```latex
\documentclass[11pt]{article}

\usepackage{german}
\setlength {\textwidth} {145 true mm}
\setlength {\topmargin} {0 true mm}
\setlength {\textheight}{225 true mm}
\pagestyle {empty}

\begin{document}

\begin{center}
{\Large \bf Zur L"osung Quadratische Gleichungen} \\[5mm]
von Rudolf Berghammer,
\end{center}

\section{Die Aufgabenstellung}\label{aufgabe} %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Gegeben sei eine {\it quadratische Gleichung} der Form
\begin{equation}
x^2 + px + q = 0 .
\label{gle1}
\end{equation}
Es ist zu bestimmen, wann diese Gleichung reellwertige L"osungen besitzt.
Diese sind dann gegebenenfalls zu berechnen.

\section{Der L"osungsweg}\label{loesung} %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Wir starten mit der Gleichung (\ref{gle1}) von Abschnitt \ref{aufgabe}.
In einem ersten Schritt addieren wir zu beiden Seiten den Ausdruck
$\frac{p^2}{4}$.
Dies liefert
\begin{equation}
x^2 + px + q + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4}.
\label{gle2}
\end{equation}
Nun bringen wir $q$ von der linken auf die rechte Seite. Dadurch
ver"andert sich (\ref{gle2}) zu
\begin{equation}
x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q.
\label{gle3}
\end{equation}
Auf die linke Seite von Gleichung (\ref{gle3}) k"onnen wir nun die
bekannte binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ anwenden.
Dadurch wird (\ref{gle3}) zu
\begin{equation}
(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q.
\label{gle4}
\end{equation}
Nun ziehen wir in (\ref{gle4}) auf beiden Seiten die Quadratwurzel.
```

```
Wegen $\sqrt{a^2} = a$ bringt dies
\begin{equation}
x + \frac{p}{2} = \sqrt{ \frac{p^2}{4} - q }.
\label{gle5}
\end{equation}
Unter der Ber"ucksichtigung der m"oglichen Werte einer Wurzel erhalten
wir als zwei echt verschiedene reellwertige L"osungen der Gleichung
(\ref{gle1}) von Abschnitt \ref{aufgabe} die Werte
\begin{equation}
x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{ \frac{p^2}{4} - q }
\hspace{3cm}
x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{ \frac{p^2}{4} - q }
\label{2lsg}
\end{equation}
genau dann, wenn der Ausdruck $\frac{p^2}{4} - q$ unter der Wurzel von
(\ref{gle5}) positiv ist. Gilt hingegen $\frac{p^2}{4} - q = 0$, so gilt
$x_1 = x_2$ f"ur die beiden Werte aus (\ref{2lsg}) und damit hat die
Gleichung (\ref{gle1}) in diesem Fall nur eine einzige L"osung, n"amlich
\begin{equation}
x = -\frac{p}{2}.
\label{1lsg}
\end{equation}
Der dritte Fall ist, da"s $\frac{p^2}{4} - q$ negativ ist. Hier besitzt
die Gleichung (\ref{gle1}) keine reellwertige L"osung, da reelle Wurzeln
von negativen reellen Zahlen nicht existieren.

\section{Abschlie"sende Bemerkungen} %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

Nach der Vorstellung der Aufgabe in Abschnitt \ref{aufgabe}, haben wir
in Abschnitt \ref{loesung} bestimmt, wann eine quadratische Gleichung
der Form $x^2 + px + q = 0$ reellwertige L"osungen besitzt und diese auch
durch entsprechende Ausdr"ucke angegeben. Bez"uglich der L"osung von
beliebigen Polynomgleichungen $\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$ $n$-ten Graden
verweisen wir auf die Literatur, beispielsweise \cite{meyberg} oder
\cite{warden}.

%%%%%%%%%% REFERENZEN %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

\begin{thebibliography}{99}
\addcontentsline{toc}{section}{References}
\bibitem{meyberg}
     Meyberg K.: Algebra 2, Hanser-Verlag (1976)
\bibitem{warden}
     van der Warden B.L.: Algebra 1, 8.~Auflage, Springer-Verlag (1971)
\end{thebibliography}

\end{document}
```