

Tutorien

Analysis 1 und 2

Stand: 2. September 2004

Dies ist eine private Mitschrift der Tutorien, die zur Nachbereitung der Vorlesung Analysis 1 und 2 bei Herrn Priv.-Doz. Dr. Olaf v. Grudzinski angeboten wurden. Zeitraum der Tutorien: 10.03.-20.03.2003 und 25.08.-04.09.2003.
Kritik und Fehler bitte an Christof Kluß ckluss@web.de

Inhaltsverzeichnis

1	Rechnen mit Ungleichungen, Rechnen in \mathbb{C}	3
2	Supremum und Infimum	5
3	Top. Räume, Stetigkeit, Grenzwert	7
3.1	Topologische Räume	7
3.2	Stetigkeit	10
3.3	Grenzwert	14
3.4	Konvergenz von Folgen	16
4	Summierbarkeit	18
5	Metrische und normierte Räume	20
5.1	Konvergenz von Funktionsfolgen	25
6	Summierbarkeit	26
7	Häufungskompaktheit	27
8	Differenzierbarkeit	29
8.1	Richtungsableitungen	31
9	Zentrale Sätze und Anwendungen der Differenzialrechnung	33
10	Integration	37
10.1	Eigenschaften des Integrals auf $S(I, F)$	37
10.2	Eigenschaften des Integrals auf $\mathfrak{R}(I, F)$	38
10.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	38
10.4	Beispiele	39
10.5	uneigentliche Integrierbarkeit	40
11	Potenzreihen	41
12	Taylor Polynome	43
13	Lokale Extremstellen	44
	Index	45

1 Rechnen mit Ungleichungen, Rechnen in \mathbb{C}

Definition 1.1 (angeordneter Körper) Sei K ein Körper, sei \leq eine totale Ordnungsrelation auf K . K heißt *angeordneter Körper*, falls für alle $x, y, z \in K$ gilt:

$$(OK1) \quad x \leq z \Rightarrow x + y \leq z + y$$

$$(OK2) \quad (x \leq y \wedge z \geq 0) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$$

Aufgabe 1.2

Behauptung

$$(1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : (x - y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \quad (\Leftrightarrow \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \} = \mathbb{R}^2)$$

$$(2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : x = -y \Leftrightarrow (x - y)^2 = 2x^2 + 2y^2$$

Beweis (1) (Idee)

$$\begin{aligned} (x - y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2 &\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 + 2xy + y^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (x + y)^2 \end{aligned}$$

Warum sind Quadrate in \mathbb{R} immer positiv?

(Beweis) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt mit (OK1) und (OK2) $(x + y)^2 \geq 0$. Nach 1. Binomischer Formel gilt somit $x^2 + 2xy + y^2 \geq 0$ mit (OK1) folgt $x^2 - 2xy + y^2 \leq 2x^2 + 2y^2$ und letztlich mit Binomischer Formel $(x - y)^2 \leq 2x^2 + 2y^2$.

(2) Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

\Rightarrow Sei $x = -y$. Dann gilt $(x - y)^2 = (2x)^2 = 2x^2 + 2(-y)^2$.

$\Leftarrow \dots$ □

Satz 1.3 (verallgemeinerte Binomische Formeln) Sei R ein KE-Ring und $a, b \in R$, dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{und} \quad a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Definition 1.4 Seien (M, \leq) (N, \preceq) geordnete Mengen. Sei $f : M \rightarrow N$.

f heißt *monoton steigend*, falls $\forall x, y \in M : x \leq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y)$

f heißt *monoton fallend*, falls $\forall x, y \in M : x \leq y \Rightarrow f(x) \succeq f(y)$

Aufgabe 1.5

Voraussetzung Sei $x \in \mathbb{R}_{>1}$ und $l \in \mathbb{N}$.

Behauptung $l > \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{x^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}_{\geq l}}$ streng monoton steigend

Beweis (Idee)

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{n} < \frac{x^{n+1}}{n+1} &\Leftrightarrow (n+1)x^n < n \cdot x^{n+1} \Leftrightarrow (n+1) < nx \Leftrightarrow (n+1) - nx < 0 \\ &\Leftrightarrow n(1-x) < -1 \Leftrightarrow n > \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

(Beweis) \Rightarrow Sei $l > \frac{1}{x-1}$. (z.z. $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq l} : \frac{x^n}{n} < \frac{x^{n+1}}{n+1}$.) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq l}$. Dann gilt $n \geq l > \frac{1}{x-1}$. Dann folgt mit (OK1) $n(x-1) > 1$ nach (OK1) folgt $-1 > n(1-x) = n - nx$, also nach (OK1) $0 > (n+1) - nx$ und mit (OK1) $nx > (n+1)$. Mit (OK2) folgt $nx^{n+1} > (n+1)x^n$ und mit (OK2) folgt $\frac{x^{n+1}}{n+1} > \frac{x^n}{n}$.

$\Leftarrow \dots$

□

Aufgabe 1.6

Voraussetzung Sei $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - \frac{1}{x}$.

Behauptung g ist streng monoton steigend mit $\text{Bild}(g) = \mathbb{R}$

Aufgabe 1.7

Behauptung $\underbrace{(1+i)^{103}}_z + \underbrace{(1-i)^{103}}_{\bar{z}} = 2^{52}$

Beweis Es gilt

$$\begin{aligned} (1+i)^2 &= (1+i)(1+i) = 1+i+i-1 = 2i, \text{ also } (1+i)^4 = -4 \\ (1+i)^{100} &= (-4)^{25} = -2^{50} \\ (1+i)^{103} &= -2^{50} \cdot 2i(1+i) = -2^{51} \cdot i \cdot z \\ \text{und } (1-i)^2 &= -2i, \text{ also } (1-i)^4 = (-2i)^2 = -4 \\ (1-i)^{100} &= (-4)^{25} = -2^{50} \\ (1-i)^{103} &= -2^{50} \cdot (-2i)(1-i) = 2^{50} \cdot 2i(1-i) = 2^{51} \cdot i \cdot \bar{z} \end{aligned}$$

also gilt $z^{103} + \bar{z}^{103} = -2^{51} \cdot i \cdot z + 2^{51} \cdot i \cdot \bar{z} = -2^{51} \cdot i(z - \bar{z}) = -2^{51} \cdot i \cdot 2i \text{Im}(z) = 2^{52}$ □

Bemerkung 1.8 Sei $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z &= \text{Re}(z) + i \text{Im}(z) & |z| &= \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2} & z + \bar{z} &= 2 \text{Re}(z) \\ \bar{z} &= \text{Re}(z) - i \text{Im}(z) & |z|^2 &= z\bar{z} \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \text{ falls } z \neq 0 & z - \bar{z} &= 2i \text{Im}(z) \end{aligned}$$

Satz 1.9 Sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsbereich, sei $d \in \mathbb{N}$, und sei $P : R \rightarrow R$ eine Polynom-Funktion vom Grad d . Dann hat P höchstens d Nullstellen.

Aufgabe 1.10 (3. Wurzeln von 1 in \mathbb{C})

Behauptung $\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\} = \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Beweis (1. Versuch) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine 3. Wurzel von 1 in \mathbb{C} . Finde x, y in \mathbb{R} mit $z = x + iy$.
 $z^3 = (x + iy)^3 = 1 \Rightarrow$ Eigenschaften von x, y .

(2. Versuch) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine 3. Wurzel von 1 in \mathbb{C} . Dann gilt $z^3 = 1$. Also $z^3 - 1^3 = 0$.
 Nach 3. Binomischen Formel gilt $0 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$. Da \mathbb{C} nullteilerfrei ist, folgt
 $z = 1$ oder $z^2 + z + 1 = 0$.

Aus $z^2 + z + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0$ folgt $(z + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$ (quadratische Ergänzung). Also erhalten wir
 $z + \frac{1}{2} = i\frac{\sqrt{3}}{2}$ oder $z + \frac{1}{2} = -i\frac{\sqrt{3}}{2}$, d.h. $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ oder $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Beweis) \subseteq einsetzen und ausrechnen

$\supseteq p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^3 - 1$ hat höchstens 3 Nullstellen in \mathbb{C} . Da wir 3 gefunden haben
 sind wir fertig. \square

Aufgabe 1.11 (3. Wurzeln von i)

Behauptung $\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = i\} = \dots$

2 Supremum und Infimum

Definition 2.1 (Supremum) Sei (Y, \leq) eine geordnete Menge. Sei $A \subseteq Y, s \in Y$.
 s heißt *Supremum* von A (in Y), wenn s kleinste ober Schranke von A ist, d.h.

$$(1) \quad \forall a \in A : a \leq s$$

$$(2) \quad \forall s' \in Y : (\forall a \in A : a \leq s') \Rightarrow s \leq s'$$

bzw. $s > s' \Rightarrow \exists a \in A : a > s'$ (Kontraposition)

Notation: $\sup A := s$. Spezialfall: $\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$.

Bemerkung 2.2 $\sup(A \setminus \max A) \neq \max A$. (z.B. $A := [0, 1] \cup \{2\}$)

Bemerkung 2.3 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$.

In \mathbb{R} gilt also $\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = +\infty$.

Satz 2.4 (Bernoulli-Ungleichung) Sei $x \in \mathbb{R}_{\geq -1}, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Satz 2.5 (Archimedes-Eigenschaft von \mathbb{R}) Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $b \in \mathbb{R}$.

Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > b$.

Aufgabe 2.6

Voraussetzung Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $M_x := \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Behauptung (1) $\sup M_x = \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 1 \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$ und (2) $\inf M_x = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1 \\ x & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$

Beweis (1) ... (2)

1. Fall: Sei $x < 1$.

1) (z.z.: $\forall m \in M_x : m \geq 0$.) klar.

2) (z.z.: 0 ist größte untere Schranke.)

(Idee) Nach Bernoulli gilt $(1+a)^n \geq 1+na$ mit $\frac{1}{x} = a+1$ folgt $\frac{1}{x^n} = (1+a)^n > na$ also $x^n < \frac{1}{na} \leq s'$.

(Beweis) Sei $s' > 0$. (Zeige: Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n < s'$.) Setze $a := \frac{1}{x} - 1 > 0$. Nach Archimedes können wir ein $n \in \mathbb{N}$ wählen mit $na \geq \frac{1}{s'}$. Mit Bernoulli folgt $\frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = (1+a)^n \geq 1+na > na \geq \frac{1}{s'}$. Wegen $x^n, s' > 0$ folgt $x^n < s'$.

2. Fall: Sei $x \geq 1$. (z.z. $\inf M_x = x$.) Es gilt sogar $x = \min M_x$, denn:

1) $x = x^1 \in M_x$

2) $\forall n \in \mathbb{N} : x^n \geq x$ (Beweis durch Induktion) □

Aufgabe 2.7

Voraussetzung Sei $x \in \mathbb{R}_{<0}$ und $M_x := \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Behauptung $\sup M_x = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x < -1 \\ x^2 & \text{falls } x \geq -1 \end{cases}$

Beweis 1. Fall: ...

2. Fall: Sei $x \geq -1$. (z.z. $\sup M_x = x^2$.) Zeige $x^2 = \max M_x$.

(1) $x^2 \in M_x$.

(2) $x^2 \geq x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Es gilt $x^2 \geq 0 > x^1$. Strategie: Zeige mit Induktion $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} : |x|^n \leq x^2$. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N} : x^n \leq |x^n| = |x|^n \leq x^2$. □

Aufgabe 2.8

Voraussetzung Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}_{>0}$. $\frac{1}{A} := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A : x = \frac{1}{a}\} = \{\frac{1}{a} \mid a \in A\}$.

Behauptung $\sup \frac{1}{A} = \frac{1}{\inf A}$.

Beweis z.z.

(1) $\frac{1}{\inf A}$ ist obere Schranke, d.h. $\forall x \in \frac{1}{A} : x \leq \frac{1}{\inf A}$.

(2) $\forall s \in \mathbb{R} : (\forall x \in \frac{1}{A} : x \leq s) \Rightarrow s \geq \frac{1}{\inf A}$.

zu (1) Sei $x \in \frac{1}{A}$. Dann ex. ein $a \in A$ mit $x = \frac{1}{a}$. Aus $a \geq \inf A$ folgt $x = \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\inf A}$.

zu (2) (Zeige: $\frac{1}{s}$ ist untere Schranke von A , d.h. $\forall a \in A : \frac{1}{s} \leq a$.) Sei $s \in \mathbb{R}$ eine weitere obere Schranke von $\frac{1}{A}$, d.h. $\forall x \in \frac{1}{A} : x \leq s$. Sei $a \in A$. Dann ist $\frac{1}{a} \in \frac{1}{A}$, also $\frac{1}{a} \leq s$, also $a \geq \frac{1}{s}$. D.h. $\frac{1}{s}$ ist untere Schranke von A , also ist $\frac{1}{s} \leq \inf A$, also $s \geq \frac{1}{\inf A}$. □

Bemerkung 2.9 Sei $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $M = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. $\sup M = \frac{1}{\inf \frac{1}{M}} = \frac{1}{\inf \left\{ \frac{1}{x^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}}$.

Satz 2.10 Sei $\emptyset \neq A \subseteq [0, +\infty]$. Dann gilt $\sup \left(\frac{1}{A} \right) = \frac{1}{\inf A}$ und $\inf \left(\frac{1}{A} \right) = \frac{1}{\sup A}$.

Aufgabe 2.11

Voraussetzung Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : f(x) \in [x, x + 1[$.

Behauptung $\inf \left\{ \frac{f(x)}{x} \mid x \in \mathbb{R}_{>0} \right\} = 1$.

Beweis (Idee) $x \leq f(x) < x + 1$ genau dann, wenn $1 \leq \frac{f(x)}{x} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \varepsilon$. 1 ist untere Schranke von $\left\{ \frac{f(x)}{x} \mid x > 0 \right\}$.

