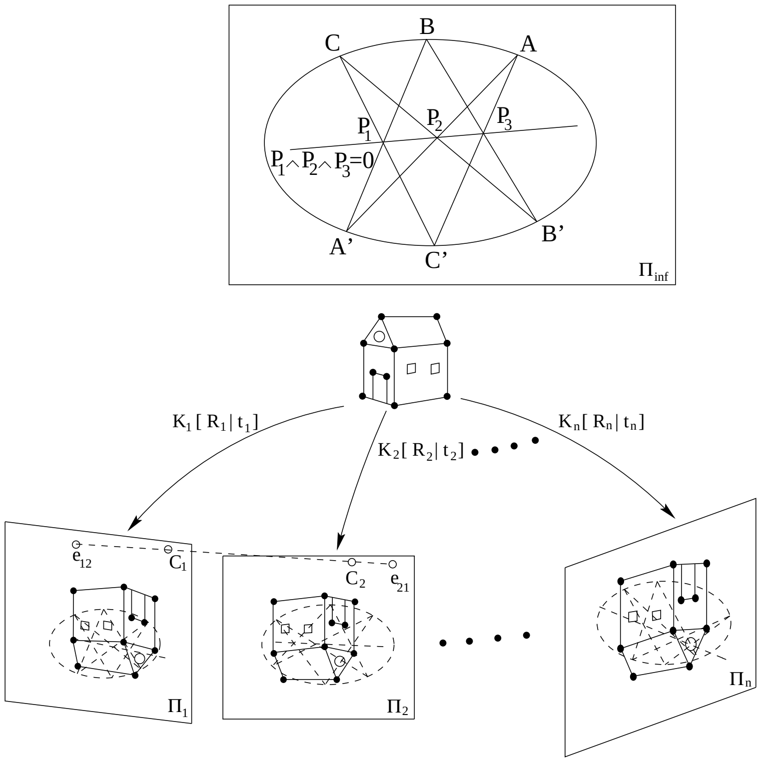



Abbildung 30: Szenario der Selbstkalibrierung: Punktkorrespondenzen und der absolute Kegelschnitt.

relative Verschiebung der Kameras zueinander. Wenn die Projektionsmatrix $P_1$ die Gestalt $P_1 = K[I|0]$ besitzt, ist die relative Verschiebung der Kameras nach Abschnitt 4.2 in den externen Kameraparametern der Projektionsmatrix $P_2$ gegeben. Abbildung 30 verdeutlicht das Szenario. Das Verfahren wird in den folgenden Schritten zusammengefaßt:

1. Berechnung der Invarianten $\boldsymbol{\alpha_i}'$. Dafür bieten sich obige allgemeine Formeln (4.140-4.143) an. Bei zwei Epipolen (eine Verschiebung) ergeben sich dabei acht Invarianten, da jeder Epipol für homogene $\boldsymbol{\alpha'_1}$, $\boldsymbol{\alpha'_2}$ vier Invarianten liefert.

2. Man setzt $K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und berechnet $l_c$. Zur Erfüllung des Pascalschen

Theorems wird ein Gleichungssystem nach $\tau$ gelöst, man erhält eine Darstellung der homogenen $\boldsymbol{\alpha}'_i$, in denen die Unbekannten von $K$ vorkommen. Man erhält ein Polynom mit den Unbekannten von $K$, da diesmal für den Epipol ein fester Wert eingesetzt wird.

3. Da die $\boldsymbol{\alpha}'_i$ konstant sind, kann man acht Gleichungen aufstellen und nach den Unbekannten von $K$ lösen.

Nach der Beschreibung eines Verfahrens zur Selbstkalibrierung bei sich ändernden internen Kameraparametern werden in Kapitel fünf Versuchsergebnisse in einer Simulationsumgebung durchgeführt und genauer analysiert. Bei den Gleichungen gibt es ähnlich wie bei den Kruppagleichungen Fälle, zum Beispiel bei trivialen Verschiebungen oder Null-Rotationen, in denen ein nicht lösbares Gleichungssystem aufgestellt wird. Da in der Praxis aufgrund von Meßungenauigkeiten mit nicht exakten Epipolen zu rechnen ist, müssen Fehlerminimierungsverfahren angewendet werden, um entsprechende Ergebnisse schätzen zu können. Auf die numerischen Probleme des Verfahrens in praktischen Beispielen wird in Abschnitt 5.3 genauer eingegangen.

### 4.5.1 Selbstkalibrierung bei veränderten internen Parametern

Vorausgesetzt seien zwei Kameras mit den Projektionsmatrizen $P_1$ und $P_2$, mit $K$ und $K'$ als unterschiedlichen internen Parametern. Faugeras und Luong erwähnen in der Literatur([11]) folgende Idee zur Selbstkalibrierung: Statt im zweiten Kamerabild $l_c$ zu betrachten, mit

$$l'_c = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \tau' \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.144}$$

und über $(1, \tau', 0)^T$ eine Gerade tangential zum Bild des absoluten Kegelschnitts im zweiten Kamerabild zu erzwingen, genügt es auch, die Multiplikation von der Fundamentalmatrix $F$ mit $(1, \tau', 0)^T$, also $F(1, \tau', 0)^T$ zu betrachten. Denn falls $(p'_1, p'_2, p'_3)^T \times (1, \tau', 0)^T$ tangential zum Bild des absoluten Kegelschnitts im zweiten Kamerabild ist, dann ist

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ \tau' \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \tau' \\ 0 \end{pmatrix} = l_c \tag{4.145}$$

ebenfalls tangential zum Bild des absoluten Kegelschnitts im zweiten Kamerabild. Es gelten weiter folgende Berechnungen:

**Lemma 4.4** *Die Fundamentalmatrix $F$ habe die Gestalt $F = \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ n & m & z \end{pmatrix}$. $\tau$ und $\tau'$ können über $\tau = \frac{a+b\tau'}{c+d\tau'}$ in einen projektiven Zusammenhang gebracht werden.*

**Beweis :** In der folgenden Gleichungskette bezeichne $\sim$ die Normierung mit einem geeigneten Skalar. Da skalare Vielfache in der projektiven Geometrie unerheblich sind (vergleiche Abschnitt 2.6.1), ist dies zulässig.

$$\begin{pmatrix} \tau \\ 1 \\ -e_2 + \tau e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.146}$$

$$\sim F \begin{pmatrix} 1 \\ \tau' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ n & m & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau' \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.147}$$

$$= \begin{pmatrix} a + b\tau' \\ c + d\tau' \\ n + m\tau' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{a+b\tau'}{c+d\tau'} \\ 1 \\ \frac{n+m\tau'}{c+d\tau'} \end{pmatrix}. \tag{4.148}$$

Man erhält unter anderem den Ausdruck $\tau = \frac{a+b\tau'}{c+d\tau'}$ wie in der Literatur([11]). **qed**
Auf diese Weise können $\tau$ und $\tau'$ analog zu Abschnitt 4.3, Formeln (4.34)-(4.36) über einen geeigneten Faktor aufeinander bezogen werden. Nähere Informationen sind der Literatur ([11]) zu entnehmen.
Das heißt, anstatt die beiden Gleichungen $l_c^T B l_c = 0$ und $l_c'^T B' l_c' = 0$ aufzustellen, genügt es, $l_c^T B l_c = 0$ und $(F(1,\tau',0)^T)^T B (F(1,\tau',0)^T) = 0$ zu verwenden, um Gleichungen für eine Kalibrierung der Kamera bezüglich des ersten Kamerabildes zu erzwingen. Dies kann man auch bei dem Kalibrationsverfahren über das Theorem von Pascal verwenden, da sich $F$ wieder invariant auf die $\alpha_{ij}$ auswirkt.
Bevor ein allgemeiner Fall betrachtet wird, ist es zunächst anschaulicher ein Beispiel zu betrachten. In diesem Beispiel sei die Rotationsmatrix wie in Abschnitt (4.5) Formel (4.123) definiert. Zur Herleitung dieser Eigenschaft wurde ein Programm in MAPLE geschrieben, das folgendermaßen arbeitet:
Die internen Kameraparameter seien in den jeweiligen Projektionsmatrizen

