

Analysis 3

Steffen Börm

Stand 7. Februar 2011

Alle Rechte beim Autor.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Grundlagen der Maßtheorie	7
2.1	Motivation	7
2.2	Systeme von Teilmengen	8
2.3	Inhalte	15
2.4	Prämaße	20
2.5	Maße	25
3	Einführung des allgemeinen Integrals	37
3.1	Motivation	37
3.2	Messbare Abbildungen	38
3.3	Reellwertige messbare Abbildungen	41
3.4	Treppenfunktionen	44
3.5	Integration von Treppenfunktionen	47
3.6	LEBESGUE-Integrale	51
4	Eigenschaften des Integrals	63
4.1	Grenzwertaussagen	63
4.2	L^p -Räume	75
4.3	Produktmaß und Doppelintegral	83
4.4	Variablentransformation	96
5	Gewöhnliche Differentialgleichungen	109
5.1	Problemstellung	109
5.2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	112
5.3	Stabilität	119
5.4	Lineare Anfangswertprobleme	127
6	Grundlagen der Funktionentheorie	133
6.1	Erinnerung: Komplexe Zahlen	133
6.2	Holomorphe Funktionen	135
6.3	Potenzreihen	139
6.4	Kurvenintegrale	144
6.5	CAUCHY-Integralsatz	147
	Index	161

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

163

1 Einleitung

Diese Vorlesung beschäftigt sich mit drei Themengebieten: Sie bietet elementare Einführungen in

- die Maß- und Integrationstheorie,
- die Grundzüge der Funktionentheorie und
- die der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Im Bereich der Maß- und Integrationstheorie besteht das Ziel darin, den aus der Schule bekannten Begriff des Riemann-Integrals so zu verallgemeinern, dass sich Aussagen über das Integral der Grenzwerte von Folgen von Funktionen treffen lassen. Diese Eigenschaft ist von zentraler Bedeutung für viele Bereiche der Analysis, etwa für die Untersuchung von partiellen Differential- und Integralgleichungen.

Wir untersuchen dabei das *Lebesgue-Integral*, das, ähnlich dem Riemann-Integral, auf einer Approximation der zu integrierenden Funktion durch Treppenfunktionen basiert. Um diesen Treppenfunktionen Integralwerte zuordnen zu können, benötigen wir den Begriff des *Maßes* einer Menge, insbesondere den des *Lebesgue-Maßes*, der die anschauliche Vorstellung des Flächeninhalts verallgemeinert.

Im Bereich der Funktionentheorie ist das Ziel die *Cauchy-Formel*, mit deren Hilfe sich die Ableitungen bestimmter Funktionen durch ein Integral der Funktion beschreiben lassen. Diese Eigenschaft ist sehr nützlich, wenn wir Fragen nach der Approximierbarkeit von Funktionen beantworten wollen. Beispielsweise ist bekannt, dass für die Qualität der Approximation einer Funktion durch ihre Taylor-Reihe die Größe ihrer Ableitungen entscheidend ist, und genau diese Größe lässt sich mit Hilfe der Cauchy-Formel abschätzen.

Im Kontext der gewöhnlichen Differentialgleichungen sind wir vor allem an Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen interessiert. Indem die Differentialgleichung mit Hilfe des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung in die Form einer Integralgleichung gebracht wird, lässt sich für eine große Klasse von Gleichungen zeigen, dass Lösungen existieren und auch eindeutig bestimmt sind.

Als Vorlage die Vorlesung orientiere ich mich in Hinblick auf das Integral an [5] und auf das Maß an [1]. Für die Funktionentheorie greife ich auf [6] zurück.

Einige Beweise, Beispiele und Notationen habe ich dem Skript „Analysis 3“ von Prof. Dr. Walter Bergweiler entnommen.

2 Grundlagen der Maßtheorie

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage, wie man Mengen „messen“ kann, wie man also beispielsweise einer Teilmenge des \mathbb{R}^2 eine Zahl zuordnen kann, die in geeigneter Weise ihrem Flächeninhalt entspricht. Dazu müssen wir zunächst untersuchen, welchen Mengen sich in dieser Weise messen lassen, welche Eigenschaften wir von einem Maß erwarten, und wie sich ein Maß konstruieren lässt, das den intuitiven Konzepten von Länge, Fläche und Volumen entspricht.

2.1 Motivation

Für eine nicht-negative stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ beschreibt das Riemann-Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

gerade den Inhalt der durch den Graphen von f , die x -Achse, und die Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzte Fläche (siehe Abbildung 2.1).

Wir interessieren uns dafür, den Begriff des Flächeninhalts möglichst allgemein zu fassen, beispielsweise um auch den Inhalt von Volumen im dreidimensionalen Raum bestimmen zu können.

Letzten Endes besteht das Ziel darin, einer Menge A eine geeignet definierte *Maßzahl* zuzuordnen. Von besonderem Interesse sind dabei Maßzahlen, die mit den uns vertrauten Konzepten von Länge, Flächeninhalt und Volumeninhalt verträglich sind.