(Beweis) Sei $\varepsilon > 0$. (z.z. $\exists x \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{f(x)}{x} < 1 + \varepsilon$)

$$1 \leq \inf \left\{ \frac{f(x)}{x} \mid x > 0 \right\} \leq \inf \left\{ 1 + \frac{1}{x} \mid x > 0 \right\} = 1 + \inf \left\{ \frac{1}{x} \mid x > 0 \right\} = 1 + \frac{1}{\sup \mathbb{R}_{>0}} = 1. \square$$

Satz 2.12 Sei (Y, \leq) eine geordnete Menge. Seien A, B Teilmengen von Y , die ein Supremum (bzw. Infimum) besitzen. Dann gilt

$$\forall a \in A \exists b \in B : a \leq b \Rightarrow \sup A \leq \sup B$$

(bzw. $\forall a \in A \exists b \in B : a \geq b \Rightarrow \inf A \geq \inf B$)

Bemerkung 2.13

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist eine geordnete Menge mit $\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(x)$.

Aufgabe 2.14

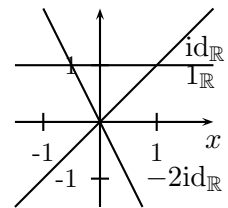
Voraussetzung Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $1_M := M \times \{1\}$. $A := \{1_{\mathbb{R}}, \text{id}_{\mathbb{R}}, -2\text{id}_{\mathbb{R}}\}$

Behauptung $\sup A = -2\text{id}_{\mathbb{R}_{\leq -\frac{1}{2}}} \cup 1_{\left[-\frac{1}{2}, 1\right]} \cup \text{id}_{\mathbb{R}_{\geq 1}}$ und $\inf A = \text{id}_{\mathbb{R}_{\leq 0}} \cup (-2\text{id}_{\mathbb{R}_{> 0}}) =: h$.

Beweis

(z.z. $h \leq 1_{\mathbb{R}}, h \leq \text{id}_{\mathbb{R}}, h \leq -2\text{id}_{\mathbb{R}}$.)

$$x \in \mathbb{R} : x \leq 0 : h(x) = x \leq \begin{cases} 1 = 1_{\mathbb{R}}(x) \\ x = \text{id}_{\mathbb{R}}(x) \\ -2x = (-2\text{id}_{\mathbb{R}})(x) \end{cases} \dots \square$$



3 Top. Räume, Stetigkeit, Grenzwert

3.1 Topologische Räume

Definition 3.1 (Topologischer Raum) Ein *Topologischer Raum* ist eine Menge M versehen mit einer Teilmenge $\mathfrak{D}_M \subseteq \mathfrak{P}(M)$ so, dass gilt:

$$\begin{aligned} \text{(TOP1)} \quad & \emptyset, M \in \mathfrak{D}_M \\ \text{(TOP2)} \quad & \forall U, V \in \mathfrak{D}_M : U \cap V \in \mathfrak{D}_M \\ \text{(TOP3)} \quad & \forall \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{D}_M : \bigcup \mathfrak{U} \in \mathfrak{D}_M \end{aligned}$$

Definition 3.2 Sei $p \in M$. Eine *offene Umgebung* von p ist eine *offene Menge* U (d.h. $U \in \mathfrak{D}_M$) mit $p \in U$. Eine Menge $V \subseteq M$ heißt *Umgebung* von p , falls eine offene Umgebung U von p existiert mit $U \subseteq V$.

Aufgabe 3.3

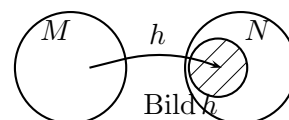
Voraussetzung Sei M eine Menge, (N, \mathfrak{D}_N) topologischer Raum und $h : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Definiere $\mathfrak{D}_M := \{ h^{-1}(V) \mid V \in \mathfrak{D}_N \}$. ($h^{-1}(V) = \{ x \in M \mid h(x) \in V \}$)

Behauptung \mathfrak{D}_M ist eine Topologie auf M .

Beweis (TOP1) Es ist $\emptyset \in \mathfrak{D}_N$, also ist $\emptyset = h^{-1}(\emptyset) \in \mathfrak{D}_M$. $M = h^{-1}(N) \in \mathfrak{D}_M$.

(TOP2) Seien $U, W \in \mathfrak{D}_M$. (z.z. $U \cap W \in \mathfrak{D}_M$.)

Wähle also $V, V' \in \mathfrak{D}_N$ mit $U = h^{-1}(V)$ und $W = h^{-1}(V')$. (z.z. $U \cap W = h^{-1}(V \cap V')$.) Dann gilt $V \cap V' \in \mathfrak{D}_N$ und $U \cap W = h^{-1}(V) \cap h^{-1}(V') = h^{-1}(V \cap V') \in \mathfrak{D}_M$. \square



Bemerkung 3.4 $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ und $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Aufgabe 3.5

Voraussetzung Sei (M, \mathfrak{D}_M) ein topologischer Raum und $L \subseteq M$.

Behauptung L wird ein topologischer Raum mit der von M induzierten Topologie. $\mathfrak{D}_L := \{ U \cap L \mid U \in \mathfrak{D}_M \}$.

Beweis (Idee) $h : L \rightarrow M, x \mapsto x$ und $h^{-1}(U) = U$. \square

Aufgabe 3.6

Voraussetzung $A, P, Q \subseteq M$ mit $A \subseteq P \cap Q$.

Behauptung A offen bezüglich P und $Q \Rightarrow A$ offen bezüglich $P \cup Q$.

Beweis Sei A offen bzgl. P und Q . Dann gibt es nach Definition der induzierten Topologie in M offene Teilmengen $U, V \subseteq M$ mit $A = U \cap P$ und $A = V \cap Q$. Da U und V in M offen sind, ist auch $W := U \cap V$ offen in M und damit ist $W \cap (P \cup Q)$ eine offene Menge in $P \cup Q$. $W \cap (P \cup Q) = (W \cap P) \cup (W \cap Q) = ((U \cap P) \cap V) \cup ((V \cap Q) \cap U) = (A \cap V) \cup (A \cap U) = A \cup A = A$. \square

Definition 3.7 (Standardtopologien)

$$U \subseteq \mathbb{R} \text{ offen} \Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} :]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq U$$

$$U \subseteq \mathbb{C} \text{ offen} \Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : K(x, \varepsilon) \subseteq U$$

Definition 3.8 Sei $A \subseteq M$ und $p \in M$.

Dann heißt p *Berührungspunkt* von A , falls gilt: $\forall U \in \mathfrak{U}(p) : U \cap A \neq \emptyset$.

$\overline{A} := \{ p \in M \mid p \text{ Berührungspunkt von } A \}$ heißt *Abschluß* von A .

$p \in M$ heißt *Häufungspunkt* von A , falls p Berührungspunkt von $A \setminus \{ p \}$ ist.

Bemerkung 3.9 p berührt A nicht $\Leftrightarrow \exists U \in \mathfrak{U}_p : U \cap A = \emptyset$.

Beispiel 3.10

0 ist Berührungspunkt und Häufungspunkt von $\frac{1}{n}$.

Aufgabe 3.11

Voraussetzung Sei (M, \mathfrak{D}_M) topologischer Raum und $A, B \subseteq M$.

Behauptung Es gilt $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, die Inklusion \supseteq gilt im Allgemeinen nicht.

Beweis \subseteq Sei $p \in \overline{A \cap B}$, also gilt $\forall U \in \mathfrak{U}(p) : U \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. (z.z. $p \in \overline{A}$ und $p \in \overline{B}$.) Sei $U \in \mathfrak{U}(p)$. (z.z. $U \cap A \neq \emptyset$.) Nach Voraussetzung ist sogar $U \cap A \cap B \neq \emptyset$ also insbesondere $U \cap A \neq \emptyset$.

Die Inklusion \supseteq gilt im allgemeinen nicht. (Beweis durch konkrete Gegenbeispiel.)

Setze $M := \mathbb{R}$, $A :=]0, 1[$, $B :=]1, 2[$. $A \cap B = \emptyset$, also $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset$ und $\overline{A} \cap \overline{B} = \{ 1 \}$. \square

Satz 3.12 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Definition 3.13 A heißt *abgeschlossen* $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Aufgabe 3.14

Voraussetzung Sei $H := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0 \}$.

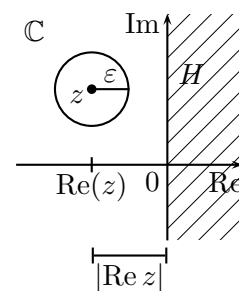
Behauptung H ist abgeschlossen, aber nicht offen.

Beweis (Nur leere und ganze Mengen sind in diesem Fall abgeschlossen und offen. Da \mathbb{C} zusammenhängend ist kann H nur offen oder abgeschlossen sein.)

(H ist abgeschlossen:) (z.z. $\overline{H} \subseteq H$.) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus H$. (Zeige: $z \notin \overline{H}$, also z.z. es existiert eine Umgebung U von z mit $U \cap H = \emptyset$. $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : K(z, \varepsilon) \subseteq \mathbb{C} \setminus H$.)

Setze $\varepsilon := -\frac{\operatorname{Re} z}{2} > 0$. Sei $w \in K(z, \varepsilon)$ also $|w - z| < \varepsilon$. (z.z. $\operatorname{Re}(w) < 0$.) Es gilt $|w - z| < -\frac{\operatorname{Re} z}{2}$, also $\operatorname{Re} w - \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(w - z) \leq |w - z| < -\frac{\operatorname{Re} z}{2}$. Also $\operatorname{Re} w < \operatorname{Re} z - \frac{\operatorname{Re} z}{2} = \frac{\operatorname{Re} z}{2} < 0$.

(H ist nicht offen:) Es ist $0 \in H$. Sei $\varepsilon > 0$. (z.z. $K(0, \varepsilon) \not\subseteq H$.) Sei $z_0 := -\frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $\operatorname{Re} z_0 = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$ und $|z_0| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, also $z_0 \in K(0, \varepsilon)$. \square



Definition 3.15

Ein topologischer Raum (M, \mathfrak{D}_M) heißt *separiert* oder *hausdorffsch*, falls gilt



(T2) $\forall x, y \in M : x \neq y \Rightarrow (\exists U \in \mathfrak{U}(x) \exists V \in \mathfrak{U}(y) : U \cap V = \emptyset)$ (Trennungsaxiom)

Beispiel 3.16

Sei M eine Menge mit $|M| \geq 2$, $\mathfrak{D}_M = \{\emptyset, M\}$.

Aufgabe 3.17

Voraussetzung Sei (M, \mathfrak{D}_M) separiert und $A \subseteq M$ endlich.

Behauptung A ist abgeschlossen.

Beweis $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$. (Zeige $\{a\}$ ist abgeschlossen.) Sei $x \in M \setminus \{a\}$. Da (M, \mathfrak{D}_M) separiert ist, finden wir $U \in \mathfrak{U}(x)$, $V \in \mathfrak{U}(a)$ mit $U \cap V = \emptyset$, insbesondere $U \cap \{a\} = \emptyset$. (Für jedes $x \neq a$ ist x kein Berührungspunkt von a .) \square

3.2 Stetigkeit

Definition 3.18 Seien (M, \mathfrak{D}_M) , (N, \mathfrak{D}_N) topologische Räume, $f : M \rightarrow N$, $m \in M$.

f stetig in m : $\Leftrightarrow \forall A \subseteq M : m \in \overline{A} \Rightarrow f(m) \in \overline{f(A)}$ (f ist Berührungs-erhaltend)
 $\Leftrightarrow \forall V \in \mathfrak{U}(f(m)) : f^{-1}(V) \in \mathfrak{U}(m)$
 $\Leftrightarrow \forall V \in \mathfrak{U}(f(m)) \exists U \in \mathfrak{U}(m) : f(U) \subseteq V$

f heißt stetig: $\Leftrightarrow f$ ist stetig in jedem Punkt $m \in M$
 $\Leftrightarrow \forall A \subseteq M : f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
 $\Leftrightarrow \forall V \in \mathfrak{D}_N : f^{-1}(V) \in \mathfrak{D}_M$ (Urbilder offener Mengen sind offen)
 $\Leftrightarrow \forall B \subseteq N : B$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(B)$ abgeschlossen
 (Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen)

(Spezialfälle) $M = \mathbb{R} = N$. (IntUmg. = Intervallumgebung) $\forall (\varepsilon \text{ IntUmg. von } f(x)) \exists (\delta \text{ IntUmg. von } x): f(]x - \delta, x + \delta[) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$ $f \text{ stetig in } x \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \forall y \in \mathbb{R} : x - y < \delta \Rightarrow f(y) - f(x) < \varepsilon$ $f \text{ nicht stetig in } x \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \forall \delta \in \mathbb{R}_{>0} \exists y \in \mathbb{R} : x - y < \delta \wedge f(y) - f(x) \geq \varepsilon$ $(M, \mathfrak{D}_M), \mathbb{C}$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists U \in \mathfrak{U}(x) \forall y \in U : f(y) - f(x) < \varepsilon$

Beispiel 3.19

Seien $(M, \mathfrak{D}_M), (N, \mathfrak{D}_N)$ topologische Räume. Sei $n \in \mathbb{N}$.

$\text{id}_M : M \rightarrow M, x \mapsto x$ ist $(\mathfrak{D}_M - \mathfrak{D}_M)$ stetig und $f : M \rightarrow N, x \mapsto n$ ist stetig.
(Urbilder offener Mengen sind offen.)

Aufgabe 3.20

Voraussetzung Sei (M, \mathfrak{D}_M) ein topologischer Raum, L eine Menge.