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K' = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.149}$$

Damit ergibt sich für die Projektionsmatrizen

$$P_1 = K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.150}$$

$$P_2 = K'[I|0][\Re_1|\boldsymbol{t_1}]^{-1}. \tag{4.151}$$

Zur Herleitung der Fundamentalmatrix werden beliebige Punkte im Raum definiert und abgebildet. Da $\boldsymbol{m}'^T F \boldsymbol{m} = 0$ für korrespondierende Punkte $\boldsymbol{m'} \sim \boldsymbol{m}$ nach Abschnitt 4.2

Formel (4.11) gelten muß, kann für $F_{3,3} = 1$ ein Gleichungssystem aufgestellt und gelöst werden. Es ergibt sich hierbei

$$F = \begin{pmatrix} -3\frac{K_{22}k_{22}}{v_2} & 0 & -\frac{(K_{11}-3K_{13})k_{22}K_{22}}{v_2} \\ 0 & -3\frac{K_{11}k_{11}}{v_2} & -\frac{k_{11}K_{11}(2K_{22}-3K_{23})}{v_2} \\ \frac{(2k_{11}+3k_{13})k_{22}K_{22}}{v_2} & -\frac{(k_{22}-3k_{23})k_{11}K_{11}}{v_2} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.152}$$

mit $v_2 = -3K_{22}k_{22}k_{13}K_{13}+k_{22}K_{22}K_{11}k_{13}+k_{22}K_{23}K_{11}k_{11}-2k_{22}K_{22}K_{13}k_{11}+2k_{23}K_{22}K_{11}k_{11}-3k_{23}K_{23}K_{11}k_{11}$.

Analog zum vorherigen Abschnitt wird statt $l_c = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \tau' \\ 0 \end{pmatrix}$ diesmal $l_c = F^T \begin{pmatrix} 1 \\ \tau' \\ 0 \end{pmatrix}$ betrachtet. Da das Theorem von Pascal gelten muß, kann analog zum vorherigen Abschnitt ein Gleichungssystem aufgestellt werden und nach $\tau'$ gelöst werden. Das folgende Gleichungssystem lautet

$$\begin{aligned}(-4ik_{22}^2k_{11}^2(13K_{22}^2+10K_{11}^2\tau'^2-4K_{22}K_{11}\tau'))/((3K_{22}k_{22}k_{13}K_{13}+k_{22}K_{22}K_{11}k_{13} \\ +k_{22}K_{23}K_{11}k_{11}-2k_{22}K_{22}K_{13}k_{11}+2k_{23}K_{22}K_{11}k_{11}-3k_{23}K_{23}K_{11}k_{11})^2) &= 0.\end{aligned}$$

Es ergeben sich wieder zwei Lösungen, von denen eine beliebige gewählt werden kann: Algebraisch ist dies damit zu erklären, daß die Gleichung quadratisch nach $\tau$ ist, geometrisch dadurch, daß von einem festen Punkt zu einem Kreis stets zwei Tangenten existieren.

$$\tau' = \frac{4K_{22}K_{11}+6IK_{22}K_{11}\sqrt{14}}{20(K_{11}^2)}. \tag{4.153}$$

Die Lösung kann wieder in die homogenen $\boldsymbol{\alpha}'_i$ eingesetzt werden, und für die festen Werte der Rotationsmatrix aus Formel (4.123) ergibt sich:

$$\alpha'_{11} = -\frac{i(-5i-4+i\sqrt{14})}{5i+2+2i\sqrt{14}} \tag{4.154}$$

$$\alpha'_{21} = \frac{-2+3i\sqrt{14}}{5i+2+2i\sqrt{14}} \tag{4.155}$$

$$\alpha'_{12} = \frac{10-10i}{-4i-2+3i\sqrt{14}-\sqrt{14}} \tag{4.156}$$

$$\alpha'_{22} = -\frac{8+6i-\sqrt{14}+3i\sqrt{14}}{-4i-2+3i\sqrt{14}-\sqrt{14}}. \tag{4.157}$$

Dabei ist $\boldsymbol{\alpha}'_3 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$ wieder invariant. Genau wie in Abschnitt 4.5 kommen in diesen Termen die internen Parameter nicht mehr vor, sie sind also invariant bezüglich

der internen Kameraparameter. Die festen Werte hängen nur von den externen Kameraparametern, beziehungsweise von der relativen Verschiebung der Kameras zueinander ab.
Um obige Berechnungen allgemeiner zu beschreiben, sei wieder von vorn herein $k_{12} = 0$, da die Formeln sonst sehr unübersichtlich werden.

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.158}$$

$P_1$ habe folgende Gestalt:

$$P_1 = K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.159}$$

Die Rotation und Translation sei:

$$[\Re_1|\boldsymbol{t_1}] = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.160}$$

$P_2$ kann ebenfalls symbolisch über ein Programm wie MAPLE berechnet werden. Die Fundamentalmatrix läßt sich wie folgt beschreiben:

$$F = K^{-T} E K'^{-1} \tag{4.161}$$

$$= \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-T} \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{4.162}$$

Nach Abschnitt 4.2 ist die Matrix $E$ die sogenannte *Essential*-Matrix mit den externen Kameraparametern $E = [\boldsymbol{t_1}]_\times \Re_1$. Wenn man nun die homogenen $\boldsymbol{\alpha}'_i$ berechnet, ergibt sich als allgemeine Darstellung:

$$\begin{aligned} \alpha'_{11} = \; & i(iE_{11}E_{22}^2 + iE_{11}E_{32}^2 - iE_{12}E_{21}E_{22} - iE_{12}E_{31}E_{32} \\ & -iE_{12}\sqrt{v_3} + E_{21}E_{12}^2 + E_{21}E_{32}^2 - E_{22}E_{11}E_{12} - E_{22}E_{31}E_{32} \\ & -E_{22}\sqrt{v_3} - E_{31}E_{12}^2 - E_{31}E_{22}^2 + E_{32}E_{11}E_{12} + E_{32}E_{21}E_{22} + E_{32}\sqrt{v_3})/ \\ & (iE_{11}E_{22}^2 + iE_{11}E_{32}^2 - iE_{12}E_{21}E_{22} - iE_{12}E_{31}E_{32} - iE_{12}\sqrt{v_3} - \\ & E_{31}E_{12}^2 - E_{31}E_{22}^2 + E_{32}E_{11}E_{12} + E_{32}E_{21}E_{22} + E_{32}\sqrt{v_3} - \\ & E_{21}E_{12}^2 - E_{21}E_{32}^2 + E_{22}E_{11}E_{12} + E_{22}E_{31}E_{32} + E_{22}\sqrt{v_3}) \end{aligned} \tag{4.163}$$

$$\alpha'_{12} = 2(-E_{21}E_{12}^2 - E_{21}E_{32}^2 + E_{22}E_{11}E_{12} + E_{22}E_{31}E_{32} + E_{22}\sqrt{v_3})/$$