Es stellt sich heraus, dass dieses Konzept so allgemein ist, dass es sich auch in anderen Bereichen einsetzen lässt. Ein Beispiel ist die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie: Jedem möglichen Ergebnis eines Zufallsexperiments wird ein Element einer Menge Ω zugeordnet, beispielsweise könnte man bei einem üblichen sechsseitigen Würfel die Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ verwenden und ein $x \in \Omega$ als das Ergebnis „Die Seite mit x Augen liegt oben“ interpretieren. In der Wahrscheinlichkeitstheorie interessiert man sich weniger für die einzelnen Ergebnisse, sondern dafür, ob ein Ergebnis in einer Menge liegt. Beispiele wären die Menge $G := \{2, 4, 6\}$ aller geraden Augenzahlen oder die Menge $V := \{5, 6\}$ aller Augenzahlen echt größer als vier. Solche Teilmengen von Ω werden als *Ereignisse* bezeichnet, und man ist daran interessiert, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu bestimmen. Mathematisch abstrakt muss also einer Teilmenge $A \subseteq \Omega$ eine Zahl, nämlich eine Wahrscheinlichkeit, zugeordnet werden. Im Fall des Würfels ist das relativ einfach: Falls er nicht manipuliert ist, sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich, besitzen also die Wahrscheinlichkeit $1/6$, und die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A entspricht der Mächtigkeit der Menge A multipliziert mit $1/6$.

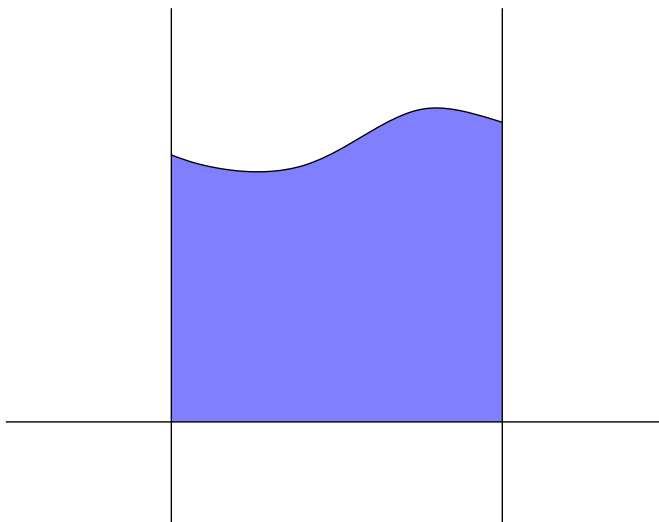


Abbildung 2.1: Integral interpretiert als Flächeninhalt

In der Praxis ist man häufig an Zufallsexperimenten mit Ergebnissen aus einer *kontinuierlichen* Menge Ω interessiert. Ein Beispiel ist die Zeit, die ein instabiles Isotop braucht, bevor es zerfällt, oder die Entwicklung eines Börsenkurses: In beiden Fällen besteht $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nicht mehr aus einzelnen Punkten, sondern aus einem Kontinuum von Werten. Damit kann auch ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ unendlich viele Elemente enthalten, und die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses lässt sich nicht mehr einfach über das Aufsummieren über alle Elemente beschreiben. Allerdings ist es auch in dieser Situation häufig noch möglich, der Menge A eine Wahrscheinlichkeit zuzuordnen. Auch in diesem Fall geht es also darum, einer Menge eine Zahl zuzuweisen, und wir sind in derselben Situation wie bei der Frage nach dem Flächen- oder Volumeninhalt.

Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, systematisch Mengen Maßzahlen zuzuordnen. Eine Abbildung von einer Menge von Mengen in die nicht-negativen Zahlen, die diese Aufgabe erfüllt, bezeichnet man als *Maß*, und wir interessieren uns dafür, welche Eigenschaften Maße haben sollten und wie wir sie möglichst einfach konstruieren können. Dabei liegt das besondere Augenmerk auf dem *LEBESGUE-Maß*, das die Vorstellung des Flächeninhalts aus dem zweidimensionalen Raum in den d -dimensionalen überträgt und für viele mathematische Fragestellungen von großer Bedeutung ist.

2.2 Systeme von Teilmengen

In vielen interessanten Fällen kann es schwierig sein, ein Maß zu definieren, das jeder beliebigen Teilmenge einer gegebenen Menge A eine Maßzahl zuordnet. Deshalb emp-

fehlt es sich, zunächst zu untersuchen, welche Eigenschaften ein System von Teilmengen haben sollte, auf dem ein Maß definiert ist.

Wir erwarten zumindest, dass wir der leeren Menge eine Maßzahl zuordnen können. Außerdem sollten für zwei Mengen, denen wir Maßzahlen zuordnen können, auch Komplement und Vereinigung Maßzahlen besitzen. Damit erhalten wir die folgende Definition:

Definition 2.1 (Mengenring) Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine Menge von Teilmengen von Ω , die die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\emptyset \in \mathfrak{R}, \tag{2.1a}$$

$$A \setminus B \in \mathfrak{R} \quad \text{für alle } A, B \in \mathfrak{R}, \tag{2.1b}$$

$$A \cup B \in \mathfrak{R} \quad \text{für alle } A, B \in \mathfrak{R}. \tag{2.1c}$$

Dann nennen wir \mathfrak{R} einen Mengenring ¹ auf der Menge Ω .

Bemerkung 2.2 (Rechenregeln) Sei \mathfrak{R} ein Mengenring. Für $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt auch

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathfrak{R}, \tag{2.2}$$

da $A \setminus B$ nach (2.1b) zu \mathfrak{R} gehören muss. Per Induktion lässt sich zeigen, dass auch endliche Vereinigungen und Schnitte von Mengen aus \mathfrak{R} wieder zu \mathfrak{R} gehören.

Unser Ziel besteht darin, eine Verallgemeinerung des Flächeninhalts beziehungsweise des Volumens zu finden. Da beide ausgehend von der Fläche eines Rechtecks beziehungsweise dem Volumen eines Quaders definiert werden, bietet es sich an, entsprechende Teilmengensysteme zu untersuchen.