$h : L \rightarrow M, \mathfrak{D}_L : \{ h^{-1}(V) \mid V \in \mathfrak{D}_M \}$. (h ist stetig. $K \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} M$.)

Behauptung g ist stetig $\Leftrightarrow h \circ g$ ist stetig.

Beweis \Rightarrow Sei g stetig. Sei $V \in \mathfrak{D}_M$. $(h \circ g)^{-1}(V) = g^{-1}(\underbrace{h^{-1}(V)}_{\in \mathfrak{D}_L}) \in \mathfrak{D}_K$.

(Hintereinanderausführungen stetiger Abbildungen sind stetig.)
 $\Leftarrow h \circ g$ sei stetig. Sei $U \in \mathfrak{D}_L$. Wähle $V \in \mathfrak{D}_M$ mit $U = h^{-1}(V)$.
 $g^{-1}(U) = g^{-1}(h^{-1}(V)) = (h \circ g)^{-1}(V) \in \mathfrak{D}_K$. □

Aufgabe 3.21

Voraussetzung Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x^2$.

Behauptung f ist stetig.

Beweis Sei $x \in \mathbb{C}$. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1+2|x|} \right\}$. Sei $y \in \mathbb{C}$ mit $|x - y| < \delta$.

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| = |x - y||y - x + 2x| \\
 &\leq |x - y|(|y - x| + 2|x|) < \delta(\delta + 2|x|) = \delta^2 + 2\delta|x| \leq \delta + 2\delta|x| \leq \varepsilon. \quad \square
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.22

Voraussetzung Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto \text{Re}(z)$.

Behauptung f ist stetig.

Beweis Sei $z \in \mathbb{C}$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Setze $\delta := \varepsilon$. Sei $w \in \mathbb{C}$ mit $|z - w| < \delta$.
 $|f(z) - f(w)| = |\text{Re}(z) - \text{Re}(w)| = |\text{Re}(z - w)| \leq |z - w| < \delta = \varepsilon$. □

Aufgabe 3.23

Voraussetzung Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(0) = 1$ und $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) \leq f(x)f(y)$.
(z.B. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.)

Behauptung Ist f stetig in 0, dann ist f stetig.

Beweis ... □

Satz 3.24 (1) Komposition stetiger Funktionen sind stetig $f \circ g$.

(2) $f, g : M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, dann sind $f + g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ (sofern g nullstellenfrei) stetig.

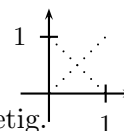
(3) Polynomfunktionen sind stetig.

(4) $\operatorname{Re}(\cdot), \operatorname{Im}(\cdot), |\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig.

(5) $\exp, \sinh, \cosh, \sin, \cos$ sind stetig.

Aufgabe 3.25

Voraussetzung Definiere $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.



Behauptung f ist im Punkt $\frac{1}{2}$ stetig, in allen anderen Punkten nicht stetig.

Beweis Sei $x = \frac{1}{2}$, sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \varepsilon$. Sei $y \in [0, 1]$ mit $|\frac{1}{2} - y| \leq \delta$.

Fall 1: $y \in \mathbb{Q}$. $|f(\frac{1}{2}) - f(y)| = |\frac{1}{2} - y| < \delta = \varepsilon$.

Fall 2: $y \notin \mathbb{Q}$. $|f(\frac{1}{2}) - f(y)| = |\frac{1}{2} - (1-y)| = |y - \frac{1}{2}| < \delta = \varepsilon$.

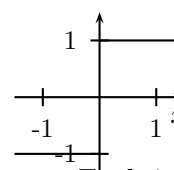
Sei $x \in [0, 1] \setminus \frac{1}{2}$.

Fall $x < \frac{1}{2}$. Setze $\varepsilon := \frac{1}{2} - x > 0$. Sei $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$. Wähle $y \in [0, \frac{1}{2}[\setminus \mathbb{Q}$ mit $|x - y| < \delta$.

$|f(x) - f(y)| = |x - (1-y)| = |x + y - 1| = 1 - x - y = (\frac{1}{2} - x) + \underbrace{(\frac{1}{2} - y)}_{>0} > (\frac{1}{2} - x) = \varepsilon$. □

Aufgabe 3.26

Voraussetzung Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$.



Behauptung f ist stetig.

Beweis f ist stetig, weil der Definitionsbereich von f offen ist. (konstante Funktionen sind stetig.) □

Satz 3.27 Ist $f : M \rightarrow N$ stetig, so gilt für alle $L \subseteq M : f|_L$ ist stetig. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch. D.h. falls $f|_L$ in jedem Punkt von L stetig ist, so muss f nicht in jedem Punkt von L stetig sein.

Beispiel 3.28 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$.

$L = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f|_L$ ist stetig.

Aufgabe 3.29

Voraussetzung Sei $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ stetig. Sei $x_0 \in M$ mit $f(x_0) > 0$.

$f(U) > 0 \Leftrightarrow \forall u \in U : f(u) > 0$. Nullstellenmenge := $\{x \in M \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$.

Behauptung (1) Es gibt eine Umgebung U von x_0 so, dass $f(U) > 0$.

(2) Die Nullstellenmenge von f ist abgeschlossen.

Beweis (2) Setze $B := \{0\}$. B ist abgeschlossen, weil $\overline{\mathbb{R}}$ separiert ist. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(0)$ abgeschlossen.

(1) $\mathbb{R}_{>0} =]0, \infty[$ ist offen. Setze $V := \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist V offen und $U := f^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ ist ebenso offen, da f stetig ist. Ferner ist $x_0 \in U$, da $f(x_0) > 0$, d.h. U ist Umgebung von x_0 . \square

Aufgabe 3.30

Voraussetzung Seien $f, g : M \rightarrow N$ stetig, N sei separiert, $A \subseteq M$.

Behauptung $f|_A = g|_A \Rightarrow f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$

Beweis (Kontraposition)

[z.z. $f|_{\overline{A}} \neq g|_{\overline{A}} \Rightarrow f|_A \neq g|_A$, d.h. z.z. $(\exists a \in \overline{A} : f(a) \neq g(a)) \Rightarrow (\exists x \in A : f(x) \neq g(x))$.] Wähle $a \in \overline{A}$ mit $f(a) \neq g(a)$. Wegen der Separiertheit von N finden wir $U \in \mathfrak{U}(f(a))$ und $V \in \mathfrak{U}(g(a))$ mit $U \cap V = \emptyset$. Es ist $f^{-1}(U) \in \mathfrak{U}(a)$ und $g^{-1}(V) \in \mathfrak{U}(a)$, da f, g stetig sind.

Betrachte $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) =: C$. C ist eine Umgebung von a . Da $a \in \overline{A}$ ist, ist $C \cap A \neq \emptyset$. Wähle $x \in C \cap A$. Es ist $f(x) \in U, g(x) \in V$, d.h. $f(x) \neq g(x)$ da $U \cap V = \emptyset$. \square

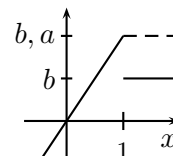
Aufgabe 3.31

Voraussetzung Sei $f := a \cdot \text{id}_{\mathbb{R}_{\leq 1}} \cup \mathbb{R}_{>1} \times \{b\}$

Behauptung f ist steig $\Leftrightarrow a = b$.

Beweis

\Rightarrow Sei f stetig. Setze $A := \mathbb{R}_{>1}$. Betrachte $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto b$. g ist stetig. Es gilt $f|_A = g|_A$. Da \mathbb{R} separiert ist, folgt $f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$ (s.o.). Insbesondere folgt $a = f(1) = g(1) = b$.
 $\Leftarrow \dots$ (Satz 2.55) \square



Definition 3.32 (Zusammenhang) Sei M ein topologischer Raum.

M heißt *zusammenhängend*, falls eine (und damit jede) der 3 Äquivalenzen gilt:

- M ist nicht die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen.
- M ist nicht die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer abgeschlossener Teilmengen.
- Die einzigen offenen und abgeschlossenen Teilmengen von M sind M, \emptyset .

Satz 3.33 (1) In \mathbb{R} sind genau die Intervalle zusammenhängend.

(2) In \mathbb{C} die Kreisscheiben, S^1 (Einheitskreis)

(3) Sei Z eine nicht-leere Menge zusammenhängender Teilmengen von M .

Falls $\bigcup Z \neq \emptyset$, so ist $\bigcup Z$ zusammenhängend.

(4) Ist Z zusammenhängend, $N \subseteq M$ so, dass $Z \subseteq N \subseteq \bar{Z}$.

Dann ist N zusammenhängend.

(5) Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend,

d.h. ist M zusammenhängend $f : M \rightarrow N$ stetig, so ist $f(M)$ zusammenhängend.

Satz 3.34 (Zwischenwertsatz) Sei M zusammenhängender topologischer Raum, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(M)$ ein Intervall.

Definition 3.35 $x \in \mathbb{R}$ heißt *Fixpunkt* von p falls $p(x) = x$.

Aufgabe 3.36

Voraussetzung Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^5 - 7x^3 + 8x^2 - 8x + 5$.

Behauptung p hat einen Fixpunkt im Intervall $[-1, 1]$.

Beweis $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto p(x) - x$. g ist stetig und es gilt $g(-1) = 28$ und $g(1) = -2$. Nach Zwischenwertsatz folgt: Es gibt $x \in [-1, 1]$ mit $g(x) = 0$, d.h. $p(x) = x$. \square

3.3 Grenzwert

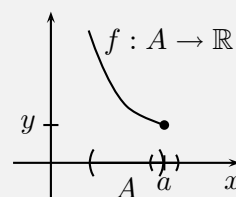
Definition 3.37 (Grenzwert)

Seien M, N topologische Räume, sei $A \subseteq M$ und sei a ein Häufungspunkt von A in M ($a \in A \setminus \{a\}$) und sei $f : A \rightarrow N$ und sei $y \in N$. y heißt *Grenzwert* von f in A , falls

$\tilde{f} := (f|_{A \setminus \{a\}}) \cup \{(a, y)\}$ stetig in a ist.

$$\tilde{f} : A \cup \{a\}, x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \neq a \\ y & \text{falls } x = a \end{cases}$$

Notation: $f(x) \rightarrow y$ für $x \rightarrow a$. $y = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.



Beispiel 3.38

Ist $a \in A$ und f stetig in a , so gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Bemerkung 3.39 Ist N separiert, so existiert höchstens ein Grenzwert.

Beispiel 3.40

$N = \mathbb{R}, \mathfrak{O}_N = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, $f : M \rightarrow N$ ist stetig. $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$.

Satz 3.41

$$y \text{ ist Grenzwert von } f \text{ in } a \Leftrightarrow \forall B \subseteq A \setminus \{a\} : a \in \overline{B} \Rightarrow y \in \overline{f(B)}$$

$$\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U}_N(y) \exists W \in \mathfrak{U}_M(a) : f(W \cap (A \setminus \{a\})) \subseteq U$$

Bemerkung 3.42 (Rechenregeln für Grenzwerte) $A \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K$

(1) $g : N \rightarrow K$ stetig in y .

Gilt $f(x) \rightarrow y$ für $x \rightarrow a$, dann folgt $(g \circ f)(x) \rightarrow g(y)$ für $x \rightarrow a$.

(z.B. für $x \rightarrow 1$ gilt $\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{1} = 1$)

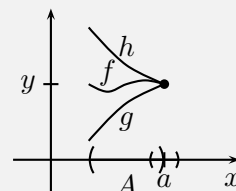
(2) $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$. $f \cdot g, f + g, \frac{f}{g}$ falls $0 \notin g(A)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow y \quad \text{für } x \rightarrow a \\ g(x) \rightarrow z \quad \text{für } x \rightarrow a \end{array} \right\} \Rightarrow (f \cdot g)(x) \rightarrow y \cdot z \text{ für } x \rightarrow a. \text{ usw.}$$

Satz 3.43 (Einschnürung, Sandwichprinzip)

$f, g, h : A \rightarrow N$ mit $g \leq f \leq h$.

$$\left. \begin{array}{l} g(x) \rightarrow y \quad \text{für } x \rightarrow a \\ h(x) \rightarrow y \quad \text{für } x \rightarrow a \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \rightarrow y \text{ für } x \rightarrow a.$$

**Aufgabe 3.44**

Behauptung $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow +\infty$.

Aufgabe 3.45

Behauptung $\frac{2x^2+3x-1}{7-x^2} \rightarrow -2$ für $x \rightarrow +\infty$.

Beweis Für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $\frac{2x^2+3x-1}{-x^2+7} = \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{-1+\frac{7}{x^2}}$. Es gilt $\frac{7}{x^2} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow +\infty$ also

auch $(-1 + \frac{7}{x^2}) \rightarrow -1 \neq 0$ für $x \rightarrow +\infty$. Weiter gilt $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ und $\frac{3}{x} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow +\infty$ also auch $(2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}) \rightarrow 2 + 0 - 0 = 2$ für $x \rightarrow +\infty$.

Damit folgt: $\frac{2x^2+3x-1}{7-x^2} = \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{-1+\frac{7}{x^2}} \rightarrow \frac{2}{-1} = -2$ für $x \rightarrow +\infty$. □

Aufgabe 3.46**Behauptung** $\sqrt{x^2 - 2x + 9} - x \rightarrow -1$ für $x \rightarrow +\infty$ **Beweis** (Idee) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Also $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$. Also $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.(Beweis) $\sqrt{x^2 - 2x + 9} - x = \frac{(x^2 - 2x + 9) - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 9} + x} = \frac{-2x + 9}{\sqrt{x^2 - 2x + 9} + x} = \frac{-2 + \frac{9}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}} + 1} \rightarrow \frac{-2}{2} = -1$ für $x \rightarrow +\infty$ ($\sqrt{\cdot}$ ist stetig.) \square **Aufgabe 3.47****Behauptung** $\sqrt[3]{2x^3 + 4x^2 - 7} - \sqrt[3]{2x^3 + 9x^2 - 5x} \rightarrow \frac{-5}{3\sqrt[3]{4}}$ für $x \rightarrow +\infty$ **Beweis** (Idee) Es gilt $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$. Also $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.Also $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2 + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}}$.