$$\begin{aligned}
& (iE_{11}E_{22}^2 + iE_{11}E_{32}^2 - iE_{12}E_{21}E_{22} - iE_{12}E_{31}E_{32} \\
& -iE_{12}\sqrt{v_3} - E_{31}E_{12}^2 - E_{31}E_{22}^2 + E_{32}E_{11}E_{12} + E_{32}E_{21}E_{22} + E_{32}\sqrt{v_3} - \\
& E_{21}E_{12}^2 - E_{21}E_{32}^2 + E_{22}E_{11}E_{12} + E_{22}E_{31}E_{32} + E_{22}\sqrt{v_3}) \qquad (4.164) \\
\alpha'_{21} \;=\; & (1-i)(E_{11}E_{22}^2 + E_{11}E_{32}^2 - E_{12}E_{21}E_{22} - E_{12}E_{31}E_{32} - E_{12}\sqrt{v_3})/ \\
& (-iE_{11}E_{22}^2 - iE_{11}E_{32}^2 + iE_{12}E_{21}E_{22} + iE_{12}E_{31}E_{32} \\
& +iE_{12}\sqrt{v_3} - E_{21}E_{12}^2 - E_{21}E_{32}^2 + E_{22}E_{11}E_{12} + E_{22}E_{31}E_{32} \\
& +E_{22}\sqrt{v_3} - iE_{31}E_{12}^2 - iE_{31}E_{22}^2 + iE_{32}E_{11}E_{12} \\
& +iE_{32}E_{21}E_{22} + iE_{32}\sqrt{v_3}) \qquad (4.165) \\
\alpha'_{22} \;=\; & -(E_{11}E_{22}^2 + E_{11}E_{32}^2 - E_{12}E_{21}E_{22} - E_{12}E_{31}E_{32} - E_{12}\sqrt{v_3} \\
& -iE_{31}E_{12}^2 - iE_{31}E_{22}^2 + iE_{32}E_{11}E_{12} + iE_{32}E_{21}E_{22} \\
& +iE_{32}\sqrt{v_3} - E_{21}E_{12}^2 - E_{21}E_{32}^2 + E_{22}E_{11}E_{12} + E_{22}E_{31}E_{32} \\
& +E_{22}\sqrt{v_3})/(-iE_{11}E_{22}^2 - iE_{11}E_{32}^2 + iE_{12}E_{21}E_{22} \\
& +iE_{12}E_{31}E_{32} + iE_{12}\sqrt{v_3} - E_{21}E_{12}^2 - E_{21}E_{32}^2 \\
& +E_{22}E_{11}E_{12} + E_{22}E_{31}E_{32} + E_{22}\sqrt{v_3} - iE_{31}E_{12}^2 \\
& -iE_{31}E_{22}^2 + iE_{32}E_{11}E_{12} + iE_{32}E_{21}E_{22} + iE_{32}\sqrt{v_3}) \qquad (4.166)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
v_3 = {} & 2E_{11}E_{12}E_{21}E_{22} + 2E_{11}E_{12}E_{31}E_{32} + 2E_{21}E_{22}E_{31}E_{32} \\
& -E_{12}^2E_{31}^2 - E_{12}^2E_{21}^2 - E_{22}^2E_{31}^2 - E_{22}^2E_{11}^2 - E_{32}^2E_{21}^2 - E_{32}^2E_{11}^2. \qquad (4.167)
\end{aligned}$$

Die internen Kameraparameter kommen nicht mehr vor.
Ein Kalibrationsverfahren bei veränderten internen Parametern hat folgende Gestalt:

1. Als Voraussetzung seien die externen Kameraparameter $\Re_1$, $\boldsymbol{t_1}$ sowie Bildpunktkorrespondenzen $P_1X_1 \sim P_2X_1$ , $P_1X_2 \sim P_2X_2, \ldots P_1X_n \sim P_2X_n$ $(n \geq 8)$ gegeben.

2. Man berechnet die Invarianten $\boldsymbol{\alpha'_i}$. Dafür bieten sich zum Beispiel obige Formeln (4.163-4.166) an.

3. Aus den Bildpunktkorrespondenzen wird die Fundamentalmatrix geschätzt. In der Literatur ([11]) wird von Faugeras, Luong und Maybank folgender Ansatz vorgeschlagen:
   $min\{d(m'^T, Fm)^2 + d(m^T, F^Tm')^2\}$.
   Ähnlich wie die Fundamentalmatrix geschätzt wurde, kann auch der Epipol geschätzt werden:
   $\min\{\|Fp\|_2^2 : \|p\|_2^2 = 1\}$.

4. Man setzt $K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und stellt Gleichungen analog zu vorher auf, statt $l'_c$ verwendet man $F(1, \tau', 0)^T$. Diese Gleichungen können zur Erfüllung des Pascalschen Theorems nach $\tau'$ und $\tau$ gelöst werden. Die Lösung wird in die $\alpha'_{ij}$ eingesetzt, die mit den Invarianten übereinstimmen müssen.

5. Die Gleichungen werden gelöst, um die internen Kameraparameter $K$ zu erhalten.

Da in der Praxis wieder mit verrauschten Daten gerechnet werden muß, die zu einem in der Regel nicht lösbaren System von Gleichungen führen, ist die Anwendung von Schätzverfahren angebracht, die den Fehler minimieren und so die internen Parameter schätzen.

# 5 Experimente zur Selbstkalibrierung

In diesem Kapitel erfolgt eine genauere Untersuchung des Verfahrens zur Selbstkalibrierung über das Theorem von Pascal. Im ersten Abschnitt wird in einer Simulationsumgebung untersucht, wieviele Verschiebungen für eine vollständige Kalibrierung notwendig sind. Verschiedene Arten von Rotationen und Translationen werden dabei betrachtet. Es werden Rotationen um ein, zwei oder drei Achsen oder Verschiebungen entlang einer Achse, Ebene oder im dreidimensionalen Raum untersucht. Dann erfolgt eine Rauschabschätzung des Verfahrens: Bildpunktkorrespondenzen von zwei Szenarien werden verrauscht und die internen Kameraparameter geschätzt. Im zweiten Abschnitt folgen zwei Beispiele mit echten Bildern. Beim ersten Beispiel wird dabei die Kamera lediglich entlang einer Ebene verschoben und um eine Achse rotiert. Beim zweiten Beispiel wird die Kamera entlang aller drei Achsen verschoben und um drei Achsen rotiert. Abschnitt drei geht auf die numerischen Probleme des Kalibrierungsverfahrens ein.

## 5.1 Versuche in einer Simulationsumgebung

In diesem Abschnitt werden Versuche in einer Simulationsumgebung durchgeführt. Dabei werden Punkte im dreidimensionalen Raum sowie die Projektionsmatrizen mehrerer Kameras mit unterschiedlichen internen Kameraparametern vorgegeben. Die dreidimensionalen Punkte werden abgebildet und als Bildpunktkorrespondenzen verwendet. Das in Kapitel vier vorgestellte Verfahren zur Selbstkalibrierung über das Theorem von Pascal wird auf diese Bildpunktkorrespondenzen angewendet. Das Ergebnis der Kalibration kann dann mit den vorgegebenen Werten verglichen werden. In dieser Simulation werden bis zu vier Kameras verwendet, deren Verschiebungen und Rotationen zueinander bekannt seien. Da sich die internen Kameraparameter der Kameras verändern, wird das Verfahren aus Abschnitt (4.5.1) verwendet. Es werden stets die internen Kameraparameter der ersten Projektion ermittelt.
Die Matrix $\Re_i$ bezeichnet dabei eine Rotation um die $i$-Achse, analog zu Abschnitt 2.1. Der Translationsvektor sei $\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$ und $t_i = 0$ deutet an, daß die $i-$te Komponente der Translation Null sei. Da bis zu drei Verschiebungen stattfinden, die jeweils 8 Gleichungen liefern (siehe Abschnitt 4.5.1), werden insgesamt bis zu 24 Gleichungen aufgestellt, in denen nur noch die internen Kameraparameter $k_{11}$, $k_{13}$, $k_{22}$ und $k_{23}$ als Unbekannte vorkommen. Das System wird kalibriert, indem der Fehler dieser Gleichungen minimiert wird:

$$min\{\sqrt{|eqn_1|^2 + ... + |eqn_{24}|^2}^2 | k_{11} \in \mathbb{R}, k_{22} \in \mathbb{R}, k_{13} \in \mathbb{R}, k_{23} \in \mathbb{R}\}.$$

Eine Beschreibung der verwendeten Minimierungsverfahren erfolgt in Abschnitt 5.3. Die folgende Tabelle faßt die Ergebnisse in der Simulationsumgebung zusammen. Die fünfte

Spalte gibt an, welche internen Kameraparameter mit diesen drei Verschiebungen in diesen Experimenten kalibriert werden können und an einem Minimum in der Fehlerkurve liegen. Die sechste Spalte gibt bei einer Kalibrierung aller Kameraparameter an, wieviel Verschiebungen zur vollständigen Kalibrierung nötig waren.