Definition 2.3 (Quader) Sei $d \in \mathbb{N}$. Für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir die Menge

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}[:= [a_1, b_1[\times \dots \times [a_d, b_d[= \{x \in \mathbb{R}^d : a_i \leq x_i < b_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, d\}\}$$

als den (d -dimensionalen) Quader zu \mathbf{a} und \mathbf{b} . Umgekehrt nennen wir eine Menge $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ einen Quader, falls sich $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ mit $Q = [\mathbf{a}, \mathbf{b}[$ finden lassen.

Die Menge aller Quader ist kein Mengenring, denn sie ist erfüllt weder (2.1c) noch (2.1b), ist also weder unter Vereinigung noch Mengendifferenz abgeschlossen. Das erste Problem können wir lösen, indem wir zu endlichen Vereinigungen von Quadern übergehen, und es stellt sich heraus, dass damit auch das zweite Problem gelöst wird.

Definition 2.4 (Figuren) Sei $d \in \mathbb{N}$, und sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Die Menge A heißt (d -dimensionale) Figur, falls ein $k \in \mathbb{N}$ und Quader $Q_1, \dots, Q_k \subseteq \mathbb{R}^d$ mit

$$A = Q_1 \cup \dots \cup Q_k$$

existieren. Die Menge aller d -dimensionalen Figuren bezeichnen wir mit \mathfrak{F}_d .

¹engl. ring und teilweise algebra

Lemma 2.5 (Differenz von Quadern) Sei $d \in \mathbb{N}$, und seien Q und P Quader. Dann ist $Q \setminus P$ die Vereinigung endlich vieler paarweise disjunkter Quader, und damit insbesondere eine Figur.

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über $d \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Sei zunächst $d = 1$. Dann finden wir nach Definition 2.3 $a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ mit $Q = [a_1, b_1[$, $P = [\alpha_1, \beta_1[$ und $a_1 \leq b_1$ sowie $\alpha_1 \leq \beta_1$. Elementares Nachprüfen zeigt

$$Q \setminus P = [a_1, \min\{\alpha_1, b_1\}[\cup [\max\{a_1, \beta_1\}, b_1[, \quad (2.3)$$

also ist $Q \setminus P$ die Vereinigung von höchstens zwei Intervallen, d.h. zwei eindimensionalen Quadern. Für ein $x \in [a_1, \min\{\alpha_1, b_1\}[$ gilt insbesondere $x < \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \max\{a_1, \beta_1\}$, also sind beide Intervalle auch disjunkt.

Induktionsschritt: Gelte nun die Aussage für $d \in \mathbb{N}$, und seien Q und P $(d+1)$ -dimensionale Quader. Nach Definition finden wir d -dimensionale Quader \widehat{Q} und \widehat{P} sowie $a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$Q = [a_1, b_1) \times \widehat{Q}, \quad P = [\alpha_1, \beta_1) \times \widehat{P}$$

und $a_1 \leq b_1$ sowie $\alpha_1 \leq \beta_1$ gelten. Wir können die Gleichung

$$Q \setminus P = ([a_1, b_1[\setminus [\alpha_1, \beta_1[) \times \widehat{Q} \cup ([a_1, b_1[\cap [\alpha_1, \beta_1[) \times (\widehat{Q} \setminus \widehat{P}) \quad (2.4)$$

elementar für alle $(x_1, \hat{x}) \in Q$ mit $x_1 \in [a_1, b_1)$ und $\hat{x} \in \widehat{Q}$ nachprüfen (und dabei einen Blick auf die Abbildung 2.2 werfen). Es lässt sich ebenfalls nachprüfen, dass beide Mengen auf der rechten Seite der Gleichung disjunkt sind. Der erste Term in (2.4) ist gemäß (2.3) eine Figur, die sich aus höchstens zwei disjunkten Quadern zusammensetzt. Auf den zweiten Term können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden. ■

Satz 2.6 (Mengenring) Sei $d \in \mathbb{N}$. Die Menge \mathfrak{F}_d der d -dimensionalen Figuren ist ein Mengenring auf \mathbb{R}^d .

Beweis. Für einen beliebigen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ gilt nach Definition

$$\emptyset = [\mathbf{a}, \mathbf{a}[\in \mathfrak{F}_d,$$

also ist (2.1a) bewiesen.

Seien nun $A, B \in \mathfrak{F}_d$ gewählt. Nach Definition existieren $k, \ell \in \mathbb{N}$ und Quader Q_1, \dots, Q_k und P_1, \dots, P_ℓ mit

$$A = Q_1 \cup \dots \cup Q_k, \quad B = P_1 \cup \dots \cup P_\ell,$$

und es folgt

$$A \cup B = Q_1 \cup \dots \cup Q_k \cup P_1 \cup \dots \cup P_\ell,$$

also auch (2.1c).

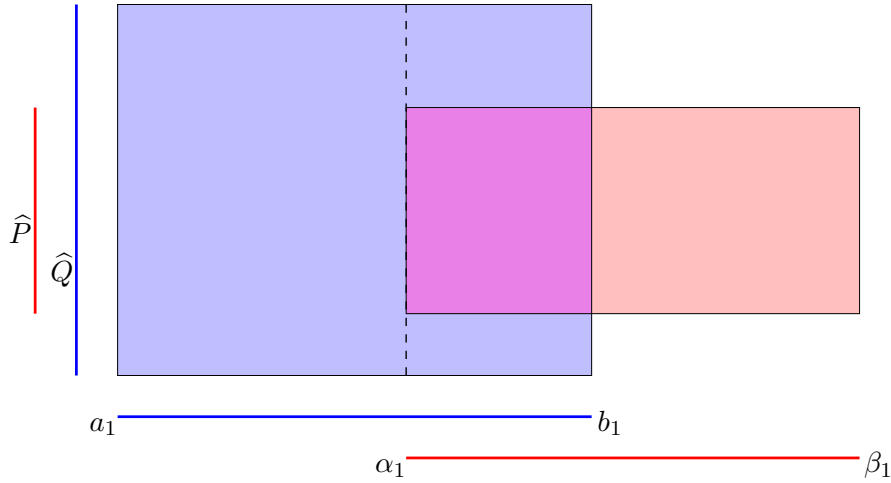


Abbildung 2.2: Differenz von Quadern, dargestellt als Vereinigung von Quadern

Um schließlich auch (2.1b) zu beweisen, verwenden wir eine Induktion unter Verwendung des Lemmas 2.5: Wir zeigen

