



Semantik von Programmiersprachen

SS 2007

13. Juni 2007

Blatt 10

Aufgabe 36 Adjungierte Paare:

Es seien (M, \leq) und (N, \leq) zwei Cpos mit kleinstem Element \perp_M bzw. \perp_N . Zeigen Sie, dass durch die Festlegung

$$\varphi : M \rightarrow M \times N, x \mapsto \langle x, \perp_N \rangle \quad \psi : M \times N \rightarrow M, \langle x, y \rangle \mapsto x$$

ein adjungiertes Paar von M nach dem direkten Produkt $M \times N$ gegeben ist.

Aufgabe 37 Stetigkeit der Einbettung:

Beweisen Sie, dass es bei der Definition des adjungierten Paares (φ, ψ) genügen würde, die Einbettung φ als monoton zu fordern, da die Stetigkeit von φ aus der Stetigkeit von ψ sowie den zwei Eigenschaften $\psi \circ \varphi = id_M$ und $\varphi \circ \psi \leq id_N$ folgt.

Aufgabe 38 Stetigkeit der Funktionskomposition:

Es seien (A, \leq) , (B, \leq) und (C, \leq) drei Cpos. Es soll die Monotonie und Stetigkeit der Funktionskomposition bewiesen werden. Zeigen Sie hierfür der Reihe nach die folgenden fünf Punkte:

- (Monotonie im linken Argument) Sind $g, g' \in C^B$ und $f \in B^A$, so folgt aus $g \leq g'$ die Beziehung $g \circ f \leq g' \circ f$.
- (Monotonie im rechten Argument) Ist $g \in (B \rightarrow C)$ und sind $f, f' \in B^A$, so folgt aus $f \leq f'$ die Beziehung $g \circ f \leq g \circ f'$.
- (Stetigkeit im linken Argument) Es sei $\langle g^{(i)} \rangle_{i \in I}$ eine Kette in C^B . Dann gilt für jede Funktion $f \in B^A$ die Gleichung $(\bigsqcup_{i \in I} g^{(i)}) \circ f = \bigsqcup_{i \in I} (g^{(i)} \circ f)$.
- (Stetigkeit im rechten Argument) Es sei $\langle f^{(i)} \rangle_{i \in I}$ eine Kette in B^A . Dann gilt für jede Funktion $g \in [B \rightarrow C]$ die Gleichung $g \circ (\bigsqcup_{i \in I} f^{(i)}) = \bigsqcup_{i \in I} (g \circ f^{(i)})$.
- Zeigen Sie mit Hilfe von a) bis d), daß das Kompositionsfunktional \circ auf den monotonen Funktionen monoton und auf den stetigen Funktionen stetig ist.

Hinweis: Verwenden Sie bei ihrem Beweis von Teil e) die Aussage über das direkte Produkt von Cpos aus Aufgabe 11.