| Nummer | 1. Bewegung | 2. Bewegung | 3. Bewegung | $k_{ij}$ | min. Anz. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\Re_y,\ t_y = 0$ | $\Re_y,\ t_y = 0$ | $\Re_y,\ t_y = 0$ | $k_{11}$, $k_{13}$, —, $k_{23}$ | |
| 2 | $\Re_y,\ t_x = 0$ | $\Re_y,\ t_x = 0$ | $\Re_y,\ t_x = 0$ | —, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | |
| 3 | $\Re_x,\ t_x = 0$ | $\Re_x,\ t_x = 0$ | $\Re_x,\ t_x = 0$ | —, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | |
| 4 | $\Re_x\Re_y,\ t_y = 0$ | $\Re_x\Re_y,\ t_y = 0$ | $\Re_x\Re_y,\ t_y = 0$ | —, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | |
| 5 | $\Re_x, \Re_y, \Re_z, t_z{=}0$ | | | — , — , — , — | |
| 6 | $\Re_x$ | | | $k_{11}$, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | 1 |
| 7 | $\Re_y$ | | | $k_{11}$, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | 1 |
| 8 | $\Re_z$ | | | $k_{11}$, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | 1 |
| 9 | $\Re_x\Re_y$ | | | $k_{11}$, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | 1 |
| 10 | $\Re_x\Re_z$ | | | $k_{11}$, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | 1 |
| 11 | $\Re_y\Re_z$ | | | $k_{11}$, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | 1 |
| 12 | $\Re_z\Re_y\Re_x$ | | | $k_{11}$, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | 1 |
| 13 | $\Re_z,\ t_x = 0$ | $\Re_z,\ t_y = 0$ | | $k_{11}$, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | 2 |
| 14 | $\Re_x,\ t_x = 0$ | $\Re_x,\ t_y = 0$ | | $k_{11}$, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | 2 |
| 15 | $\Re_y,\ t_x = 0$ | $\Re_y,\ t_y = 0$ | | $k_{11}$, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | 2 |
| 16 | $\Re_x\Re_y,\ t_y = 0$ | $\Re_x\Re_y,\ t_x = 0$ | | $k_{11}$, $k_{13}$, $k_{22}$, $k_{23}$ | 2 |

Tabelle 1. Abhängigkeiten der internen Kameraparameter von der Bewegung der Kamera.

Eine Translation entlang aller Achsen wird in der Tabelle nicht vermerkt. Wenn das Minimum des Fehlerpolynoms für eine Unbekannte $k_{ij}$ im Unendlichen angenommen wird, kann die Unbekannte $k_{ij} \in \mathbb{R}$ nicht bestimmt werden und ist undefiniert. Abbildung 31 zeigt typische Kurven, die während der Versuche beobachtet wurden. Um zweidimensionale Kurven zu erhalten, wurden dabei zwei Werte festgesetzt. Dabei wurde beobachtet, daß eine Veränderung der festen Werte nichts an der Gestalt der Fehlerkurve ändert. Lediglich das globale Minimum (falls vorhanden) verschiebt sich. Die Simulationen zeigen, daß es möglich ist, schon zwischen zwei Bildern zu kalibrieren. Eine solche Aussage ist in der Literatur (u.a. [11, 26, 23]) meines Wissens nach bisher nicht zu finden. Ein Problem des Kalibrationsverfahrens über Kruppagleichungen besteht darin, daß mit einer Verschiebung nur zwei Kruppagleichungen aufgestellt werden, so daß für ein vollständig lösbares System drei Verschiebungen zwischen vier Bildern nötig sind. Bei dem Kalibrationssverfahren über das Theorem von Pascal werden mit einer Verschiebung acht Gleichungen aufgestellt, so daß für ein vollständig lösbares System u.U. nur eine Ver-

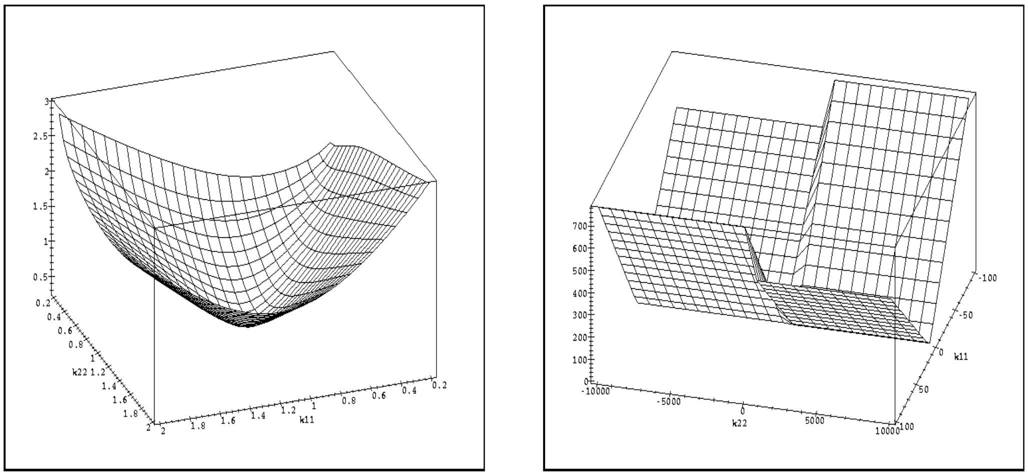



Abbildung 31: Typische Fehlerkurven der Simulationsumgebung. Die Werte $k_{13}$ und $k_{23}$ wurden mit festen Werten belegt und das Fehlerpolynom an den Stellen $k_{11}$ und $k_{22}$ ausgewertet.

schiebung nötig ist. In der Praxis ist man stets an einer vollständigen Kalibrierung interessiert. Bei gegebenen internen Kameraparametern ist es möglich, über eine Zerlegung der Essentialmatrix $E$ (siehe Abschnitt 4.2)

$$F = K^{-T} E K^{-1} \Leftrightarrow K^T F K = E \tag{5.1}$$

die externen Kameraparameter zu ermitteln. Dies läßt sich nach einer Schätzung der internen Kameraparameter auch hier durchführen. Auf diese Art kann man *neue* externe Kameraparameter schätzen und vergleichen und so einen Iterationsprozeß zur Kalibrierung durchführen, indem man diese Parameter zur erneuten internen Kalibrierung verwendet.

Als nächstes erfolgt im Rahmen der Simulationsumgebung eine Rauschabschätzung des Verfahrens zur Kalibration über das Theorem von Pascal. In einer Simulationsumgebung wird ein reales Szenario simuliert. Es werden Punkte im Raum definiert, die abgebildet werden und als nicht verrauschte Punktkorrespondenzen verwendet werden können. In dieser Simulation wurden jeweils 12 Bildpunktkorrespondenzen verwendet. Dann werden die Positionen der Punkte mit normalverteilten Störwerten verrauscht und verrauschte interne Kameraparameter ermittelt. Die Ergebnisse sind den folgenden Tabellen zu entnehmen. Für die Ergebnisse der letzten Spalte wurden in das Fehlerpolynom die exakten internen Kameraparameter eingesetzt. Dadurch läßt sich eine Grundfehlerabschätzung durchführen. Die Verschiebung selbst erfolgt entlang aller drei Achsen. Die internen Kameraprameter seien $k_{11} = k_{22} = 500$ und $k_{13} = k_{23} = 256$. Es wird also ein quadratisches Bild der Größe $512 \times 512$ Pixel angenommen.

Im ersten Versuch wurde bei den externen Kameraparametern um eine Achse rotiert. Dies entspricht Tabelle 1, Versuch 7.

| Rauschen(Pixel) | $k_{11}$ | $k_{13}$ | $k_{22}$ | $k_{23}$ | err(ex) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 500 | 256 | 500 | 256 | $10^{-8}$ |
| 0.1 | 505 | 259 | 509 | 261 | 0.001440 |
| 0.5 | 504 | 259.5 | 503.5 | 258 | 0.004897 |
| 0.75 | 498 | 254 | 503.5 | 258 | 0.001668 |
| 1 | 482 | 242 | 485 | 254 | 0.011517 |
| 1.25 | 473 | 220 | 440 | 238 | 0.031206 |
| 1.5 | 517 | 272 | 518 | 266 | 0.015 |
| 2 | 508 | 262.5 | 504 | 258.5 | 0.006114 |
| 2.5 | 515 | 268 | 501.9 | 257 | 0.011393 |
| 3 | 510 | 265 | 524 | 276 | 0.011440 |

Tabelle 2. Schätzung der internen Parameter bei einer Rotation um die $y$–Achse.