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2x^3 + 4x^2 - 7} - \sqrt[3]{2x^3 + 9x^2 - 5x} \\ &= \frac{-5x^2 + 5x - 7}{\sqrt[3]{(2x^3 + 4x^2 - 7)^2} + \sqrt[3]{(2x^3 + 4x^2 - 7)(2x^3 + 9x^2 - 5x)} + \sqrt[3]{(2x^3 + 9x^2 - 5x)^2}} \\ &= \frac{-5 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}}{\sqrt[3]{(2 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^3})^2} + \sqrt[3]{(2 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^3})(2 + \frac{9}{x} - \frac{5}{x^2})} + \sqrt[3]{(2 + \frac{9}{x} - \frac{5}{x^2})^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{3\sqrt[3]{4}} \end{aligned}$$

 $(x \mapsto x^2$ und $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ sind stetig.) \square **3.4 Konvergenz von Folgen****Satz 3.48** Seien M, N topologische Räume, sei $A \subseteq M$ und sei a ein Häufungspunkt von A in M . Setze $M := \mathbb{R}, A := \mathbb{N}, a := +\infty$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M . $x \in N$.

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U}_N(x) \exists k \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq k} : x_n \in U \\ (N = \mathbb{C}) \quad x &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists k \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq k} : |x_n - x| < \varepsilon \end{aligned}$$

Satz 3.49 Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. $\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x \\ y_n \rightarrow y \end{array} \right\} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow x + y$ **Aufgabe 3.50****Voraussetzung** Setze $x_n := \frac{2n + (-1)^n}{n+5}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.**Behauptung** $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Beweis Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n = \frac{2 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{5}{n}}$ und es gilt $(1 + \frac{5}{n}) \rightarrow 1 + 0 = 1 \neq 0$ für $n \rightarrow \infty$.
 (Noch z.z. $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq k}$. Dann gilt $\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon$. \square

Satz 3.51 Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $x \in \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n$ und $a_n \rightarrow x$ und $c_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ dann folgt $b_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 3.52

Voraussetzung Seien $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $b_n = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung $b_n \rightarrow \max\{x, y\}$ für $n \rightarrow \infty$.

Beweis Es gilt

$\max\{x, y\} = \sqrt[n]{(\max\{x, y\})^n} \leq \sqrt[n]{x^n + y^n} \leq \sqrt[n]{2(\max\{x, y\})^n} = \sqrt[n]{2} \max\{x, y\}$
 und es gilt $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$. \square

Satz 3.53 Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$.

Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, dann gilt $x_n \rightarrow \sup\{x_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ für $n \rightarrow \infty$.

Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist, dann gilt $x_n \rightarrow \inf\{x_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ für $n \rightarrow \infty$.

Satz 3.54 (Cauchy-Kriterium)

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge* $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists k \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq k} : |x_n - x_m| < \varepsilon$.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent $\Leftrightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy Folge.

Aufgabe 3.55

Voraussetzung Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Behauptung $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 3.56

Voraussetzung Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $x_1 = \frac{3}{2}$ und $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in \mathbb{R}

4 Summierbarkeit

Definition 4.1 (1) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{N}}$.

Definiere für alle $k \in \mathbb{N}$: $s_k := \sum_{n=1}^k x_n$ (k -te Partialsumme von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

$(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt einen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$. Dieser Grenzwert heißt *Summe* von x_n und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ bezeichnet. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *summierbar*, falls $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$.

(2) Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Definiere $s_k := \sum_{n=1}^k z_n$. $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *summierbar*, falls $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert in \mathbb{C} , der Grenzwert wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ bezeichnet.

Bemerkung 4.2 Für monoton steigende Folgen gilt: Grenzwert = Supremum. Summierbare Folgen sind Nullfolgen. Nicht jede Nullfolge ist summierbar

Beispiel 4.3

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}: \underbrace{1}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \frac{1}{17} + \dots$$

Satz 4.4 Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ summierbare Folge in \mathbb{C} , $z \in \mathbb{C}$.

Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} (za_n + b_n) = z \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Satz 4.5 (Majorantenkriterium) a, b Folgen in $\mathbb{R}_{>0}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte: $a_n < b_n$.

(a) Ist b summierbar, so auch a und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(b) Ist a nicht summierbar, so ist es auch b nicht.

Beispiel 4.6

$$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}: s_1 = \sum_{n=1}^1 (-1)^n = -1, s_2 = \sum_{n=1}^2 (-1)^n = 0, s_3 = \sum_{n=1}^3 (-1)^n = -1.$$

Beispiel 4.7 (geometrische Reihe)

Sei $z \in \mathbb{C}$. Falls $|z| < 1$, so ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Beweis Sei $b \in \mathbb{N}_0$ Dann gilt nach 3. Binomischer Formel: $s_k = \sum_{n=0}^k z^n = \frac{1-z^{k+1}}{1-z}$. Also

folgt: $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \frac{1}{1-z}$, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. □

Aufgabe 4.8

Behauptung $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{n+1}3^{-n-1}) = \frac{4}{3}$.

Beweis Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $2^{n+1}3^{-n-1} = 2^{n+1}3^{-(n+1)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. Wegen der geometrischen Reihe folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}$.
 (oder $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.) \square

Aufgabe 4.9

Behauptung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Beweis Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2n-1} \frac{1}{2n+1}$.

(Nebenrechnung) (*Partialbruchzerlegung, Teleskopsumme*) $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1}$
 $\Rightarrow \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A(2n+1)+B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \Rightarrow A(2n+1)+B(2n-1) = 1 \Rightarrow n(2A+2B)+A-B = 1$
 $1 \Rightarrow 2A+2B=0 \Rightarrow A-B=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}$.

(Beweis) Es gilt $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{18} + \frac{1}{18} - \frac{1}{22} + \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k+2}$.

Jetzt folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k+2} \right) = \frac{1}{2}$. \square

Aufgabe 4.10

Behauptung $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist summierbar.

Beweis $\left(\frac{1}{4n^2-1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist summierbar (s.o.). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $4n^2-1 \leq 4n^2$, d.h. nach (OK2) gilt $\frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{4n^2-1}$. Nach Majoranten Kriterium ist $\left(\frac{1}{4n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar. Damit ist auch $4 \cdot \left(\frac{1}{4n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar. \square

Definition 4.11 (Cauchy-Folge) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{C} . $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy Folge, falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists k \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq k} : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

(Verneinung) $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \forall k \in \mathbb{N} \exists n, m \in \mathbb{N}_{\geq k} : |x_n - x_m| \geq \varepsilon$

Beispiel 4.12

Voraussetzung Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n := (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Cauchy Folge.

Beweis Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Setze $n := k, m := k + 1$ Dann gilt $|x_n - x_m| = |x_k - x_{k+1}| = \begin{cases} |-2| & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ |2| & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases} = 2 \geq \varepsilon \quad \square$

Definition 4.13 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ heißt

konvergent, falls $\exists x \in \mathbb{C} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists k \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}_{\geq k} : |x_n - x_m| < \varepsilon$
 nicht konvergent, falls $\forall x \in \mathbb{C} \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \forall k \in \mathbb{N} \exists n, m \in \mathbb{N}_{\geq k} : |x_n - x_m| \geq \varepsilon$

5 Metrische und normierte Räume

Bemerkung 5.1 Idee: Abstände messen auf Mengen.

Definition 5.2 (Metrik) Sei M eine Menge, $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Gelten

- (M1) $\forall x \in M : d(x, x) = 0$
 (M2) $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
 (M3) $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Δ Ungleichung)

so heißt d eine *Halbmetrik* und (M, d) *halbmetrischer Raum*. Gilt zusätzlich

- (M1') $\forall x, y \in M : x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$

so heißt d eine *Metrik* auf M und (M, d) *metrischer Raum*.

Beispiel 5.3

Sei M eine Menge, $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

ist eine Metrik auf M (diskrete Metrik).

Beispiel 5.4

Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ (halb)metrische Räume.

$d : (M_1 \times M_2) \times (M_1 \times M_2) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \sup \{ d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2) \}$ ist eine (Halb-)Metrik auf $M_1 \times M_2$.

Beispiel 5.5

Sei X eine Menge, (M, d) (halb)metrischer Raum.

Dann definiert $d_\infty : M^X \times M^X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (f, g) \mapsto \min \left\{ 1, \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \right\}$ eine Halbmetrik auf M^X .

Definition 5.6 (Norm) Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum, $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Gelten

$$(N1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, v \in V : \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

$$(N2) \quad \forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

so heißt $\|\cdot\|$ *Halbnorm* auf V und $(V, \|\cdot\|)$ *halbnormierter Raum*. Gilt zusätzlich

$$(N3) \quad \forall v \in V \setminus \{0\} : \|v\| > 0$$

so heißt $\|\cdot\|$ *Norm* auf V .

Beispiel 5.7

Sei $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$. Definiere $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $v \mapsto \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{falls } p \in [1, \infty[\\ \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |v_i| & \text{falls } p = \infty \end{cases}$.

Dann ist $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ ein *normierter Raum*.

Beispiel 5.8

Seien V, W (halb)normierte Räume. $(L(V, W), \|\cdot\|_{Op})$ ist dann ein halbnormierter Raum.

Beispiel 5.9

Sei X eine Menge, V (halb)normierter Raum.

$$\begin{aligned} L(X, V) = \mathfrak{B}(X, V) &:= \{ f \in V^X \mid \exists c \in \mathbb{R} \forall x \in X : \|f(x)\| \leq c \} \\ &= \left\{ f \in V^X \mid \sup_{x \in X} \|f(x)\| < \infty \right\} \end{aligned}$$

Für $f \in \mathfrak{B}(X, V)$ definiere $\|f\|_{\text{uni}} := \sup_{x \in X} \|f(x)\|$. Dann $(\mathfrak{B}(X, V), \|\cdot\|_{\text{uni}})$ (halb)normiert.

Beispiel 5.10

Sei $I = [a, b]$, $C^1(I, \mathbb{R}) := \{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist einmal stetig differenzierbar} \}$

$(C^1, \|\cdot\|_{\text{uni}})$ ist normierter Raum. $\|\cdot\|_{C^1} : C^1 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f \mapsto \|f\|_{\text{uni}} + \|f'\|_{\text{uni}}$ ist eine Norm auf C^1 .

Satz 5.11 Jede (Halb)Norm induziert eine (Halb)Metrik durch $(v, w) \rightarrow \|v - w\|$.

Definition 5.12

$$U \subseteq \mathbb{C} \text{ heißt } \textit{offen} \quad :\Leftrightarrow \forall z \in U \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : K_{\mathbb{C}}(z, \varepsilon) \subseteq U$$

$$U \subseteq \mathbb{R} \text{ heißt } \textit{offen} \quad :\Leftrightarrow \forall z \in U \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} :]z - \varepsilon, z + \varepsilon[\subseteq U$$

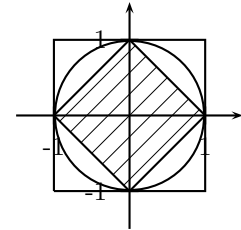
Definition 5.13 Sei (M, d) (halb)metrischer Raum, $z \in M, r \in \mathbb{R}_{>0}$.
 Definiere $K_{(M,d)}(z, r) := \{ x \in M \mid d(x, z) < r \}$.

$$U \subseteq M \text{ heißt offen } :\Leftrightarrow \forall z \in U \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : K_M(z, \varepsilon) \subseteq U$$

Dadurch erhalten wir eine Topologie auf M .

Beispiel 5.14

- $\overline{K}_{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)}(0, 1)$ (Salmi)
- $\overline{K}_{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)}(0, 1)$ (Kreis)
- $\overline{K}_{(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)}(0, 1)$ (Quadrat)



Aufgabe 5.15

Voraussetzung Sei $A \subseteq M, x \in M$.

Behauptung $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) := \inf \{ d(x, a) \mid a \in A \} = 0$.

Beweis \Rightarrow Sei $x \in \overline{A}$. Dann gilt für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} : K_M(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, d.h. es existiert $a \in A \cap K_M(x, \varepsilon)$, d.h. $d(x, A) \leq d(x, a) < \varepsilon \Rightarrow d(x, A) = 0$
 $\Leftarrow \dots$ □

Satz 5.16 Seien M, N (halb)metrische Räume, $f : M \rightarrow N, m \in M$.

$$\begin{aligned}
 f \text{ stetig in } m &\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U}(f(m)) \exists V \in \mathfrak{U}(m) : f(V) \subseteq U \\
 &\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : f(K_M(m, \delta)) \subseteq K_N(f(m), \varepsilon) \\
 &\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \forall x \in M : d_M(m, x) < \delta \Rightarrow d_N(f(m), f(x)) < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Satz 5.17 Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}, x \in M$.

$$\begin{aligned}
 x \text{ ist Grenzwert von } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} &\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U}(x) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : x_n \in U \\
 &\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : d(x, x_n) < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Satz 5.18 Seien M, N (halb)metrische Räume $f : M \rightarrow N, m \in M$.

$$f \text{ ist stetig in } m \Leftrightarrow \left(\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(m) \right).$$

Beweis \Rightarrow Sei f stetig in m . Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$, es gelte $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$.
 (z.z. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : d(f(m), f(x_n)) < \varepsilon$.) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wähle $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass für alle $x \in M$ mit $d_M(m, x) < \delta$ gilt $d_N(f(m), f(x)) < \varepsilon$.
 Wähle gemäß Konvergenz $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0 : d(m, x_k) < \delta$. Setze $n_0 := k_0$.
 Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$. Da also $d(m, x_n) < \delta$ ist, folgt $d_N(f(m), f(x_n)) < \varepsilon$.
 $\Leftarrow \dots$ □

Aufgabe 5.19

Voraussetzung Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Behauptung f ist nicht stetig.