$$A \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_m) \in \mathfrak{F}_d \quad \text{für alle } m \in \{1, \dots, \ell\}$$

per Induktion über m .

Induktionsanfang: Sei zunächst $m = 1$. Es gilt

$$A \setminus P_1 = (Q_1 \cup \dots \cup Q_k) \setminus P_1 = (Q_1 \setminus P_1) \cup \dots \cup (Q_k \setminus P_1),$$

und nach Lemma 2.5 ist jede der einzelnen Teilmengen eine Figur, also ist auch $A \setminus P_1$ als Vereinigung endlich vieler Figuren wieder eine Figur.

Induktionsschritt: Sei $m \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ so gegeben, dass $A \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_m) \in \mathfrak{F}_d$ gilt. Wir müssen zeigen, dass auch $A \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_{m+1})$ eine Figur ist.

Nach Voraussetzung existieren $n \in \mathbb{N}$ und Quader $\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_n$ so, dass

$$A \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_m) = \hat{Q}_1 \cup \dots \cup \hat{Q}_n$$

gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} A \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_{m+1}) &= A \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_m) \setminus P_{m+1} = (\hat{Q}_1 \cup \dots \cup \hat{Q}_n) \setminus P_{m+1} \\ &= (\hat{Q}_1 \setminus P_{m+1}) \cup \dots \cup (\hat{Q}_n \setminus P_{m+1}), \end{aligned}$$

und aus Lemma 2.5 folgt, dass auch $A \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_{m+1})$ eine Figur ist.

Also ist \mathfrak{F}_d ein Mengerring. ■

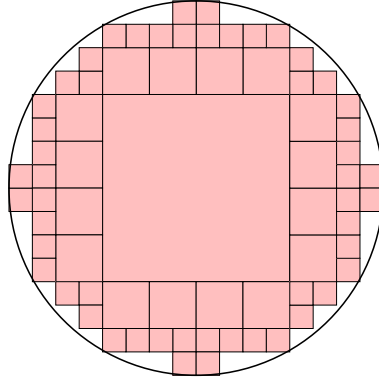


Abbildung 2.3: Approximation einer Kreisfläche durch Quader

Mengenringe sind zwar nützlich, allerdings für unsere Zwecke nicht ganz ausreichend: Wir können schon einfache Flächen wie beispielsweise einen Kreis nicht exakt durch Quader darstellen, wir können sie lediglich approximieren (siehe Abbildung 2.3).

Glücklicherweise lässt sich dieses Problem umgehen, indem wir die Definition erweitern und fordern, dass auch die *abzählbare* Vereinigung von Mengen zulässig ist. Dass bei einer Definition abzählbare Vereinigungen oder Summen zugelassen sind, wird in der Maßtheorie häufig mit dem Symbol σ (Sigma) signalisiert:

Definition 2.7 (σ -Algebra) Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ Menge von Teilmengen von Ω , die die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\Omega \in \mathfrak{A}, \tag{2.5a}$$

$$\Omega \setminus A \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}, \tag{2.5b}$$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle } A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}. \tag{2.5c}$$

Dann nennen wir \mathfrak{A} eine σ -Algebra auf der Menge Ω .

Lemma 2.8 (Rechenregeln) Sei Ω eine Menge und \mathfrak{A} eine σ -Algebra auf Ω . Dann gelten

$$\emptyset \in \mathfrak{A}, \tag{2.6a}$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle } A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}. \tag{2.6b}$$

Beweis. Aus (2.5a) und (2.5b) folgt $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathfrak{A}$, also (2.6a).

Seien $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$ gegeben. Aus (2.5c) und (2.5b) folgt

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega \setminus A_i \right) \in \mathfrak{A},$$

also (2.6b). ■

Bemerkung 2.9 (Bezug zu Mengenringen) Eine σ -Algebra \mathfrak{A} auf einer Menge Ω ist auch ein Mengenring auf dieser Menge: (2.6a) impliziert (2.1a), und für $A, B \in \mathfrak{A}$ folgt durch Einsetzen von $A = A_1$ und $B = A_2, A_3, \dots$ in (2.5c) auch (2.1c). Entsprechend folgt aus (2.6b) auch $A \cap B \in \mathfrak{A}$, und mit $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B)$ erhalten wir (2.1b).

Wir sind daran interessiert, aus einem Mengenring eine σ -Algebra zu konstruieren, denn dann könnten wir beispielsweise den Ring \mathfrak{F}_d der d -dimensionalen Figuren so zu einer σ -Algebra erweitern, dass sich auch Objekte wie der Kreis oder die Kugel darstellen lassen. Dass zu jedem Mengenring \mathfrak{R} eine σ -Algebra \mathfrak{A} mit $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}$ existiert, ist dabei klar, denn die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ ist bereits selbst eine σ -Algebra. Wir sind eher daran interessiert, die in einem geeigneten Sinn „kleinstmögliche“ σ -Algebra zu konstruieren, die \mathfrak{R} noch enthält.