Im zweiten Versuch wurde bei den externen Kameraparametern um alle drei Achsen rotiert.

| Rauschen (Pixel) | $k_{11}$ | $k_{13}$ | $k_{22}$ | $k_{23}$ | err(ex) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 500 | 256 | 500 | 256 | $10^{-8}$ |
| 0.1 | 500 | 255.5 | 501 | 258 | 0.000659 |
| 0.5 | 498 | 254 | 499 | 255 | 0.001031 |
| 0.75 | 496 | 252 | 505 | 261 | 0.004013 |
| 1 | 508 | 263 | 508.5 | 266 | 0.004656 |
| 1.25 | 494 | 250 | 514 | 272 | 0.010244 |
| 1.5 | 502 | 255 | 488 | 240 | 0.007613 |
| 2 | 524 | 276 | 487 | 242 | 0.017349 |
| 2.5 | 490 | 252 | 540 | 334 | 0.025362 |
| 3 | 502 | 258 | 522 | 284 | 0.013075 |

Tabelle 3. Schätzung der internen Parameter bei einer Rotation um alle Achsen.

Eine Grundtendenz ist den Tabellen neben einigen Ausreißern deutlich zu entnehmen: Je genauer die Punktkorrespondenzen bestimmt werden, umso genauer ist das Verfahren. In der Literatur ([23]) wurden Rauschabschätzungen der Kruppagleichungen in einem ähnlichen Stil gemacht. Es läßt sich sagen, daß das Verfahren zur Selbstkalibrierung über das Theorem von Pascal gleichermaßen rauschempfindlich ist, wie die Kalibrierung über das bisher verwendete Verfahren der Kruppagleichungen.

## 5.2 Versuche mit echten Bildern

Es folgt die Anwendung des Verfahrens auf praktische Beispiele. Auf die Numerik zur Schätzung der Fundamentalmatrizen, Epipole oder Fehlerminimierungsverfahren wird in Abschnitt 5.3 eingegangen. Bei den Versuchen wird zuerst ein degenerierter Fall gewählt, bei dem ein Kameraparameter in der Simulationsumgebung nicht ermittelt werden kann. Ziel ist es herauszufinden, ob sich durch Rauschbeeinflussungen trotzdem lokale Minima für diesen Kameraparameter bilden. Im zweiten Beispiel wird ein Fall gewählt, bei dem in der Simulationsumgebung schon zwischen zwei Bildern kalibriert werden kann. Ziel ist es herauszufinden, ob dies trotz Rauschen auch in echten Bildern möglich ist.

### 5.2.1 Kalibrierung bei Rotation und Translation in einer Ebene

Vorausgesetzt sei die Bildfolge in Abbildung 32. Die Bilder wurden mit der rechten Ka-

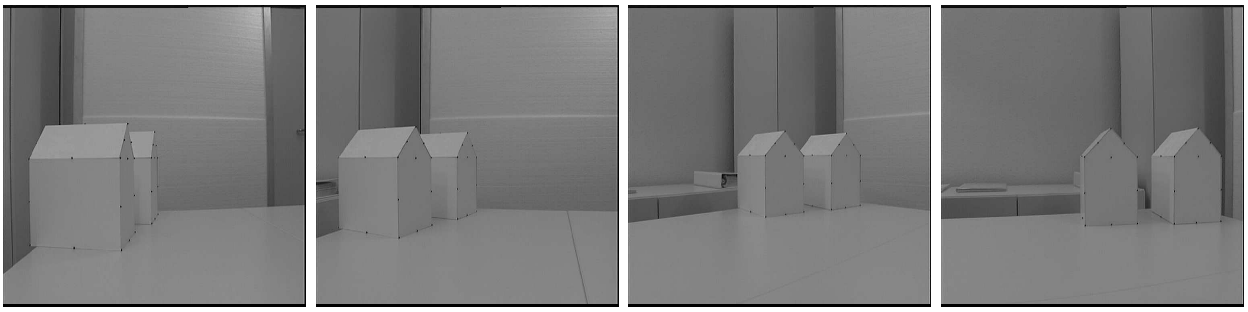


Abbildung 32: Bildfolge für das erste Beispiel.

mera des B21-Roboterkopfes der Universität Kiel aufgenommen. Es handelt sich um eine Bildfolge eines Binokularkopfes. Der Roboter bewegt sich stets in einer Ebene und man sieht, daß die $t_y$- Komponente der Translation stets Null ist, und die Kamera lediglich um eine Achse rotiert wird. Dies entspricht in der ersten Tabelle des vorhergehenden Abschnittes Versuch Nr.1. Die Ergebnisse der Simulationsumgebung deuten ein negatives Resultat an. Es wurden weiterhin Bildpunktkorrespondenzen semiautomatisch interaktiv herausgesucht. Daraufhin wurden Fundamentalmatrizen und Epipole geschätzt und das Kalibrationsverfahren über das Theorem von Pascal angewendet. Einige zugehörige Fehlerkurven in Abbildung 33 verdeutlichen, daß bis auf $k_{22}$ entsprechende interne Kameraparameter geschätzt werden können. Zur Erstellung der Kurven wurden jeweils wieder zwei Werte fest gesetzt. Für $k_{22}$ bildet sich kein lokales Minimum. Die Ergebnisse dieses Beispieles stimmen mit den Ergebnissen der Simulation überein.

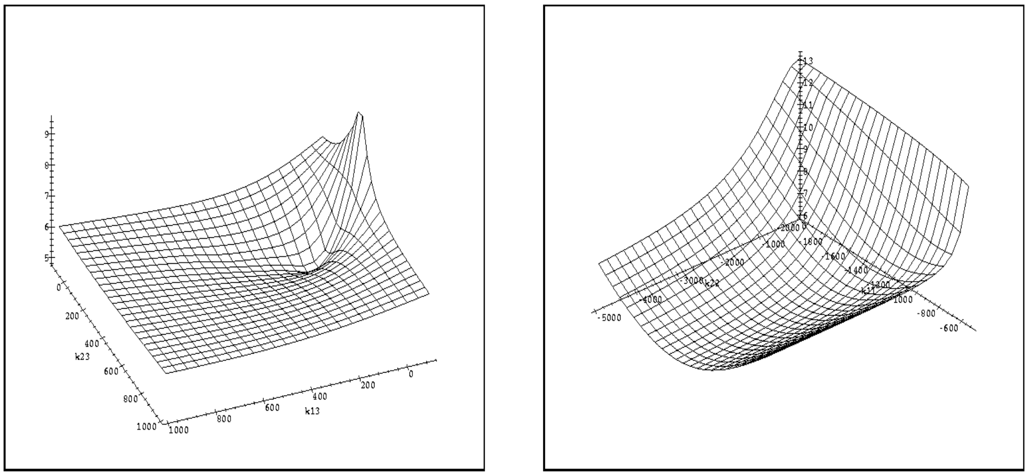


Abbildung 33: Fehlerkurven für das erste Beispiel. Zwei interne Kameraparameter wurden mit festen Werten belegt und das Fehlerpolynom an den beiden anderen internen Kameraparametern ausgewertet.