Beweis Definiere $(x_n, y_n) := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$, aber $f(x_n, y_n) = \frac{1}{2} \not\rightarrow f(0, 0)$. □

Definition 5.20 Sei (M, d) (halb)metrischer Raum $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Bemerkung 5.21 Im Allgemeinen konvergiert in einem metrischen Raum nicht jede Cauchy Folge. z.B. $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy Folge.

Definition 5.22

- (1) Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchy Folge konvergiert heißt *vollständig*.
- (2) Ein normierter Raum, welcher als metrischer Raum vollständig ist, heißt *Banachraum*.

Definition 5.23 M, N (halb)metrische Räume, $f : M \rightarrow N$. f heißt

- (a) *stetig*, falls $\forall m \in M \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \forall x \in M : d_M(x, m) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(m)) < \varepsilon$
- (b) *gleichmässig stetig*, falls $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \forall x, m \in M : d_M(x, m) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(m)) < \varepsilon$
- (c) *Lipschitz stetig*, falls $\exists L \in \mathbb{R}_{\geq 0} \forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_M(x, y)$

L heißt *Lipschitz-Konstante*.

Bemerkung 5.24 Es gilt (c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a).

(a) \Rightarrow (b) i.A. nicht Bsp.: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ und (b) \Rightarrow (c) i.A. nicht Bsp.: $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$.

Definition 5.25 Sei $f \in N^M$. Dann heißt f *Cauchy-Folgen-treu*, wenn für jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ gilt: $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in N .

Beispiel 5.26

$f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \rightarrow \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht Cauchy-Folgen-treu.
 $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, aber $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht.

Satz 5.27 V, W (halb)normierte Räume, $T : V \rightarrow W$ linear. Dann sind äquivalent

- (1) T ist stetig
- (2) T ist stetig in 0
- (3) $\exists c \in \mathbb{R}_{\geq 0} \forall v \in V : \|T(v)\|_W \leq c \cdot \|v\|_V$

Definition 5.28 $L(V, W) := \{ T : V \rightarrow W \mid T \text{ linear und stetig} \}$.

Dann definiert $\|\cdot\|_{\text{Op}} : L(V, W) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, T \mapsto \inf \{ c \in \mathbb{R}_{>0} \mid \forall v \in V : \|Tv\| \leq c\|v\| \}$ eine (Halb)Norm auf $L(V, W)$, welche genau dann eine Norm ist, wenn $\|\cdot\|_W$ eine Norm ist. Ferner gilt für alle $T \in L(V, W)$: $\|T\|_{\text{Op}} = \sup \{ \|Tv\| \mid v \in \overline{K}_v(0, 1) \}$

Aufgabe 5.29

Voraussetzung Sei $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $M(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, wobei \mathbb{R}^2 jeweils mit $\|\cdot\|_{\infty}$ ausgestattet sei.

Behauptung $\|A\|_{\text{Op}} = 7$.

Beweis Sei $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|A(v)\|_{\infty} &= \|A(v_1 e_1 + v_2 e_2)\|_{\infty} = \|v_1 A e_1 + v_2 A e_2\|_{\infty} \leq |v_1| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} + |v_2| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \\ &= 3|v_1| + 4|v_2| \leq 3 \max \{ |v_1|, |v_2| \} + 4 \max \{ |v_1|, |v_2| \} = 7\|v\|_{\infty} \Rightarrow \|A\|_{\infty} \leq 7 \end{aligned}$$

Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \overline{K}_V(0, 1)$, folgt, wegen $\left\| A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = 7$, dass $\|A\|_{\text{Op}} \geq 7$. Also folgt $\|A\|_{\text{Op}} = 7$. □

Satz 5.30 Ist V normiert und end. dimensional, so ist jede lineare Abb. $V \rightarrow W$ stetig.

Satz 5.31 Seien U, V, W (halb)normierte Räume, $b : U \times V \rightarrow W$ bilinear. Dann sind äquivalent:

- (1) b ist stetig
- (2) b ist stetig in 0
- (3) $\exists c \geq 0 \forall (u, v) \in U \times V : \|b(u, v)\|_W \leq c\|u\|_U\|v\|_V$

Aufgabe 5.32

Behauptung $ev : L(V, W) \times V \rightarrow W, (T, v) \rightarrow Tv$ ist stetig.

Beweis Sei $T \in L(V, W), v \in V$. Dann gilt $\|ev(T, v)\|_W = \|Tv\|_W \leq \|T\|_{Op}\|v\|_V$.
 $(\Rightarrow \|ev\| = 1.)$ □

5.1 Konvergenz von Funktionsfolgen

Definition 5.33 Sei (M, d) metrischer Raum, X Menge, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (M^X)^{\mathbb{N}}, f \in M^X$.
 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *punktweise konvergent* gegen f , falls $\forall x \in X : f_n(x) \rightarrow f(x)$, d.h.

$$\forall x \in X \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : d_M(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *gleichmässig konvergent* gegen f , falls $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (M^*, d_∞) gegen f konvergiert, $d_\infty(f, g) := \min \left\{ 1, \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \right\}$, d.h.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \forall x \in X : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

(Verneinung) $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \exists x \in X : d(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon$

Bemerkung 5.34 Sei V ein normierter Raum und X ein topologischer Raum. Dann gilt $\overline{C(X, V)}^{\|\cdot\|_\infty} = C(X, V)$, d.h. der gleichmässige Limes einer Folge stetiger Funktionen ist selbst stetig.

Beispiel 5.35

$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ konvergiert punktweise gegen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$
aber nicht gleichmässig.

Beweis $(f_n(0))_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}, (f_n(1))_{n \in \mathbb{N}} = (1)_{n \in \mathbb{N}}, (\frac{1}{2})_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$.
 $f_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ konvergiert punktweise $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ aber nicht gleichmässig. □

Aufgabe 5.36

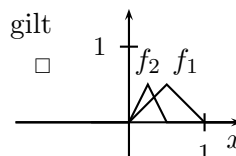
Voraussetzung Sei $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \Phi(nx)$.

Behauptung $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ aber nicht gleichmässig.

Beweis

Setze $\varepsilon := \frac{1}{4}$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Setze $n := n_0$. Setze $x := \frac{1}{2n}$. Dann gilt $f_n(x) = \Phi(nx) = \Phi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} = \varepsilon$.

**6 Summierbarkeit**

Definition 6.1 Sei V ein normierter Raum, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$.

Definiere $s_n(a) := \sum_{k=1}^n a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Betrachte $(s_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$.

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt *summierbar*, falls $(s_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in V . Ist dies der Fall, so heißt der Grenzwert *Summe* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *absolut summierbar*, falls $(\|a_k\|)_{k \in \mathbb{N}}$ summierbar ist.

Satz 6.2 V vollständig \Leftrightarrow (jede absolut summierbare Folge in V ist summierbar)

Satz 6.3 (geometrische Reihe) Sei $z \in \mathbb{C}$.

Dann gilt $|z| < 1 \Rightarrow (z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist summierbar und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Aufgabe 6.4

Behauptung $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{1+i} \right)^n = -3i$.

Beweis Wegen $\left| \frac{1}{1+i} \right| = \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, ist $\left(\left(\frac{1}{1+i} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ summierbar und es gilt

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{1+i}{1+i-1} = \frac{1+i}{i}$, also $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i} \right)^n - 1 = \frac{1}{i} = -i$. Es

folgt $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{1+i} \right)^n = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i} \right)^n = -3i$. \square

Satz 6.5 (Wurzelkriterium) Sei $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V . Dann ist a

absolut summierbar, falls $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}} < 1$

nicht summierbar, falls $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}} > 1$

Satz 6.6 (Quotientenkriterium) Seien $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V und $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq k}$. Dann ist a

absolut summierbar, falls $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

nicht summierbar, falls $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq k} : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

Satz 6.7 (Leibnizkriterium) Sei $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}_{>0}$. Dann ist die Folge $((-1)^n r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar.

Satz 6.8 (Cauchy-Verdichtung) Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ monoton fallend. Dann gilt a summierbar $\Leftrightarrow (2^k a_{2^k})_{k \in \mathbb{N}}$ summierbar

Satz 6.9 $f : \mathbb{R}_{>1} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend.

Dann gilt $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(t) dt$ existiert.

Aufgabe 6.10

Behauptung $(n^{2n} e^{-n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ ist summierbar.

Beweis $0 \leq \sqrt[n]{n^{2n} e^{-n^2}} = n^2 e^{-n} = \frac{n^2}{e^n} = \frac{n^2}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^k} \leq \frac{n^2}{\frac{n^3}{3!}} = 6 \frac{1}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Nach Einschnürungssatz gilt also Grenzwert = 0. \square

7 Häufungskompaktheit

Definition 7.1 Sei M ein separierter topologischer Raum. M heißt, *häufungskompakt* wenn jede unendliche Teilmenge von M einen Häufungspunkt besitzt.
(x Häufungspunkt von $L \subseteq M \Leftrightarrow x \in \overline{L} \setminus \{x\}$).

Satz 7.2 M sei häufungskompakt und $g : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ stetig. Dann ist $g(M)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$, hat also insbesondere ein Maximum und ein Minimum, sofern $M \neq \emptyset$.

Satz 7.3 (1) Kompakte Teilmengen metrischer Räume sind abgeschlossen.
(2) Kompakte Teilmengen normierter Räume sind beschränkt.

Satz 7.4 (Heine Borel) V endlich dimensional normierter Raum.
 $K \subseteq V$ häufungskompakt $\Leftrightarrow K$ beschränkt und abgeschlossen.

Beispiel 7.5
 $\overline{K}_V(0,1)$

Satz 7.6 M häufungskompakter metrischer Raum, N halbmétrischer Raum.
 $f : M \rightarrow N$ stetig $\Rightarrow f$ gleichmässig stetig.

Beispiel 7.7
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f|_{[a,b]}$ gleichmässig stetig.

Satz 7.8 Seien K, L separierte topologische Räume, K sei häufungskompakt und $f : K \rightarrow L$ stetig. Dann ist auch $f(K)$ häufungskompakt.

Beweis für f injektiv. Sei $Y \subseteq f(K)$ eine unendliche Teilmenge.
Setze $X = f^{-1}(Y) \subseteq K$. Dann ist X unendlich, besitzt also einen Häufungspunkt $x \in K$ (d.h. $x \in \overline{X} \setminus \{x\}$). Da f stetig ist, folgt $f(x) \in \overline{f(X \setminus \{x\})}$. (z.z. $f(x) \in \overline{Y \setminus \{f(x)\}}$.)
 $f(x) \in \overline{f(X \setminus \{x\})} = \overline{f(X) \setminus \{f(x)\}} = \overline{Y \setminus \{f(x)\}}$.
Denn es gilt $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ für f injektiv (und $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$ f.a. f). \square

8 Differenzierbarkeit

Bemerkung 8.1 Motivation: (Newton) physikalisch (abstarkt arithmetisch)

$s : I \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow s(t)$. Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1, t_2]$

$$= \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{zurückgelegte Zeit}} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \xrightarrow{t_2 \rightarrow t_1} \text{Geschwindigkeit in } t_1$$

(anschaulich geometrisch) $x \mapsto m(x - p) + f(p)$

(Frechet) lineare Approximation. Durch studieren der Ableitung in einem Punkt (affine lineare Ableitung = einfach) möchte man Informationen über die Funktion f (im Allgemeinen kompliziert) gewinnen.

Generalvoraussetzung 8.2 E, F Banachräume. $U \subseteq E$ offen, $p \in U$, $f : U \rightarrow F$.

Definition 8.3 f diffbar in $p \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(p + \xi) - f(p)}{\xi} =: f'(\xi)$ existiert.

Definition 8.4 f heißt in p *total* (oder *Frechet*) *differenzierbar*, wenn ein $T \in L(E, F)$ existiert so, dass gilt $\lim_{\xi \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(p + \xi) - f(p) - T \cdot \xi}{\|\xi\|_E}}_{\tilde{R}(p, \xi)} = 0$ (*) ($T \cdot \xi := T(\xi)$)

Notation: $Df(p) := T$.

Satz 8.5 Wenn f in p differenzierbar ist, ist die stetige lineare Abbildung T eindeutig.

Beweis Seien $T_1, T_2 \in L(E, F)$, die (*) erfüllen. (Zeige $S := T_1 - T_2 = 0$.) Da U offen ist, finden wir ein $r > 0$ so, dass $\overline{K}(p, r) \subseteq U$, d.h. für alle $\xi \in E$ mit $\|\xi\| \leq r$ gilt $p + \xi \in U$, also $\frac{f(p + \xi) - f(p) - T_1 \xi}{\|\xi\|} - \frac{f(p + \xi) - f(p) - T_2 \xi}{\|\xi\|} = \frac{(T_2 - T_1)\xi}{\|\xi\|} = \frac{S\xi}{\|\xi\|} \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0$.

Denn: Sei $x \in E \setminus \{0\}$. Setze $\xi_n := \frac{r}{n} \frac{x}{\|x\|}$, dann ist $\xi_n \in \overline{K}(0, r)$ und $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, also

folgt $\frac{Sx}{\|x\|} = \frac{S\left(\frac{r}{n} \frac{x}{\|x\|}\right)}{\frac{r}{n}} = \frac{S\xi_n}{\|\xi_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ also ist $\frac{Sx}{\|x\|}$ und damit auch $Sx = 0$.