Satz 2.10 (Erzeugte σ -Algebra) Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine nicht-leere Menge von Teilmengen von Ω . Dann existiert genau eine σ -Algebra \mathfrak{A}_R mit $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}_R$ und

$$\mathfrak{A}_R \subseteq \mathfrak{A} \quad \text{für alle } \sigma\text{-Algebren } \mathfrak{A} \text{ mit } \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}, \quad (2.7)$$

die σ -Algebra \mathfrak{A}_R ist in diesem Sinne die kleinste σ -Algebra, die \mathfrak{R} enthält. Wir bezeichnen \mathfrak{A}_R als die von \mathfrak{R} erzeugte σ -Algebra.

Beweis. Wir untersuchen die Menge

$$\mathcal{S} := \{\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega) : \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra mit } \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}\}.$$

Da die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ eine σ -Algebra ist, die \mathfrak{R} enthält, ist \mathcal{S} nicht leer. Wir setzen

$$\mathfrak{A}_* := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{S}} \mathfrak{A}. \quad (2.8)$$

Es lässt sich direkt anhand der Definition nachprüfen, dass \mathfrak{A}_* eine σ -Algebra ist und \mathfrak{R} enthält. Aus (2.8) folgt direkt, dass \mathfrak{A}_* in jeder σ -Algebra enthalten ist, die \mathfrak{R} enthält. Damit ist die Existenz der gesuchten σ -Algebra bewiesen.

Wenden wir uns also der Eindeutigkeit zu. Falls \mathfrak{A}_R eine beliebige σ -Algebra ist, die $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}_R$ und (2.7) erfüllt, muss insbesondere auch $\mathfrak{A}_R \in \mathcal{S}$ gelten, also dank (2.8) insbesondere $\mathfrak{A}_* \subseteq \mathfrak{A}_R$. Andererseits folgt aus (2.7) auch $\mathfrak{A}_R \subseteq \mathfrak{A}_*$, somit haben wir $\mathfrak{A}_R = \mathfrak{A}_*$ bewiesen. ■

Für uns von besonderem Interesse ist die von den d -dimensionalen Figuren erzeugte σ -Algebra.

Definition 2.11 (BORELSche σ -Algebra) Die von den d -dimensionalen Figuren \mathfrak{F}_d gemäß Satz 2.10 erzeugte σ -Algebra heißt die (d -dimensionale) BORELSche σ -Algebra und wird mit \mathfrak{B}_d bezeichnet.

2 Grundlagen der Maßtheorie

Die BORELSche σ -Algebra als Erzeugnis der Figuren zu definieren ist nützlich, weil wir auf diesem Weg relativ einfach ein Maß konstruieren können. Für die Anwendung der σ -Algebra im Rahmen der Integrationstheorie ist es gut, auch einen Bezug zu den bei der Untersuchung der Stetigkeit von Funktionen wichtigen offenen Mengen herzustellen. Das ist unser nächstes Ziel.

Erinnerung 2.12 (Offene Mengen) Sei (Ω, d_Ω) ein metrischer Raum, und sei $A \subseteq \Omega$. Die Menge A heißt offen, falls für alle $x \in A$ ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so existiert, dass $K(x, \epsilon) \subseteq A$ gilt, dass also die offene Kugel um x mit Radius ϵ Teilmenge von A ist.

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ verwenden wir die von einer Norm $\|\cdot\|$ induzierte Metrik $d_\Omega(x, y) = \|x - y\|$. Da nach dem Satz von HEINE-BOREL alle Normen auf diesem Raum äquivalent sind, genügt es, die bezüglich der von der Maximumnorm $\|x\| := \max\{|x_\iota| : \iota \in \{1, \dots, d\}\}$ induzierten Metrik offenen Mengen zu untersuchen.

Satz 2.13 (Erzeugnis offener Mengen) Sei $d \in \mathbb{N}$, und sei $\mathfrak{D}_d \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$ die Menge der offenen Teilmenge in \mathbb{R}^d . Dann wird die BORELSche σ -Algebra von \mathfrak{D}_d erzeugt.

Beweis. (vgl. [1, Satz 6.4]) Wir beweisen zunächst, dass jede offene Menge in \mathfrak{B}_d enthalten ist, denn daraus folgt bereits, dass die von \mathfrak{D}_d erzeugte σ -Algebra in der BORELSchen enthalten sein muss. Dazu wählen wir eine offene Menge $A \in \mathfrak{D}_d$. Wir werden nun zeigen, dass wir A durch eine Vereinigung abzählbar vieler Quader darstellen können. Ausgangspunkt des Beweises ist die Feststellung, dass die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen abzählbar ist. Damit ist auch

$$I_A := \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}^d : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subseteq A\} \quad (2.9)$$

als Teilmenge eines endlichen Produkts abzählbarer Menge abzählbar. Wir setzen

$$B := \bigcup_{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in I_A} [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Offenbar ist B die Vereinigung abzählbar vieler Quader, wir müssen also lediglich $A = B$ beweisen. Nach Definition (2.9) der Menge I_A gilt $B \subseteq A$.