### 5.2.2 Kalibrierung zwischen zwei Bildern

Im zweiten Versuch findet eine Verschiebung entlang sämtlicher Achsen statt. Zum Auffinden relativ exakter Daten für die externen Kameraparameter wurde als Szene ein Kalibrierungswürfel verwendet. Gleichzeitig können die ermittelten internen Kameraparameter aus dem Kalibrationsverfahren über das Theorem von Pascal mit den ermittelten internen Kameraparametern eines Standardkalibrationsverfahrens, welches die Geometrie des Würfels nutzt, verglichen werden. Die beiden Aufnahmen sind in Abbildung 34

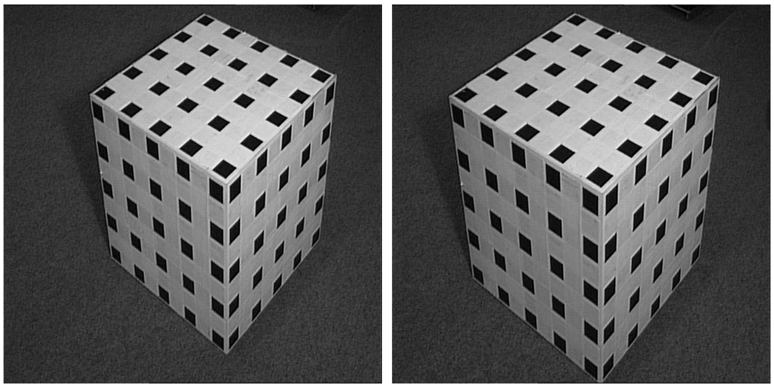


Abbildung 34: Bilder für das zweite praktische Beispiel.

dargestellt.
Als interne Kameraparameter wurden bei dem Kalibrationswürfel mit dem Standardkalibrationsverfahren einerseits

$k_{11} = 1200.66$, $k_{22} = 1154.77$, $k_{13} = 424.49$, $k_{23} = 264.389$ im ersten Kamerabild und $k_{11} = 1187.82$, $k_{22} = 1141.58$, $k_{13} = 386.797$, $k_{23} = 288.492$ im zweiten Kamerabild ermittelt. Da sorgfältig vorgegangen wurde, ist davon auszugehen, daß die internen Kameraparameter relativ konstant geblieben sein sollten. Die Abweichungen sind also auch auf Fehler, die durch Rauschen entstanden sind, zurückzuführen. Für die Ermittlung der

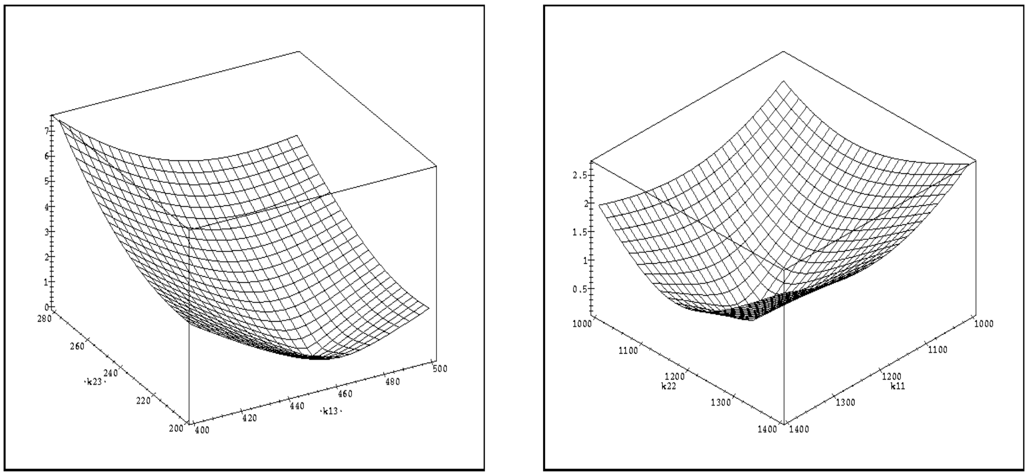



Abbildung 35: Fehlerkurven des zweiten praktischen Beispiels.

Kameraparameter wurden jeweils 160 Bildpunktkorrespondenzen betrachtet. Bei dem Kalibrationsverfahren über das Theorem von Pascal wurden lediglich 12 Bildpunktkorrespondenzen und die 8 entstehenden Gleichungen (s. Abschnitt 4.5.1) betrachtet. Die Fehlerkurven mit jeweils zwei festgesetzten Werten sind der Abbildung 35 zu entnehmen.
Für
$k_{11} = 1244$, $k_{22} = 1167$, $k_{13} = 462$ und $k_{23} = 217$ betrug der Wert des Fehlers $\sqrt{|eqn_1|^2 + ... + |eqn_8|^2}$ : 0.00496045. Das entspricht einer Einzelabweichung von ca. 0.00062. Dies ist also relativ exakt, und verglichen mit den internen Kameraparametern aus dem Standardverfahren eine gut approximierte Lösung, besonders wenn man bedenkt, daß die Kalibrierung lediglich mit 12 Bildpunktkorrespondenzen durchgeführt worden ist.
Eine Visualisierung des Fehlers ist mittels Fundamentalmatrizen möglich. Einerseits ist die Fundamentalmatrix durch die Bildpunktkorrespondenzen gegeben und andererseits, wie in Formel (4.162), durch die externen und internen Kameraparameter:

$$F = K^{-T}([\boldsymbol{t}]_\times \Re)K^{-1}. \tag{5.2}$$

Man kann nun Epipolargeraden von beiden Fundamentalmatrizen in einem Bild einzeichnen und vergleichen. Abbildung 36 zeigt solche Geraden. Es wurden jeweils vier

Punkte über die beiden Fundamentalmatrizen abgebildet und die resultierenden Geraden eingezeichnet. Eine Zuordnung der korrespondierenden Geraden ist leicht möglich. Es ist zu beachten, daß sich die Epipolargeraden in nahezu demselben Punkt schneiden, der mit dem ermittelten Epipol übereinstimmt. Auf diese Weise kann man den Fehler der Schätzung nicht nur über die Abweichung der Gleichungen von Null schätzen, sondern auch über die Fundamentalmatrizen visualisieren. Da aber beide Fundamentalmatrizen fehlerbehaftet sind, stellt die Visualisierung nur einen relativen Fehler dar.
Dieser Versuch bestätigt, daß man schon zwischen zwei Bildern eine interne Kalibrierung vornehmen kann.

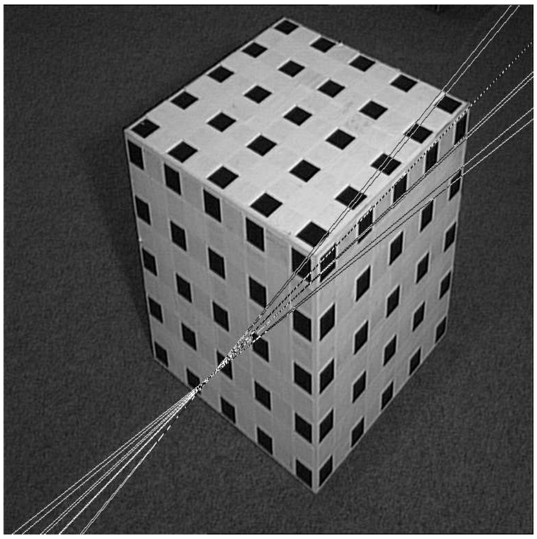


Abbildung 36: Epipolargeraden von beiden Fundamentalmatrizen.

## 5.3 Numerische Probleme des Kalibrierungsverfahrens

In diesem Abschnitt wird auf die bei der Kamerakalibrierung entstehenden numerischen Probleme eingegangen. Da die Daten verrauscht sind, kann man in echten Bildern die Gleichungssysteme nicht eindeutig lösen, sondern muß Fehlerminimierungsverfahren anwenden.
Während in der Simulationsumgebung bei acht Bildpunktkorrespondenzen zur Ermittlung der Fundamentalmatrix eine Matrix vom Rang zwei entsteht, ist dies bei verrauschten Daten nicht so. Stattdessen schlagen Faugeras, Luong und Maybank in [11] folgende Fehlerminimierung über Bildpunktkorrespondenzen vor:

$$min\{d(m'^T, Fm)^2 + d(m^T, F^T m')^2\}. \tag{5.3}$$

Dies ist ein Ansatz zur Fehlerminimierung, der auch hier verwendet und implementiert wurde. Ähnlich wie die Fundamentalmatrix geschätzt wurde, kann auch der Epipol geschätzt werden:

$$\min\{\|Fp\|_2^2 : \|p\|_2^2 = 1\}. \tag{5.4}$$

Dieser Ansatz wurde ebenfalls implementiert. Problematisch ist die Fehlerminimierung des Fehlerpolynoms aus den Gleichungen: $\sqrt{|eqn_1|^2 + ... + |eqn_n|^2}^2$. Da bis zu 24 Fehlerpolynome aufaddiert werden, wurden mehrere Verfahren der Numerik getestet. Dabei geht aus der Literatur ([29]) hervor, daß es keine guten allgemeinen Methoden zum Lösen nichtlinearer Systeme von Gleichungen gibt. Es gibt aber unterschiedliche Verfahren, die teilweise akzeptable Ergebnisse erzielen. Alle Verfahren haben die Gemeinsamkeit, daß eine relativ genaue Startapproximation von großem Vorteil ist.
Für alle diese Verfahren seien $N$ Unbekannte mit (mindestens) $N$ Funktionen vorausgesetzt:

$$F_i(x_1..x_N) = 0 \quad i = 1 \dots N. \tag{5.5}$$

Das *Newton-Raphson*-Verfahren verwendet die Taylorreihe.

