WS 2009/10 Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Prof. Thomas Slawig Institut für Informatik

Einführung in die Optimierung

3. Übungsserie

Lineare Optimierung, Simplex-Algorithmus

Theoretische Aufgaben: (Abgabe zu Beginn der Übung am 23.11.09)

1. **Aufgabe** (4 Punkte)
   Sei ein LP in Standardform gegeben. Es sei $x \in X_{ad}$,

   $$I \quad := \quad \{i \in \{1, \dots n\} : x_i > 0\},$$

   und die Menge der zugehörigen Spalten von A,

   $$\{a_i\}_{i \in I},$$

   sei linear unabhängig. Zeigen Sie, dass x eine Ecke von X_{ad} ist.

2. **Aufgabe** (4 Punkte)
   Sei $y \in \mathbb{R}^m$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ fest. Zeigen Sie:

   $$\text{Für } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & y_k & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & y_m & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ gilt } E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{y_1}{y_k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & -\frac{y_{k-1}}{y_k} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \frac{1}{y_k} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & -\frac{y_{k+1}}{y_k} & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{y_m}{y_k} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Aufgabe** (4 Punkte)
   Sei $x^{(k+1)} = x(\bar{\varrho})$ die in einem Schritt des Simplex-Verfahrens erzeugte neue Iterierte. Zeigen Sie, dass $x^{(k+1)}$ eine Basislösung ist, d.h. dass die Spaltenvektoren von A in $\{a_i\}_{i \in I_{k+1}}$ linear unabhängig sind. Erinnerung: Die Menge I_{k+1} entsteht aus $I_k := \{i \in \{1, \dots, n\} : x_i^{(k)} > 0\}$ durch

   $$I_{k+1} := (I_k \setminus \{i_k\}) \cup \{j_k\}.$$

4. **Aufgabe** (4 Punkte)
   Geben Sie ein Beispiel für eine lineares Optimierungsproblem an, das keine Lösung hat.

5. **Aufgabe** (4 Punkte)
   Führen Sie mindestens einen Iterationsschritt des Simplex-Algorithmus für das Beispiel des Bootsverleihs aus der ersten Vorlesung durch.