Satz 8.6 Sei f differenzierbar in p . Dann ist f stetig in p .

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta > 0$ mit $\|\xi\| < \delta$. Dann folgt $\|\tilde{R}_f(p, \xi)\| < \varepsilon$.

Setze $\tilde{\delta} := \min\{\delta, 1\}$. Sei $\|\xi\| < \tilde{\delta}$.

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \|\xi\|\varepsilon > \|f(p+\xi) - f(p) - T\xi\| \\ &= \|f(p+\xi) - f(p) + Tp - (Tp + T\xi)\| = \|(f-T)(p+\xi) - (f-T)(p)\| \end{aligned}$$

$\Rightarrow (f-T)|_U$ ist stetig, da $T|_U$ stetig ist, ist damit auch $f = (f-T)|_U + T$ stetig. \square

Aufgabe 8.7

Voraussetzung $E := F := (C([0,1], \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$. $Q : E \rightarrow E, f \mapsto f^2$.

Behauptung $DQ(f) : E \rightarrow E, h \mapsto 2fh$.

Beweis (Rezept) Sei $f \in C([0,1], \mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} Q(f+h) - Q(f) &= (f+h)^2 - f^2 = (f+h)(f+h) - f^2 = f^2 + fh + fh + h^2 - f^2 \\ &= \underbrace{2fh}_{=Th \text{ (linear in } h)}} + \underbrace{h^2}_{\text{(nicht linear in } h)}}. \end{aligned}$$

Kandidat für $DQ(f)$ ist. $T : E \rightarrow E, h \mapsto 2fh$

(Beweis) $\frac{\|Q(f+h) - Q(f) - Th\|_\infty}{\|h\|_\infty} = \frac{\|h^2\|_\infty}{\|h\|_\infty} = \frac{\|h\|_\infty^2}{\|h\|_\infty} = \|h\|_\infty \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. \square

Aufgabe 8.8

Voraussetzung Sei $E = E_1 \times E_2$. E_1, E_2 Banachräume. $b : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ sei bilinear und stetig. Sei $(p_1, p_2) \in E_1 \times E_2$.

Behauptung ...

Beweis (Rezept)

$$\begin{aligned} b((p_1, p_2) + (\xi_1, \xi_2)) - b(p_1, p_2) &= b((p_1 + \xi_1), (p_2 + \xi_2)) - b(p_1, p_2) \\ &= b(p_1, p_2) + b(\xi_1, p_2) + b(p_1, \xi_2) + b(\xi_1, \xi_2) - b(p_1, p_2) \\ &= \underbrace{b(\xi_1, p_2) + b(p_1, \xi_2)}_{=T\xi \text{ (stetig und linear in } \xi)}} + b(\xi_1, \xi_2) \end{aligned}$$

(Beweis) $\tilde{R}_b(p, \xi) = \frac{\|b(\xi_1, \xi_2)\|_F}{\|(\xi_1, \xi_2)\|_{E_1 \times E_2}} \leq \frac{\|b\|_{\text{Op}} \|\xi\|_{E_2} \|\xi\|_{E_1}}{\max\{\|\times_1\|_{E_1}, \|\xi_2\|_{E_2}\}} \rightarrow 0$ für $\xi \rightarrow 0$. \square

Satz 8.9 (Summenregel, Linearität des Differenzierens)

Sind $f, g : X \rightarrow F$ diffbar in p , so ist $f + \lambda g$ für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ in p diffbar, und es gilt

$$\begin{aligned} D(f + \lambda g)(p) &= Df(p) + \lambda Dg(p) \\ (E = \mathbb{K}) \quad (f + \lambda g)'(p) &= f'(p) + \lambda g'(p) \end{aligned}$$

Satz 8.10 (Kettenregel) $D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \circ Df(p)$

Satz 8.11 ($\frac{1}{f}$ Regel) Sei $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ in p diffbar.

Dann ist $\frac{1}{f}$ in p diffbar mit Ableitung $-\frac{Df(p)}{f(p)^2}$. Im Fall $E = \mathbb{K}$ gilt $\left(\frac{1}{f}\right)'(p) = -\frac{f'(p)}{f(p)^2}$.

Satz 8.12 Seien f und g in x differenzierbar, dann gilt

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (\text{Produktregel}) \quad (fg)'(p) &= f'(p)g(p) + f(p)g'(p) \\ (\text{Quotientenregel}) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

Satz 8.13 (Zusammenhang zwischen Newton und Frechet Ableitung)

Sei $E = \mathbb{K}$. f ist Frechet-differenzierbar in $p \Leftrightarrow f$ ist Newton differenzierbar in p .
Dann gilt $f'(p) = Df(p) \cdot 1_{\mathbb{K}}$ und $Df(p)\xi = \xi f'(p)$.

Aufgabe 8.14

Behauptung Die Newton Version der Kettenregel lautet im

Fall $E = \mathbb{K}$: $Dg(f(p))f'(p)$

Fall $E = \mathbb{K}$ und zusätzlich $F = \mathbb{K}$: $f'(p)g'(f(p))$

Beweis $(g \circ f)'(p) = D(g \circ f)(p) \cdot 1 = Dg(f(p))(Df(p)) \cdot 1 = Dg(f(p))f'(p) = f'(p)g'(f(p))$ □

8.1 Richtungsableitungen

Bemerkung 8.15 (Idee)

Zurückführung des Falles E ist Vektorraum auf die 1-dimensionale Situation (Newton-differenzierbar), indem nur in eine bestimmte Richtung $\xi \in \dot{E}$ differenziert wird, d.h. wir betrachten nur die Funktion $f|_{\mathbb{K}\xi}$.

Definition 8.16 $\xi \in \dot{E} : (\partial_{\xi} f)(p) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+t\xi) - f(p)}{t}$ (sofern der Limes existiert)

bzw. mit $\varphi(t) := F(p+t \cdot \xi)$ (für $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$ hinreichend klein) ist $(\partial_{\xi} f)(p) = \xi'(0)$ (sofern φ differenzierbar).

Satz 8.17 f Frechet-diffbar in $p \Rightarrow f$ ist in jede Richtung ξ richtungsdifferenzierbar, und es gilt: $Df(p) \cdot \xi = (\partial_\xi f)(p)$. (Achtung: Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.)

Beispiel 8.18

Sei $f : E \rightarrow F$ diffbar, definiere $g : \mathbb{K} \times E \rightarrow F, (t, x) \mapsto f(t \cdot x)$.

Für festes $x \in E$ sei $g_x := g(\cdot, x) : \mathbb{K} \rightarrow F, t \mapsto g(t, x)$

$\varphi : \mathbb{K} \rightarrow E, t \mapsto tx, g_x = f \circ \varphi$

φ ist linear und stetig (weil lineare Abbildung auf endlich dimensionalen Raum)

$\|\varphi\|_{\text{Op}} = \|x\|$

$$\begin{aligned} (\text{Bew: } \sup \{ \|\varphi(t)\|_E \mid t \in \overline{\mathbb{K}}(0, 1) \}) &= \sup \{ |t| \|x\|_E \mid t \in \overline{\mathbb{K}}(0, 1) \} \\ &= \sup \{ |t| \mid t \in \overline{\mathbb{K}}(0, 1) \} \|x\|_E = 1 \cdot \|x\|_E \end{aligned}$$

$\varphi' : \mathbb{K} \rightarrow E, t \mapsto x$

$g'_x(t) = (f \circ \varphi)'(t) = Df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = Df(tx) \cdot x$

$D\varphi(t) : \mathbb{K} \rightarrow E, s \mapsto sDf(tx)x$

Bemerkung 8.19 $\varphi : \mathbb{K} \times E \rightarrow F, (t, x) \mapsto tx, \|\varphi(t, x)\| = \|tx\| = |t| \|x\|_E$

Definition 8.20 (partielle Ableitung) $E = \mathbb{K}^n. \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) := (\partial_j f)(p) := (\partial_{e_j} f)(p)$

Satz 8.21 Wenn f in alle Richtungen partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen in p stetig sind, dann ist f in p auch total differenzierbar.

Satz 8.22 Zusätzlich $F = \mathbb{K}^m. J_f(p) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$

Satz 8.23 Wenn f in p total differenzierbar ist, so ist $J_f(p) = M(Df(p))$.

Zusätzlich $m = 1$, also $F = \mathbb{K}$, dann $(\text{grad } f)(p) := (\partial_1 f(p), \dots, \partial_n f(p)) \in \mathbb{K}^n$.

f total diffbar $\Rightarrow Df(p) \cdot \xi = \langle (\text{grad } f)(p) \mid \xi \rangle$.

Aufgabe 8.24

Voraussetzung Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_3 + e^{x_2} \\ x_3 \log(1 + x_3^2) - x_2 \sin(x_1^2) \end{pmatrix}$

Behauptung f ist total differenzierbar.

Beweis Es gilt

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & e^{x_2} x_1 \\ -x_2 \cos(x_1^2) 2x_1 - \sin(x_1^2) & \log((1+x_3^2)) + x_3 \frac{1 \cdot 2x_3}{1+x_3^2} \end{pmatrix}.$$

$Df(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \xi \mapsto J_f(p) \cdot \xi.$ □

Aufgabe 8.25 (Gegenbeispiel)

Voraussetzung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Behauptung f ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar.

f ist in $(0, 0)$ nicht total differenzierbar.

Beweis $\partial_1 f(0, 0)$

$\varphi(t) := f((0, 0) + t(1, 0)) = f(t, 0) = \frac{t^3}{t^2+0} = t$

$(\partial_1 f)(0, 0) = (\partial_{e_1} f)(0, 0) = \varphi'(0) = 1$

$\partial_2 f(0, 0) = 0$

Kandidat für die Ableitung in 0: $Df(0, 0)e_1 = (\partial_1 f)(0, 0) = \frac{1}{0}, J_f(0, 0) = (1 \ 0)$

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \xi \rightarrow J_f(0, 0)\xi = (1 \ 0) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1.$

$\frac{|R_f(0,0)|}{\|(\xi_1, \xi_2)\|_2} = \frac{|f(0, \xi) - f(0) - T \cdot \xi|}{\|\xi\|_2} = \frac{|\frac{\xi_1^3}{\xi_1^2 + \xi_2^2} - \xi_1|}{\|\xi\|_2} = \frac{|\xi_1^3 - \xi_1^3 - \xi_1 \xi_2^2|}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)\|\xi_1, \xi_2\|_2} = \frac{-\xi_1 \cdot \xi_2^2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} = \frac{|\xi_1 \|\xi_2\|^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{3}{2}}}$

...

□

9 Zentrale Sätze und Anwendungen der Differenzialrechnung

Generalvoraussetzung 9.1 E, F Banachräume. $U \subseteq E$ offen, $p \in U, f : U \rightarrow F.$

Satz 9.2 (Mittelwert-Ungleichung) Seien $p, x \in U$ so, dass $[p, x] \subseteq U$ und f ist in jedem Punkt aus $]p, x[$ differenzierbar und f ist in jedem Punkt aus $\{p, x\}$ stetig. Dann folgt $\|f(x) - f(p)\|_F \leq \sup_{u \in]p, x[} \|Df(u)\|_{Op} \|x - p\|.$

Aufgabe 9.3

Voraussetzung Sei $U \neq \emptyset$ offen und zusammenhängend und es gelte $Df \equiv 0.$

Behauptung f ist konstant.

Beweis (Zusammenhangschluß) (Ansatz) Wähle $y \in f(U)$, setze $\tilde{U} := f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. \tilde{U} ist abgeschlossen: klar da f stetig.

\tilde{U} ist offen: Sei $x \in \tilde{U}$ (d.h. $f(x) = y$) Wähle $\varepsilon > 0$ mit $K(x, \varepsilon) \subseteq U$. Zeige $V \subseteq \tilde{U}$. Sei $x' \in V$. Da V konvex ist, ist $[x, x'] \subseteq V \subseteq U$. Mit Mittelwert-Ungleichung folgt: $\|f(x) - f(x')\| \leq 0\|x - x'\| = 0$ also ist $f(x') = f(x) = y$, also $x' \in f^{-1}(\{y\}) = \tilde{U}$. \square

Aufgabe 9.4

Voraussetzung Für $a, b \in \mathbb{R}$ definiere $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2e^x + a, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (bx+3)^2$. $f := (g|_{\mathbb{R}_{<0}} \cup h|_{\mathbb{R}_{\geq 0}})$.

Behauptung f ist differenzierbar $\Leftrightarrow (a, b) = (7, \frac{1}{3})$.

Beweis Aus $g(0) = h(0)$ und $g'(0) = h'(0)$ folgt f stetig in 0 und differenzierbar. $g(0) = h(0) \Leftrightarrow 2 + a = 3^2 \Leftrightarrow a = 7$ und dann $g'(0) = h'(0) \Leftrightarrow 2 = 6b \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$. \square

Satz 9.5 (Monotoniekriterien) Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$. Sei $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in jedem Punkt von $]a, b[$ rechtsseitig differenzierbar ist. Dann gilt

- (1) h konstant $\Leftrightarrow \forall x \in]a, b[: h'_+(x) = 0$.
- (2) h monoton steigend (fallend) $\Leftrightarrow \forall x \in]a, b[: h'_+(x) \geq 0$ ($h'_+(x) \leq 0$)
- (3) h streng monoton steigend (fallend) $\Leftrightarrow \forall x \in]a, b[: h'_+(x) \geq 0$ ($h'_+(x) \leq 0$) und $\{x \in]a, b[\mid h'_+(x) = 0\}$ kein Intervall positiver Länge enthält.