$$F_i(x + \delta_x) = F_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta_{xj} + O(\delta_x^2) \quad i = 1 \dots N. \tag{5.6}$$

In Matrixnotation ergibt sich aus Gleichung (5.6)

$$F(x + \delta_x) = F(x) + J\delta x + O(\delta x^2). \tag{5.7}$$

Mit der Vernachlässigung der Terme zweiter Ordnung und der Beschreibung der partiellen Ableitungen über die Jacobimatrix

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \tag{5.8}$$

ergibt sich mit

$$F(x + \delta_x) = 0, \tag{5.9}$$

die Gleichung

$$J\delta_x = -F. \tag{5.10}$$

Diese Gleichung kann gelöst werden und als neue Approximation ergibt sich

$$x_{new} = x_{old} + \delta_x. \tag{5.11}$$

Für genauere Informationen wird auf die Literatur ([29]) verwiesen.
Dieses Verfahren hat sich aufgrund der Jacobimatrix, der damit verbundenen Ableitungen und der Kompliziertheit des Fehlerpolynoms als nicht praktikabel erwiesen. Die

Tatsache, daß es sich bei dem Fehlerpolynom um ein komplexes Polynom handelt, in dem eine reelle Lösung gesucht wird, erschwert die Fehlerminimierungsaufgabe zusätzlich.
Desweiteren wurde auch die sogenannte *Continuation Method* von Faugeras ([23]) getestet. Dabei werden vier der Gleichungen ausgewählt und gelöst. Da die Gleichungen quadratischer Natur sind, ergeben sich bis zu 16 Lösungen, die in die anderen Gleichungen eingesetzt werden, deren Fehler dann minimiert wird. Dies hat sich ebenfalls als ungünstig herausgestellt.
Die besten Ergebnisse wurden über eine Diskretisierung des vierdimensionalen Fehlerpolynoms erzielt. Dabei werden zunächst relativ grob Fehlerpolynome an regelmäßigen Stellen mit einer festen Schrittzahl ausgewertet und das globale Minimum dieses groben Gitters gespeichert. Falls das Minimum eines Koeffizienten am Rand des abgetasteten Intervalls angenommen wird, wird das Intervall entsprechend verschoben. Das Minimum innerhalb eines Intervalls wird dann über ein feineres Gitter über der Oberfläche weiter minimiert, bis man eine akzeptable Approximation erhält. Dieses Verfahren wurde für die praktischen Beispiele mit gutem Erfolg verwendet. Aufgrund der vierdimensionalen Oberfläche handelt es sich aber um ein relativ aufwendiges Verfahren. Bei diesem Verfahren ist ebenfalls eine gute Startapproximation von Vorteil, auch deshalb, weil in der Funktion Singularitäten auftreten.
Weiter sollte darauf hingewiesen werden, daß das Fehlerpolynom aufgrund der hochgradigen Brüche extrem anfällig ist. Selbst Maschinengenauigkeit ist beim Rechnen nicht exakt genug. Aus diesem Grunde erfolgt die Implementierung des Verfahrens in MAPLE. Dasselbe Problem tritt aber auch bei den Kruppagleichungen auf, wie in der Literatur ([11]) bemerkt wird. Dies ist einer der Gründe dafür, daß eine Echtzeitimplementierung der Kalibrationsverfahren, zur Zeit weder durch Kruppagleichungen noch über das Theorem von Pascal möglich ist.

# 6 Diskussion und Ausblick

Der wesentliche Beitrag der Arbeit besteht in der Entwicklung eines Selbstkalibrierungsverfahrens zur Ermittlung der internen Kameraparameter über das Theorem von Pascal. Das in Kapitel drei untersuchte Gesetz von Listing ermöglicht unter geeigneten Voraussetzungen eine Reduktion der Freiheitsgrade zur Beschreibung von Kamerarotationen von einem dreidimensionalen zu einem zweidimensionalen Problem. Auf die Problematik bei der *klassischen Stereokamerakopfanordnung* ist eingegangen worden.
Bei der Untersuchung der internen Kameraparameter wurden die Ideen aus der Literatur verwendet, reformuliert und erweitert. Die Formulierung der Kruppagleichungen in Form von Brackets ist mit der gesamten Herleitung meines Wissens nach neu, nicht trivial und ermöglicht eine Interpretation der Gleichungen. Eine Untersuchung des Theorems von Pascal zur internen Kalibrierung ist ebenfalls noch nicht durchgeführt worden. Dies mag vor allem daran liegen, daß im Matrizenkalkül Anschauungen verloren gehen, die im Konzept der Geometrischen Algebra genutzt werden können. Durch die Untersuchung des Theorems von Pascal ist es damit möglich, schon zwischen zwei Kamerabildern bei gegebenen externen Kameraparametern die internen Kameraparameter zu ermitteln. Mit dem herkömmlichen Verfahren über die Kruppagleichungen braucht die Lage der Kameras zueinander nicht bekannt zu sein. Es werden aber Bildpunktkorrespondenzen zwischen drei bis vier Kamerabildern benötigt. Das Verfahren zur internen Kalibrierung über das Theorem von Pascal beruht auch auf dem Vorhandensein von Invarianzen im Bild des absoluten Kegelschnitts. Genauso wie im herkömmlichen Verfahren über Kruppagleichungen wurden die in den Epipolen und Fundamentalmatrizen enthaltenen internen Kameraparameter von den externen Kameraparametern entkoppelt. Dabei können bei dem Verfahren über das Theorem von Pascal mehr Gleichungen aufgestellt werden als bei dem herkömmlichen Verfahren über Kruppagleichungen. Daher ist hier schon eine interne Kalibrierung zwischen zwei Kamerabildern möglich. Bewegungen in einer Ebene, wie sie bei einem Binokularkopf der Fall sind, führen zu einer unvollständigen internen Kalibrierung, wie in Abschnitt 5.1 und Abschnitt 5.2.1 herausgearbeitet wird. Man müßte also bei den Kameras des Binokularkopfes eine Verschiebung entlang aller Achsen voraussetzen, um zwischen diesen beiden Kameras vollständig kalibrieren zu können.
Weiter bietet sich für die Zukunft eine Untersuchung der *Quadriks* als Erweiterung der Kegelschnitte an. In der Literatur wurden schon mehrere Verfahren zur Kalibrierung mit Quadriks vorgestellt ([33, 34]). Quadriks können auch in der Geometrischen Algebra über Brackets definiert werden. Eine Untersuchung ist aufgrund der hier gesammelten positiven Erfahrungen mit Kegelschnitten vielversprechend. Wegen der Rauschproblematik der Bilder und der Kompliziertheit der Fehlerpolynome ist für die Zukunft eine Optimierung der Fehlerminimierungsverfahren wichtig. Mit den zur Zeit verfügbaren Mitteln ist durch die Fehleranfälligkeit beim Rechnen in Maschinengenauigkeit eine Im-

plementierung in eine hohe Programmiersprache wie C oder C++ nicht möglich.
Ein weiterer interessanter Ansatz ist eine *Umschaltung* zwischen verschiedenen Kameramodellen. Bilder von Objekten in großer Entfernung werden von Teilen der internen Kameraparameter immer weniger beeinflußt. Es gibt zum Beispiel Kameramodelle, die nur zwei statt vier interne Kameraparameter besitzen, diese setzen eine gewisse Entfernung der Objekte zur Kamera voraus und liefern immer noch akzeptable Ergebnisse in der Praxis. So können je nach Aufgabenstellung verschiedene Kameramodelle verwendet werden. Dadurch können sich die Gleichungen wesentlich vereinfachen, da zum Beispiel nur noch zwei statt vier Unbekannte vorkommen. Je nach Aufgabenbereich ist dadurch eine schnellere, vermutlich aber auch ungenauere Kalibrierung möglich.
Abschließend läßt sich sagen, daß es mit dieser Arbeit gelungen ist, neben der Modellierung von Augenbewegungen eine Erweiterung des herkömmlichen Verfahrens zur internen Kameraselbstkalibrierung vorzunehmen, die eine geometrische Interpretation der aufgestellten Kruppagleichungen zuläßt. Weiterhin wird über das Theorem von Pascal ein neuer Zugang zur internen Kameraselbstkalibrierung ermöglicht, mit dem man schon zwischen zwei Kamerabildern intern kalibrieren kann.