Um nachzuweisen, dass auch $A \subseteq B$ gilt, wählen wir ein $x \in A$. Da A offen ist, muss ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so existieren, dass $K(x, \epsilon) \subseteq A$ gilt. Nach Definition der reellen Zahlen müssen ein $\tilde{\epsilon} \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $\tilde{\epsilon} < \epsilon/2$ und ein $\tilde{x} \in \mathbb{Q}^d$ mit $\|x - \tilde{x}\| < \tilde{\epsilon}$ existieren. Wir setzen

$$\mathbf{a} := (\tilde{x}_1 - \tilde{\epsilon}, \dots, \tilde{x}_d - \tilde{\epsilon}), \quad \mathbf{b} := (\tilde{x}_1 + \tilde{\epsilon}, \dots, \tilde{x}_d + \tilde{\epsilon}).$$

Für jedes $y \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ gilt

$$\|y - x\| \leq \underbrace{\|y - \tilde{x}\|}_{\leq \tilde{\epsilon}} + \underbrace{\|\tilde{x} - x\|}_{< \tilde{\epsilon}} < 2\tilde{\epsilon} < \epsilon,$$

also erhalten wir

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subseteq K(x, \epsilon) \subseteq A$$

und damit $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in I_A$. Aus $\|x - \tilde{x}\| < \tilde{\varepsilon}$ folgt auch $x \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, also $x \in B$. Damit haben wir $A = B$, also $\mathfrak{D}_d \subseteq \mathfrak{B}_d$, bewiesen.

Nun beweisen wir, dass jeder Quader sich durch abzählbar viele offene Mengen approximieren lässt, denn daraus folgt, dass der Quader in der von \mathfrak{D}_d erzeugten σ -Algebra liegen muss, also auch die BORELSche σ -Algebra \mathfrak{B}_d . Seien also $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ gegeben, und sei $Q := [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Wir definieren

$$A_i :=]a_1 - 1/i, b_1[\times \dots \times]a_d - 1/i, b_d[\quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

und stellen fest, dass $A_i \in \mathfrak{D}_d$ gilt. Aus (2.6b) folgt, dass

$$Q = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

in der von \mathfrak{D}_d erzeugten σ -Algebra liegen muss. ■

2.3 Inhalte

Unser Ziel ist es nun, das Konzept des Flächeninhalts in \mathbb{R}^2 oder des Volumens in \mathbb{R}^3 zu verallgemeinern: Für eine σ -Algebra \mathfrak{A} suchen wir eine Abbildung

$$\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

die einer Menge aus der σ -Algebra eine Maßzahl zuordnet. Wir stehen vor der Aufgabe, festzulegen, welche Eigenschaften wir von solchen Zahlen erwarten. Die Anschauung legt nahe, dass die Maßzahl der Vereinigung zweier disjunkter Mengen die Summe der Maßzahlen der beiden Mengen sein sollte. Daraus folgt bereits, dass der leeren Menge die Maßzahl null zugeordnet werden sollte.

Definition 2.14 (Inhalt) Sei \mathfrak{R} ein Mengenring auf Ω . Eine Abbildung

$$\mu : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

die die Eigenschaften

$$\mu(\emptyset) = 0, \tag{2.10a}$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{für alle } A, B \in \mathfrak{R} \text{ mit } A \cap B = \emptyset \tag{2.10b}$$

besitzt, nennen wir Inhalt auf \mathfrak{R} .

Bemerkung 2.15 (Rechenregeln) Sei μ ein Inhalt auf \mathfrak{R} , und seien $A, B \in \mathfrak{R}$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu((A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A) - \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B), \end{aligned} \tag{2.11}$$

2 Grundlagen der Maßtheorie

wir können also auch den Inhalt der Vereinigung nicht disjunkter Mengen berechnen. Insbesondere ist ein Inhalt subadditiv, es gilt also

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) \quad \text{für alle } A, B \in \mathfrak{R}. \quad (2.12)$$

Aus (2.10b) folgt auch

$$\begin{aligned} \mu(A \setminus B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(B) - \mu(B) = \mu((A \setminus B) \cup B) - \mu(B) \\ &= \mu(A) - \mu(B) \quad \text{für alle } A, B \in \mathfrak{R} \text{ mit } B \subseteq A. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Indem wir $\mu(B)$ auf die linke Seite der Gleichung bringen folgt

$$\mu(B) \leq \mu(B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A) \quad \text{für alle } A, B \in \mathfrak{R} \text{ mit } B \subseteq A, \quad (2.14)$$

ein Inhalt ist also eine monoton wachsende Abbildung: Die Ordnungsrelation \leq auf den Maßzahlen ist verträglich mit der Relation \subseteq auf den Mengen.

Unser Ziel ist es, einen Inhalt auf dem Mengenring der d -dimensionalen Figuren \mathfrak{F}_d zu definieren, der für Rechtecke die übliche Fläche und für dreidimensionale Quader das übliche Volumen ergibt. Dazu gehen wir von Quadern aus:

Definition 2.16 (Inhalte von Quadern) Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ setzen wir

$$\lambda_d([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) := \begin{cases} 0 & \text{falls } [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \emptyset, \\ \prod_{l=1}^d (b_l - a_l) & \text{ansonsten.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Da die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} im Fall eines nicht-leeren Quaders durch Infimum und Supremum der Koordinaten des Quaders eindeutig festgelegt sind, ist λ_d für alle Quader wohldefiniert.

Um λ_d auf die Menge der d -dimensionalen Figuren fortzusetzen, bietet es sich an, eine gegebene Figur $A \in \mathfrak{F}_d$ in paarweise disjunkte Quader zu zerlegen und auf (2.10b) sowie (2.15) zurückzugreifen.

Lemma 2.17 (Disjunkte Quader) Sei $d \in \mathbb{N}$, und sei $A \in \mathfrak{F}_d$ eine d -dimensionale Figur. Dann existieren $k \in \mathbb{N}$ und Quader $Q_1, \dots, Q_k \subseteq A$ mit

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{i=1}^k Q_i, \\ Q_i \cap Q_j &= \emptyset \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, k\} \text{ mit } i \neq j, \end{aligned}$$

die Figur lässt sich also als Vereinigung endlich vieler paarweise disjunkter Quader darstellen.