Aufgabe 9.6

Voraussetzung Sei $y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, definiere $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \frac{1}{n}(yx^{1-n} + (n-1)x)$

Behauptung (Monotonieintervalle bestimmen)

$f|_{]0, \sqrt[n]{y}]}$ ist streng monoton fallend. $f|_{[\sqrt[n]{y}, +\infty[}$ ist streng monoton steigend.

f besitzt genau ein Extremum, nämlich ein globales Minimum in $\sqrt[n]{y}$.

Beweis f ist differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $f'(x) = \frac{1}{n}((1-n)yx^{-n} + (n-1))$ also gilt für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\begin{aligned} f'(x) \leq 0 &\Leftrightarrow -(n-1)yx^{-n} + (n-1) \leq 0 \Leftrightarrow -yx^{-n} + 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x^n \leq y \Leftrightarrow x \leq \sqrt[n]{y} \end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung zeigt $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$. \square

Satz 9.7 (Umkehrsatz) f^{-1} in p diffbar und $q := f(p)$, so ist $Df^{-1}(q) = Df(p)^{-1}$.

Satz 9.8 (Umkehrsatz) Sei $E = \mathbb{K} = F$. Sei f injektiv und in p differenzierbar, und $q := f(p)$ sei Häufungspunkt von $f(X)$. Dann gilt

- (1) f^{-1} ist in q differenzierbar $\Leftrightarrow f^{-1}$ ist in q stetig und $f'(p) \neq 0$.
 (2) Ist f^{-1} in q differenzierbar, so ist $(f^{-1})'(f(p)) = \frac{1}{f'(p)}$.

Aufgabe 9.9

Voraussetzung Sei $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$.

Behauptung f ist injektiv und f^{-1} ist differenzierbar mit $(f^{-1})'(q) = \frac{1}{1+q^2}$.

Beweis Es gilt $f = \frac{\sin}{\cos} \Big|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$, also ist f differenzierbar und für alle $x \in I$ gilt:

$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$. Also ist f streng monoton steigend, insbesondere injektiv, weiter ist f' stetig. Nach Umkehrsatz ist f^{-1} differenzierbar. Sei $p \in I$ und $q := f(p)$ dann gilt $(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{1+(\tan p)^2} = \frac{1}{1+q^2}$. \square

Aufgabe 9.10

Voraussetzung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} e^{x^2} \cos y \\ \sinh(xy) \end{pmatrix}$.

Behauptung f ist in einer Umgebung von $p := (1, 0)$ invertierbar und die Umkehrabbildung ist differenzierbar in $(e, 0) = f(p)$.

Beweis $(\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh' = \cosh, \cosh' = \sinh$.)

$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2} \cos y & -e^{x^2} \sin y \\ y \cosh(xy) & x \cosh(xy) \end{pmatrix}$. $(x, y) \mapsto J_f(x, y)$ ist stetig, also ist Df stetig.

$J_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 2e \neq 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $J_f(1, 0)$ ist invertierbar mit $(J_f(1, 0))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2e} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Umkehrsatz \Rightarrow Behauptung, und $J_{f^{-1}}(e, 0) = J_{f^{-1}}(f(1, 0)) = (J_f(1, 0))^{-1}$. \square

Satz 9.11 (Differenzierbarkeit von Grenzfunktionen) ...

$$\left. \begin{array}{l} f_n \rightarrow f \\ f'_n \rightarrow g \text{ gleichmäßig} \end{array} \right\} \Rightarrow g = f'.$$

Aufgabe 9.12

Voraussetzung $I \subseteq \mathbb{R}$ sei kompaktes Intervall,

für alle $f \in C^1(I, F) = \{f \in C(I, F) \mid f \text{ ist stetig differenzierbar}\}$.

$\|f\|_{C^1} := \|f\|_{\text{uni}} + \|f'\|_{\text{uni}}$. Sei $X := (C^1(I, F), \|\cdot\|_{C^1})$.

Behauptung X ist ein Banachraum.

Beweis Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge. $\varepsilon > \|f\|_{C^1} \geq \|f\|_{\text{uni}}$ und $\|f\|_{C^1} \geq \|f'\|_{\text{uni}}$
 $\|f_n - f_m\|_{\text{uni}} \leq \|f_n - f_m\|_{C^1} < \varepsilon$
 Dann sind $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy Folgen bezüglich $\|\cdot\|_{\text{uni}}$, also existieren $f, g \in C(I, F)$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\text{uni}}} f$ und $f'_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\text{uni}}} g \Rightarrow f$ ist differenzierbar und $f' = g$.
 $\|f - f_n\|_{C^1} = \|f - f_n\|_{\text{uni}} + \|(f - f_n)'\|_{\text{uni}} \rightarrow 0.$ □

Satz 9.13 (Regel von l'Hopital) Sei I ein nicht-leeres offenes Teilintervall von \mathbb{R} , und sei b einer der Randpunkte von I in $\overline{\mathbb{R}}$. Ferner seien $f : I \rightarrow F$ und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit
 (1) $\forall x \in I : g'(x) \neq 0$.
 (2) a) $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ oder b) $\lim_{x \rightarrow b} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$.
 Falls dann $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Aufgabe 9.14

Behauptung $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{i \log \cos t}{\log(1+t^2)} = -\frac{i}{2}.$

Beweis Definiere

$$f :]0, \frac{\pi}{4}[\rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto i \log \cos(x)$$

$$g :]0, \frac{\pi}{4}[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log(1+x^2)$$

Dann sind f, g differenzierbar und es gilt nach Kettenregel für alle $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$:

$$f'(x) = i \frac{-\sin x}{\cos x} \text{ und } g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \text{ d.h. } g'(x) > 0 \text{ und es gilt } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

$$\text{Für alle } x \in]0, \frac{\pi}{4}[\text{ gilt } \frac{f'(x)}{g'(x)} = -i \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \frac{1+x^2}{2x} = -i \underbrace{\frac{(1+x^2)}{2 \cos x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{i}{2}.$$

(l'Hopital)

Nach Hopital folgt: Es ex. der Grenzwert $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ für $x \rightarrow 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{i}{2}.$ □

Aufgabe 9.15

Behauptung $\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \rightarrow 1$ für $t \rightarrow +\infty$.

Beweis (1. Versuch l'Hopital) Definiere

$$f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{1+t^2}$$

$$g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_{>0} : f'(t) = \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \text{ und } g'(t) = 1 \Rightarrow \frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

(2. Versuch) Es gilt $\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{t^2}} = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}$. Wurzel ist stetig, also kann man den

$$\text{Limes reinziehen, also } \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t^2} + 1\right)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1. \quad \square$$

Aufgabe 9.16

Behauptung $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1.$

Beweis (Idee) $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : x^x = \exp(x \log x) = \exp\left(\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\right)$. □

10 Integration

Definition 10.1

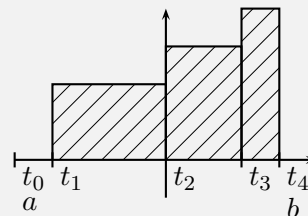
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall (d.h. $I = [a, b]$) ($a, b \in \mathbb{R}$) und F ein \mathbb{K} -Banachraum. Sei $f : I \rightarrow F$. f heißt *Treppenfunktion*, falls es $k \in \mathbb{N}$ und $t_0, \dots, t_k \in I$ so gibt, dass $f|_{]t_{i-1}, t_i[}$ konstant ist für alle $t \in \{1, \dots, k\}$.

$S(I, F) := \{g : I \rightarrow F \mid g \text{ ist Treppenfunktion}\}$

Es gilt $S(I, F) \subseteq B(I, F)$.

Sei $f \in S(I, F)$. Dann definiere $\int f := \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1})f(x_i)$,

wobei $x_i \in]t_{i-1}, t_i[$



10.1 Eigenschaften des Integrals auf $S(I, F)$

Satz 10.2 (1) $(S(I, F), \|\cdot\|_\infty)$ ist normierter Raum (nicht vollständig).

(2) $\int : S(I, F) \rightarrow F, g \mapsto \int g$ ist stetig und linear mit $\|\int\|_{\text{Op}} \leq \|\int g\|_F \leq (b-a) \cdot \|g\|_\infty$ für alle $g \in S(I, F)$.

(3) Monotonie des Integrals:

$\int(\cdot)$ ist monoton steigend, d.h. $\forall f, g \in S(I, F) : f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$

(4) Vertauschen mit linearen Abbildungen:

Sei $T : F \rightarrow G$ linear und $f \in S(I, F)$ dann gilt $\int T \circ f = T(\int f)$

Satz 10.3 $\mathfrak{R}(I, F) = \overline{S(I, F)}^{\|\cdot\|_\infty}$, d.h. für jedes $g \in \mathfrak{R}(I, F)$ existiert eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(I, F)$ mit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen g ($g_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{n \rightarrow \infty} g$).

Satz 10.4 Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{R}(I, F)$ und sei $f \in F^I$. Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f , so ist f aus $\mathfrak{R}(I, F)$ und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f$.
(Das Integral hängt nicht von der Wahl von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ab.)

10.2 Eigenschaften des Integrals auf $\mathfrak{R}(I, F)$

Satz 10.5 (1) Invarianz auf endlichen Mengen.

(2) $f, g \in \mathfrak{R}(I, \mathbb{R}) : f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ (Monotonie)

(3) $\forall f \in \mathfrak{R}(I, F) : \|\int f\|_F = \int \|f\|_F \leq (b-a) \|f\|_\infty$ (Kontraposition Δ Ungleichung)

(4) Vertauschbarkeit mit stetigen linearen Abbildungen.

(5) Integral ist stetig und linear ($\int : \mathfrak{R}(I, F) \rightarrow F$)

Falls $F = F_1 \times F_2, f = (f_1, f_2) \Rightarrow \int f = (\int f_1, \int f_2)$

(6) Für $F = \mathbb{C}$ gilt $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \Rightarrow \int f = \int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f$

10.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition 10.6 Sei $f \in \mathfrak{R}(I, F)$. $F : I \rightarrow F$ heißt *Stammfunktion* von f falls $F' = f$.

Satz 10.7 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Satz 10.8 $(fg)' = f'g + fg'$ und $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Satz 10.9 (partielle Integration) Seien $f, g \in C^1(I, \mathbb{C})$ und $a, b \in \mathbb{R}$ dann gilt

$$\int_a^b f'g dt = fg|_a^b - \int_a^b fg' dt$$

Satz 10.10 (Substitutions-Regel) Seien $c, d \in \mathbb{R}$ und sei $\Phi : [c, d] \rightarrow I$ eine stetig-differenzierbare Funktion. Dann gilt für jede stetige Abbildung $g : I \rightarrow F$:

$$\int_{\Phi(c)}^{\Phi(d)} g(t) dt = \int_c^d \Phi'(s)g(\Phi(s)) ds$$

10.4 Beispiele

Beispiel 10.11

$$\int_0^{2\pi} e^{it} dt = \frac{1}{i} e^{it} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i} = 0.$$

$$\text{oder } \int_0^{2\pi} e^{it} dt = \int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t) dt = \int_0^{2\pi} (\cos(t)) + \int_0^{2\pi} i \sin t dt = \sin t \Big|_0^{2\pi} + i(-\cos t) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Beispiel 10.12

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{t}_{g(t)} \underbrace{e^{it}}_{f'(t)} dt = t \frac{1}{i} e^{it} \Big|_0^{2\pi} - \underbrace{\frac{1}{i}}_{=0} \int_0^{2\pi} e^{it} dt = -2\pi i$$

Beispiel 10.13

Voraussetzung Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \cos x$.

Behauptung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \sin x + \cos x$ ist eine Stammfunktion von f .

Beweis (Idee) Wegen dem Hauptsatz gilt $F(x) := \int_c^x f(t) dt = \int_c^x \underbrace{t}_{g(x)} \underbrace{\cos t}_{f'(x)} dt = t \sin t \Big|_c^x -$

$$\int_c^x \sin t dt = x \sin x - c \sin c - [-\cos t]_c^x = x \sin x + \cos x - c \sin c - \cos c$$

(Beweis) Ableiten. □

Aufgabe 10.14

Behauptung Es gilt $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos(x^2) dx = -1$.

Beweis (Physikermethode) $u = x^2$, also $du = 2x dx$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos(x^2) dx = \int_0^{\pi} x^3 \cos(u) \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} u \cos u du = \dots$$

(Beweis)

$\Phi : [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow [0, \pi], x \mapsto x^2$ ist stetig differenzierbar.

$g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \frac{1}{2} u \cos u$ ist stetig.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} s^3 \cos(s^2) ds = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2s \frac{1}{2} s^2 \cos(s^2) ds = \int_c^d \Phi'(s)g(\Phi(s)) ds \stackrel{\text{SR}}{=} \int_{\Phi(c)}^{\Phi(d)} g(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t \cos t dt$$

...

□

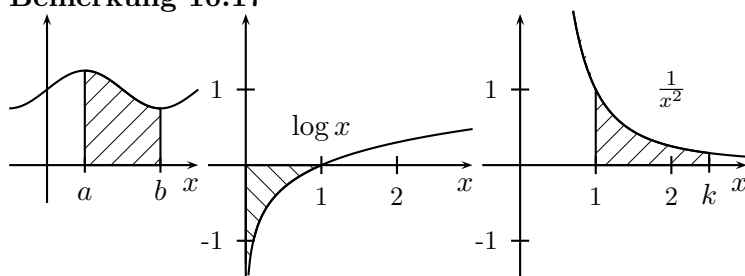
Aufgabe 10.15 $\frac{1}{\sqrt{2}}$
Behauptung Es gilt $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} dv = \dots$

Aufgabe 10.16
Behauptung Es gilt $\int_7^{20} \frac{3}{x^2-7x+10} dx = \dots$ und $\int_a^b \frac{1}{x^2-4x+5} dx = \dots$

Beweis (Partialbruchzerlegung) ... □

10.5 uneigentliche Integrierbarkeit

Bemerkung 10.17



$$\int_a^b f(x) dx \quad \mathfrak{R}(I, F) = \overline{S(I, F)}^{\|\cdot\|_\infty} \quad \mathfrak{R}(I, F) \subseteq B(I, F) \quad \int_0^1 \log t dt = \dots$$

Motivation

(1) unbeschränkte Integranden $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $\int_1^k \frac{1}{x^2} dx$ bzw. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

(2) unbestimmte Integrationsintervalle

Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall $f : J \rightarrow F$. f heißt lokal integrierbar, falls für alle kompakten Teilintervalle L von J , $f|_L$ integrierbar ist.

$$\left| \int_1^{\tilde{a}} \frac{1}{x^2} dx - y \right| < \varepsilon, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt = \dots$$

Aufgabe 10.18

Behauptung Das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} dx$ existiert nicht.