# 7 Anhang

## Literatur


[1] A. Azarbayejani, B. Horowitz, and A. Pentland. Recursive estimation of structure and motion using relative orientation constraints. *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 93:pp.294–299, 1994.

[2] A. Azarbayejani and A.P. Pentland. Recursive estimation of motion, structure, and focal length. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17:pp.562–575, 1995.

[3] E. Bayro-Corrochano, K. Daniilidis, and G. Sommer. Hand-eye calibration in terms of motion of lines using geometric algebra. *10th. Scandinavian conference on Image analysis, June 9-11, Lapperanta, Finnland*, pages pp.397–404, 1997.

[4] E. Bayro-Corrochano, J. Lasenby, and G. Sommer. Geometric algebra: A framework for computing point and line correspondences and projective structure using $n$ uncalibrated cameras. *IEEE Proceedings of International Conference on Pattern Recognition'96 Viena, Austria*, I:pp.334–338, 1996.

[5] H. Busemann and P.J. Kelly. Projective geometry and projektive matrices. *Academic Press inc. Publishers New York*, 1953.

[6] RHS. Carpenter. Movements of the Eyes. *Pion*, 2nd Edition, 1988.

[7] F. Devernay and O. Faugeras. From projective to euclidean reconstruction. In *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition 96*, pages pp.264–269, 1996.

[8] O. Faugeras. Three-Dimensional Computer Vision, A Geometric Viewpoint. *Mit Press, Cambridge*, 1993.

[9] O. Faugeras and L. Robert. What can two images tell us about a third one? *International Journal of Computer Vision*, 18:pp.5–19, 1996.

[10] O.D. Faugeras. What can be seen in three dimensions with an uncalibrated stereo rig? *Proceedings of the 2nd European Conference on Computer Vision, Santa Margherita Ligure, Italy*, pages pp.563–578, 1992.

[11] O.D. Faugeras, Q.T. Luong, and S.J. Maybank. Camera self-calibration: Theory and experiments. *Proceedings of the 2nd European Conference on Computer Vision*, pages pp.321–334, 1992.

[12] O.D. Faugeras and S. Maybank. Motion from point matches: Multiplicity of solutions. *International Journal of Computer Vision*, 4:pp.225–246, 1990.

[13] H. Ferner. Anatomie des Nervensystems und der Sinnesorgane des Menschen. *Reinhardts Medizin Grundrisse*, A, 1970.

[14] R. Hartley. In defence of the 8-point algorithm. *Proceedings of the 5th. International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Urbana-Champaign, Illinois, USA*, pages pp.1064–1070, 1995.

[15] R.I. Hartley. Kruppa's equations derived from the fundamental matrix. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19:pp.133–135, 1997.

[16] R.I. Hartley and P. Sturm. Triangulation. *Computer Vision and Image understanding, Academic Press*, 68(2):pp.146–157, 1997.

[17] T. Haslwanter. Mathematics of three-dimensional eye rotations. *Vision Research*, 35:pp.1727–1739, 1995.

[18] D. Hestenes. The Design of Linear Algebra and Geometry. *Acta Applicandae Mathematicae*, 23:pp.65–93, 1991.

[19] D. Hestenes. Invariant body kinematics: I. Saccadic and compensatory eye movements. *Neural Networks*, 7:pp.65–77, 1994.

[20] D. Hestenes and R. Ziegler. Projective geometrie with clifford algebra. *Acta Applicandae Mathematicae*, 23:pp.25–63, 1991.

[21] Quang L. Self-calibration of an Affine Camera from Multiple Views. *International Journal of Computer Vision*, 19(1):pp.93–105, 1996.

[22] Q.T. Luong and O.D. Faugeras. The fundamental matrix: Theory, algorithms, and stability analysis. *International Journal of Computer Vision*, 17:pp.43–76, 1996.

[23] Q.T. Luong and O.D. Faugeras. Self-Calibration of a moving camera from point correspondences and fundamental matrices. *International Journal of Computer Vision*, 22:pp.261–289, 1997.

[24] H.A. Mallot. Sehen und die Verarbeitung visueller Informationen. *Vieweg Verlag*, pages 29–47, 1998.

[25] S. Maybank. Theory of reconstruction from image motion. *Springer Verlag*, pages 173–215, 1992.

[26] S.J. Maybank and O.D. Faugeras. A Theory of self-calibration of a moving camera. *International Journal of Computer Vision*, 8:pp.123–151, 1992.

[27] A.B. Mc.Naught and Callander R. Illustrated Physiology. *E and S Livingstone Edinburgh and London*, 2nd Edition, 1970.

[28] J.L. Mundy and A. Zisserman. Geometric invariants in computer vision. *Mit Press, Cambridge, Massachusetts, USA*, 1992.

[29] W.H. Press, Teukolsky S.A., Vetterling W.T., and Flannery B.P. Numerical Recipes in C. *Cambridge University Press*, 1994.

[30] H.S. Schiebler and W. Schmidt. Zytologie, Histologie, Entwicklungsgeschichte, makroskopische und mikroskopische Anatomie des Menschen. *Springer Verlag*, 5. Auflage:pp.913, 1991.

[31] F. Schmidt and G. Thews. Physiologie des Menschen. *Springer Verlag*, 25. Auflage:880, 1993.

[32] Y. Suzuki, D. Straumann, B.J.M. Hess, and V. Hen. Changes of listing's plane under physiological and pathological condition. *Information processing underlying gaze control. Oxford:Pergamon.*, A:pp.75–86, 1994.

[33] B. Triggs. Autocalibration and the absolute quadric. *IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, 15:pp.609–614, 1997.

[34] B. Triggs. Linear projective reconstruction from matching tensor. *Image and Vision Computing*, 15:pp.617–625, 1997.

[35] D. Tweed and T. Villis. Geometric relations of eye position and velocity vectors during saccades. *Vision Research*, 30:pp.111–127, 1990.

[36] D. Tweed and T. Villis. The superior colliculus and spatiotemporal translation in the saccadic system. *Neural Networks*, 3:pp.75–86, 1990.

[37] M. Yaglom. Complex numbers in Geometry. *Academic Press, Leicester*, 1968.

## Danksagung

Zum Abschluß möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen haben.

Herrn Prof. Dr. *G. Sommer* danke ich für die interessante Themenstellung.

Bei Herrn Dr. *E. Bayro-Corrochano* bedanke ich mich für die Betreuung der Diplomarbeit, für die stete Diskussionsbereitschaft und für die vielen Anregungen und Hinweise zur Durchführung.

Dem Arbeitskreis danke ich für das angenehme Arbeitsklima und die große Hilfsbereitschaft.
Mein besonderer Dank gilt Dipl. Phys. *Thomas Bülow* und Dr. *Norbert Krüger* für die kritische Durchsicht des Manuskripts.

*Ronald Kriemann* danke ich für die unermüdliche Hilfe zu dem Betriebssystem Linux und der Textverarbeitung LaTeX.

*Anke Kleemann* möchte ich für die persönliche Unterstützung während der gesamten Studienzeit danken.

Schließlich möchte ich mich bei meiner ganzen Familie bedanken. Insbesondere meinen Eltern *Regine* und Dr. *Lothar Rosenhahn* sowie meinen Geschwistern *Axel* und *Carsten Rosenhahn* danke ich für die Unterstützung, sowie für zahlreiche Diskussionen und Gespräche während der Studienzeit.