Beweis. (vgl. [1, Lemma 4.1]) Wir beweisen die folgende Aussage per vollständiger Induktion über k :

Jede Figur $A \in \mathfrak{F}_d$, die die Vereinigung von $k \in \mathbb{N}$ Quadern ist, ist auch die Vereinigung endlich vieler paarweise disjunkter Quader.

Induktionsanfang: Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen.

Induktionsschritt: Sei $k \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass die Aussage gilt, und sei $A \in \mathfrak{F}_d$ eine Figur, die die Vereinigung von $k + 1$ Quadern Q_1, \dots, Q_{k+1} ist. Nach Voraussetzung existieren $\ell \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Quader $\widehat{Q}_1, \dots, \widehat{Q}_\ell$ mit

$$Q_1 \cup \dots \cup Q_k = \widehat{Q}_1 \cup \dots \cup \widehat{Q}_\ell.$$

Nach Lemma 2.5 existieren für jedes $i \in \{1, \dots, \ell\}$ ein $m_i \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Quader $P_{i,1}, \dots, P_{i,m_i}$ mit

$$\widehat{Q}_i \setminus Q_{k+1} = P_{i,1} \cup \dots \cup P_{i,m_i} \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, \ell\},$$

also ist durch

$$\begin{aligned} A &= Q_1 \cup \dots \cup Q_k \cup Q_{k+1} = (\widehat{Q}_1 \cup \dots \cup \widehat{Q}_\ell) \cup Q_{k+1} \\ &= (\widehat{Q}_1 \cup \dots \cup \widehat{Q}_\ell) \setminus Q_{k+1} \cup Q_{k+1} = (\widehat{Q}_1 \setminus Q_{k+1}) \cup \dots \cup (\widehat{Q}_\ell \setminus Q_{k+1}) \cup Q_{k+1} \\ &= Q_{k+1} \cup \bigcup_{i=1}^{\ell} \bigcup_{j=1}^{m_i} P_{i,j} \end{aligned}$$

die gewünschte Darstellung gegeben. ■

Lemma 2.18 (Schnitt mit einer Überdeckung) Sei Q ein d -dimensionaler Quader, und seien $k \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Quader P_1, \dots, P_k mit

$$Q \subseteq \bigcup_{i=1}^k P_i$$

gegeben. Dann gilt

$$\lambda_d(Q) = \sum_{i=1}^k \lambda_d(Q \cap P_i).$$

Beweis. (vgl. [1, Satz 4.3]) Der Beweis basiert auf der Idee, alle beteiligten Quader in „Basisquader“ zu zerlegen, deren Inhalte sich besonders einfach miteinander verrechnen lassen (vgl. Abbildung 2.4).

Für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ wählen wir $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^d$ mit $P_i = [\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i[$. Außerdem wählen wir $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0 \in \mathbb{R}^d$ mit $Q = [\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0[$. Dabei dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$a_{i,\nu} \leq b_{i,\nu} \quad \text{für alle } i \in \{0, \dots, k\}, \nu \in \{1, \dots, d\}$$

annehmen. Wir setzen $\ell := 2k + 1$ und stellen fest, dass wir für jede Koordinatenrichtung $\nu \in \{1, \dots, d\}$ durch einfaches Sortieren eine Familie $(x_{\nu,j})_{j=0}^{\ell}$ in \mathbb{R} finden können, die

$$\{x_{\nu,0}, \dots, x_{\nu,\ell}\} = \{a_{0,\nu}, \dots, a_{k,\nu}, b_{0,\nu}, \dots, b_{k,\nu}\} \quad \text{und} \quad x_{\nu,0} \leq x_{\nu,1} \leq \dots \leq x_{\nu,\ell}$$

2 Grundlagen der Maßtheorie

erfüllt. Wir definieren

$$E_\nu := [x_{1,\nu_1-1}, x_{1,\nu_1}] \times \dots \times [x_{d,\nu_d-1}, x_{d,\nu_d}] \quad \text{für alle } \nu \in \{1, \dots, \ell\}^d.$$

Das sind unsere „Basisquader“, aus denen sich alle für den Beweis relevanten Quader zusammensetzen lassen: Nach unserer Konstruktion gelten

$$\begin{aligned} \emptyset &= E_\nu \cap E_\mu && \text{für alle } \nu, \mu \in \{1, \dots, \ell\}^d \text{ mit } \nu \neq \mu, \\ Q &= \bigcup_{\substack{\nu \in \{1, \dots, \ell\}^d \\ E_\nu \subseteq Q}} E_\nu, \\ Q \cap P_i &= \bigcup_{\substack{\nu \in \{1, \dots, \ell\}^d \\ E_\nu \subseteq Q \cap P_i}} E_\nu && \text{für alle } i \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Wichtiger ist, dass sich aus den Inhalten der Quader E_ν auch die Inhalte der uns interessierenden Quader Q und $Q \cap P_i$ zusammensetzen lassen: Nach Konstruktion finden wir $\alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_1, \dots, \beta_d \in \{1, \dots, \ell\}^d$ so, dass

$$x_{\iota, \alpha_\iota - 1} = a_{0, \iota}, \quad x_{\iota, \beta_\iota} = b_{0, \iota} \quad \text{für alle } \iota \in \{1, \dots, d\}$$

gilt. Daraus folgt

$$Q = \bigcup_{\nu_1 = \alpha_1}^{\beta_1} \dots \bigcup_{\nu_d = \alpha_d}^{\beta_d} E_\nu$$