Beweis Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$. Dann ist f lokal integrierbar, weil f stetig ist und somit insbesondere auf Kompakte beschränkt (und regelintegrierbar). Sei $k > 0$.

Dann gilt $\int_0^k f(x) dx = \int_0^k \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^k \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(1+x^2) \Big|_0^k = \frac{1}{2} \log(1+k^2)$. Da

$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k f(x) dx = +\infty$, ist f nicht uneigentlich integrierbar. Bemerkung: $(\log \circ f)' = \frac{f'}{f}$. □

Aufgabe 10.19

Behauptung Es gilt $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1-x^5}} = \frac{4}{15}$.

Beweis Definiere $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^9}{\sqrt{1-x^5}}$. f ist lokal integrierbar, weil stetig. Sei $k \in]0, 1[$. Setze $u = \sqrt{1-x^5} = (1-x^5)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x^5 = 1-u^2$ und $du = \frac{1}{2} \frac{-5x^4}{\sqrt{1-x^5}} dx$ dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^k \frac{x^9}{\sqrt{1-x^5}} dx &= - \int_1^{\sqrt{1-k^5}} \frac{x^9}{u} \frac{2\sqrt{1-x^5}}{5x^4} du = -\frac{2}{5} \int_1^{\sqrt{1-k^5}} x^5 du = -\frac{2}{5} \int_1^{\sqrt{1-k^5}} 1-u^2 du \\ &= -\frac{2}{5} \left[u - \frac{1}{3}u^3 \right]_1^{\sqrt{1-k^5}} = -\frac{2}{5} \left(\sqrt{1-k^5} - \frac{1}{3}\sqrt{1-k^5}^3 - 1 + \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Es folgt $\lim_{k \rightarrow 1} \int_0^k \frac{x^9}{\sqrt{1-x^5}} dx = -\frac{2}{5} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{15}$, d.h. $\int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{15}$. □

Aufgabe 10.20

Behauptung Es gilt $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx = \pi$.

Beweis ... □

Bemerkung 10.21 $\int_{-\infty}^\infty -2xe^{-x^2} dx \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k -2xe^{-x^2} dx$ (im Allgemeinen)

$$\int_{-\infty}^\infty -2xe^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 -2xe^{-x^2} dx + \int_0^\infty -2xe^{-x^2} dx \text{ (falls diese existieren)}$$

11 Potenzreihen

Bemerkung 11.1 Man möchte Funktionen betrachten von der Form

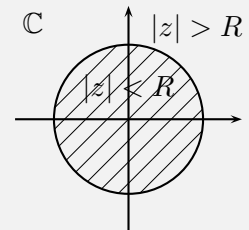
$$z \mapsto \sum_{n=0}^\infty z^n a_n \text{ mit } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}.$$

Satz 11.2 Sei $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$. Dann heißt

$R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}}}$ *Konvergenzradius* von a und es gilt

$\forall z \in \mathbb{K} : |z| < R \Rightarrow (z^n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist absolut summierbar

$\forall z \in \mathbb{K} : |z| > R \Rightarrow (z^n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht summierbar.



Satz 11.3 Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und existiert $l := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|}$, dann existiert auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}} \text{ und es gilt } R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_n\|}{\|a_{n+1}\|}.$$

Beispiel 11.4

- (1) $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} 1z^n$ mit $|z| \geq 1$ nicht summierbar ($R = 1$)
- (2) $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ mit $z = 1$ nicht summierbar (harmonische Reihe) ($R = 1$)
konvergiert mit $z = -1$ nach Leibniz
- (3) $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ konvergiert mit $|z| = 1$ nach Majorantenkriterium ($R = 1$)

Aufgabe 11.5

Behauptung (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z) - 1$ hat Konvergenzradius $R = \infty$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} \cdot z^n$ hat Konvergenzradius $R = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Beweis (1) $\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)n!}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ (Quotientenkriterium)

(2) $P(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}}_{a_k} \underbrace{(z^{2n})}_{z^k}$ mit $a_k \begin{cases} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} & \text{falls } k = 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

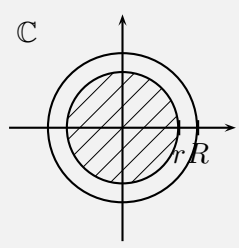
Es gilt $\sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}} = (1 + \frac{1}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$ also hat $w \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2} w^n$ Konvergenzradius $\frac{1}{e}$. Also gilt

$P(z)$ konvergiert für $|z^2| < \frac{1}{e}$ (d.h. $|z| < \frac{1}{\sqrt{e}}$)
 $P(z)$ konvergiert nicht für $|z^2| > \frac{1}{e}$ (d.h. $|z| > \frac{1}{\sqrt{e}}$)

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ \sqrt[k]{(1 + \frac{1}{n})^2} & \text{falls } k = 2n \end{cases} = \sqrt[2n]{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}} = \sqrt{(1 + \frac{1}{n})^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{e}. \quad \square$$

Satz 11.6

Sei F ein Banachraum, $a \in F^{\mathbb{N}}$ mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann definiert $f : K_{\mathbb{K}}(0, R) \rightarrow F, z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n$ eine stetige Funktion und für alle $r \in]0, R[$ gilt $F_N : K_{\mathbb{K}}(0, r) \rightarrow F, z \mapsto \sum_{n=0}^N z^n a_n$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$, definiert eine Funktionenfolge $(F_N)_{N \in \mathbb{N}_0}$, die gleichmässig gegen $f|_{\overline{K_{\mathbb{K}}(0, r)}}$ konvergiert.



Beispiel 11.7

$$(1) \exp : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (2) \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad (3) \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

Beispiel 11.8

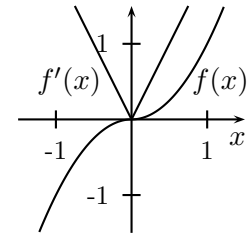
$$\frac{x^2+3x}{5x} = \frac{x+3}{5} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{3}{5}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \text{ also } \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \sum \dots}{1 \cdot x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

Satz 11.9 Potenzreihen sind unendlich oft differenzierbar.

Aufgabe 11.10

Voraussetzung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$



Behauptung f ist unendlich oft differenzierbar.

Beweis $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{falls } x \geq 0 \\ -2x & \text{falls } x < 0 \end{cases} = 2|x| \quad f' = 2|\cdot|$

Ableitung in 0 ist 0, da rechts- und linksseitige Ableitung Null ist. □

12 Taylor Polynome

Definition 12.1 $P(x) = \sum_{j=0}^k (x-p)^j a_j \Rightarrow a_j = \frac{1}{j!} P^{(j)}(p)$

Satz 12.2 f sei k -mal differenzierbar. $(T_{p,k}f)(x) := \sum_{j=0}^k (x-p)^j \frac{f^{(j)}(p)}{j!}$

Satz 12.3 (Taylor-Ungleichung)

$$\|f(x) - T_{p,k-1}f(x)\| \leq \frac{1}{k!} |x-p|^k \sup \{ \|f^{(k)}(u)\| \mid u \in]p, x[\}$$

Beispiel 12.4

$f : \mathbb{R}_{>-1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log(1+x)$. ($f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3}$, \dots)

Es gilt $f^{(j)}(x) = (-1)^{j-1} (j-1)! \frac{1}{(1+x)^j}$ (Beweis durch Induktion)

$a_0 = \log(1) = 0$, für $j \geq 0$ setze $a_j := \frac{f^{(j)}(0)}{j!} = \frac{(j-1)!}{j!} (-1)^{j-1} = \frac{1}{j} (-1)^{j-1}$

$$\Rightarrow T_{0,k}f(x) = \sum_{j=0}^k \underbrace{\frac{(-1)^{j-1}}{j}}_{a_j} x^j = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \mp \dots$$

$$\log\left(\frac{9}{10}\right) \approx \dots$$

$$\text{Sei } p=0, k=4, x=-\frac{1}{10}. T_{0,3}f\left(-\frac{1}{10}\right) = -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{3.000}\right) = -\frac{316}{3.000} \approx -0,1$$

$$\left\| \log\frac{9}{10} - (T_{0,3}f)\left(-\frac{1}{10}\right) \right\| \leq \frac{1}{24} \frac{1}{10^4} \sup \left\{ \left| -\frac{6}{(1+u)^4} \right| \mid u \in \left] -\frac{1}{10}, 0 \right[\right\} = \frac{1}{24} \frac{1}{10^4} \cdot 6 = \frac{1}{40.000}$$

Beispiel 12.5

$(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ auf eine Potenzreihen Funktion $\tilde{f} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j$. Dann gilt

$$\tilde{f}(x) = f(x) = \log(1+x) \text{ f\"ur alle } x \in]-1, 1[$$

$$\tilde{f}'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} j x^{j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

13 Lokale Extremstellen

Satz 13.1 Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. f besitze in $p \in E$ eine lokale Extremstelle, dann gilt:
 f differenzierbar $\Rightarrow Df(p) = 0$

Bemerkung 13.2 $E = \mathbb{K}^n$. $f : \mathbb{K}^n \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar.

$$\partial_1 f : U \rightarrow \mathbb{R}, \partial_2 \partial_1 f : U \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 f.$$

Aufgabe 13.3

Voraussetzung Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y^2(1-x) - x^2(x+1)$.

Behauptung $(-\frac{2}{3}, 0)$ ist ein lokales Minimum.

Beweis 1. Schritt: Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\partial_1 f(x, y) = -y^2 - 3x^2 - 2x$ und $\partial_2 f(x, y) = 2y(1-x)$
 Zwei Kandidaten f\"ur Extremstellen $(0, 0), (-\frac{2}{3}, 0)$. Ferner gilt f\"ur alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1 \partial_1 f(x, y) = -6x - 2$$

$$\partial_1 \partial_2 f(x, y) = -2y$$

$$\partial_2 \partial_1 f(x, y) = -2y$$

$$\partial_2 \partial_2 f(x, y) = 2(1-x)$$

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x, y) & \partial_1 \partial_2 f(x, y) \\ \partial_2 \partial_1 f(x, y) & \partial_2 \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x - 2 & -2y \\ -2y & 2(1-x) \end{pmatrix}$$

$$\text{Hess } f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Eigenwerte: } -2, 2$$

$$\text{Hess } f\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Eigenwerte: } 2, \frac{10}{3}$$

Also ist $(-\frac{2}{3}, 0)$ ein lokales Minimum □

Index

A

Abschluß, 9
Archimedes-Eigenschaft, 5

B

Banachraum, 23
Berührungspunkt, 9
Bernoulli-Ungleichung, 5
Binomische Formel, 3

C

Cauchy-Folge, 17, 19, 23
Cauchy-Folgen-treu, 24
Cauchy-Kriterium, 17
Cauchy-Verdichtung, 27

D

differenzierbar, 29
 Frechet differenzierbar, 29
 total differenzierbar, 29

E

Einschnürung, 15

F

Fixpunkt, 14

G

geometrische Reihe, 18, 26
Grenzwert, 14

H

häufungskompakt, 28
Häufungspunkt, 9, 28
Halbmetrik, 20
halbmetrischer Raum, 20
Halbnorm, 21
halbnormierter Raum, 21
Hauptsatz der Differential- und Integral-
 rechnung, 38
hausdorffsch, 10
Heine Borel, 28

K

Körper
 angeordneter Körper, 3
Kettenregel, 31
konvergent, 20
 gleichmässig konvergent, 25
 punktweise konvergent, 25
Konvergenzradius, 41

L

l'Hopital Regel, 36
Leibnizkriterium, 27
Lipschitz-Konstante, 23

M

Majorantenkriterium, 18
Menge
 abgeschlossene Menge, 9
 offene Menge, 8
Metrik, 20
metrischer Raum, 20
Mittelwert-Ungleichung, 33
monoton
 monoton fallend, 3
 monoton steigend, 3
Monotoniekriterien, 34

N

Norm, 21
normierter Raum, 21
Nullstellenmenge, 13

O

offen, 9, 21, 22
offene Menge, 8
offene Umgebung, 8

P

Partialbruchzerlegung, 19
partielle Ableitung, 32
partielle Integration, 38
Produktregel, 31

Q

Quotientenkriterium, 27

Quotientenregel, 31

S

Sandwichprinzip, 15

separiert, 10

Stammfunktion, 38

Standardtopologien, 9

stetig, 10, 22, 23

gleichmässig stetig, 23

Lipschitz stetig, 23

Substitutions-Regel, 39

Summe, 18, 26

Summenregel, 30

summierbar, 18, 26

absolut summierbar, 26

Supremum, 5

T

Taylor-Ungleichung, 43

Teleskopsumme, 19

Topologischer Raum, 8

Treppenfunktion, 37

U

Umgebung, 8

offene Umgebung, 8

Umkehrsatz, 34

V

vollständig, 23

W

Wurzelkriterium, 27

Z

zusammenhängend, 13

Zwischenwertsatz, 14