# Zur Lösung Quadratische Gleichungen

von Rudolf Berghammer,

## 1 Die Aufgabenstellung

Gegeben sei eine *quadratische Gleichung* der Form

$$x^2 + px + q = 0. \tag{1}$$

Es ist zu bestimmen, wann diese Gleichung reellwertige Lösungen besitzt. Diese sind dann gegebenenfalls zu berechnen.

## 2 Der Lösungsweg

Wir starten mit der Gleichung (1) von Abschnitt 1. In einem ersten Schritt addieren wir zu beiden Seiten den Ausdruck $\frac{p^2}{4}$. Dies liefert

$$x^2 + px + q + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4}. \tag{2}$$

Nun bringen wir $q$ von der linken auf die rechte Seite. Dadurch verändert sich (2) zu

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q. \tag{3}$$

Auf die linke Seite von Gleichung (3) können wir nun die bekannte binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ anwenden. Dadurch wird (3) zu

$$(x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q. \tag{4}$$

Nun ziehen wir in (4) auf beiden Seiten die Quadratwurzel. Wegen $\sqrt{a^2} = a$ bringt dies

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{5}$$

Unter der Berücksichtigung der möglichen Werte einer Wurzel erhalten wir als zwei echt verschiedene reellwertige Lösungen der Gleichung (1) von Abschnitt 1 die Werte

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \tag{6}$$

genau dann, wenn der Ausdruck $\frac{p^2}{4} - q$ unter der Wurzel von (5) positiv ist. Gilt hingegen $\frac{p^2}{4} - q = 0$, so gilt $x_1 = x_2$ für die beiden Werte aus (6) und damit hat die Gleichung (1) in diesem Fall nur eine einzige Lösung, nämlich

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{7}$$

Der dritte Fall ist, daß $\frac{p^2}{4} - q$ negativ ist. Hier besitzt die Gleichung (1) keine reellwertige Lösung, da reelle Wurzeln von negativen reellen Zahlen nicht existieren.

## 3 Abschließende Bemerkungen

Nach der Vorstellung der Aufgabe in Abschnitt 1, haben wir in Abschnitt 2 bestimmt, wann eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ reellwertige Lösungen besitzt und diese auch durch entsprechende Ausdrücke angegeben. Bezüglich der Lösung von beliebigen Polynomgleichungen $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$ $n$-ten Graden verweisen wir auf die Literatur, beispielsweise [1] oder [2].

## Literatur


[1] Meyberg K.: Algebra 2, Hanser-Verlag (1976)

[2] van der Warden B.L.: Algebra 1, 8. Auflage, Springer-Verlag (1971)