und nach Distributivgesetz und Definition des Inhalts auch

$$\begin{aligned} \lambda_d(Q) &= (b_{0,1} - a_{0,1}) \dots (b_{0,d} - a_{0,d}) = (x_{1,\beta_1} - x_{1,\alpha_1-1}) \dots (x_{d,\beta_d} - x_{d,\alpha_d-1}) \\ &= \sum_{\nu_1 = \alpha_1}^{\beta_1} \dots \sum_{\nu_d = \alpha_d}^{\beta_d} (x_{1,\nu_1} - x_{1,\nu_1-1}) \dots (x_{d,\nu_d} - x_{d,\nu_d-1}) \\ &= \sum_{\nu_1 = \alpha_1}^{\beta_1} \dots \sum_{\nu_d = \alpha_d}^{\beta_d} \lambda_d(E_\nu) = \sum_{\substack{\nu \in \{1, \dots, \ell\}^d \\ E_\nu \subseteq Q}} \lambda_d(E_\nu). \end{aligned}$$

Wir können entsprechend mit $Q \cap P_i$ verfahren und erhalten schließlich

$$\lambda_d(Q) = \sum_{\substack{\nu \in \{1, \dots, \ell\}^d \\ E_\nu \subseteq Q}} \lambda_d(E_\nu) = \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{\nu \in \{1, \dots, \ell\}^d \\ E_\nu \subseteq Q \cap P_i}} \lambda_d(E_\nu) = \sum_{i=1}^k \lambda_d(Q \cap P_i),$$

also das gewünschte Ergebnis. ■

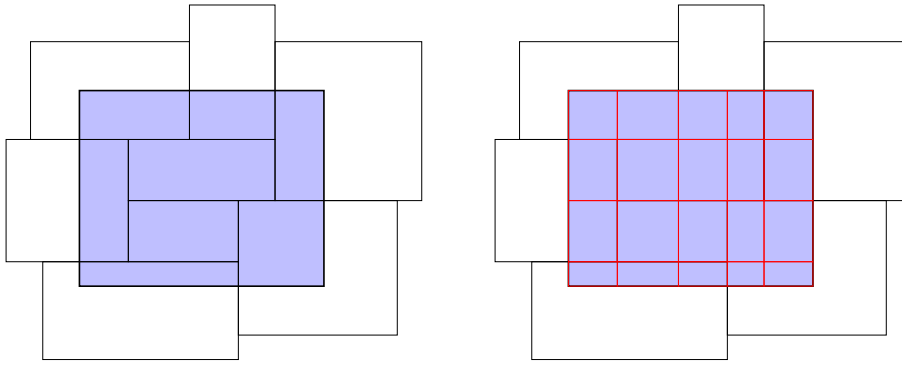


Abbildung 2.4: Zerlegung eines Quaders in durch eine Überdeckung aus disjunkten Quadern induzierte „Basisquader“

Satz 2.19 (Inhalte von Figuren) Sei $d \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathfrak{F}_d$ eine d -dimensionale Figur. Dann existiert eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle paarweise disjunkten Quader Q_1, \dots, Q_k mit

$$A = \bigcup_{i=1}^k Q_i \quad (2.16)$$

die Gleichung

$$\alpha = \sum_{i=1}^k \lambda_d(Q_i) \quad (2.17)$$

gilt. Diese Zahl α bezeichnen wir mit $\lambda_d(A)$ und nennen sie den JORDAN-Inhalt der Menge A .

Beweis. (vgl. [1, Satz 4.3]) Nach Lemma 2.17 existieren $k \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Quader Q_1, \dots, Q_k so, dass (2.16) gilt. Wir definieren die gesuchte Zahl α durch (2.17) und (2.15).

Unsere Aufgabe besteht darin, nachzuweisen, dass α von der konkreten Wahl der Quader unabhängig ist. Seien dazu $\ell \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Quader P_1, \dots, P_ℓ gewählt, für die

$$A = \bigcup_{j=1}^{\ell} P_j$$

gilt. Dank Lemma 2.18 erhalten wir

$$\alpha = \sum_{i=1}^k \lambda_d(Q_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_d(Q_i \cap P_j) = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^k \lambda_d(P_j \cap Q_i) = \sum_{j=1}^{\ell} \mu(P_j),$$

also ist α in der Tat von der Wahl der Zerlegung unabhängig. ■

2.4 Prämaße

Um interessantere Mengen als die d -dimensionalen Figuren behandeln zu können, brauchen wir eine Verallgemeinerung des Konzepts des Inhalts, die sich auch für σ -Algebren eignet. Entscheidend ist hier wieder, dass wir nicht nur endliche, sondern auch abzählbar unendliche Vereinigung von Mengen zulassen.

Ein Blick auf den JORDAN-Inhalt legt nahe, dass wir dabei damit rechnen müssen, dass wir solchen Vereinigungen keine endliche Maßzahl mehr zuordnen können, deshalb lassen wir auch ∞ als Maßzahl zu und verwenden die Konventionen

$$\begin{aligned}
 [0, \infty] &:= \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}. \\
 x + \infty &= \infty + x = \infty - x = \infty && \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\
 x - \infty &= -\infty + x = -\infty - x = -\infty && \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\
 x\infty &= \infty x = \infty && \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0}, \\
 x\infty &= \infty x = -\infty && \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{<0}, \\
 0\infty &= \infty 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Einzig die letzte Gleichung ist unüblich, erweist sich allerdings im Rahmen der Maßtheorie als nützlich.

Definition 2.20 (Prämaß) Sei \mathfrak{A} ein Mengenring auf Ω . Eine Abbildung

$$\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty],$$

die die Eigenschaften

$$\mu(\emptyset) = 0, \tag{2.18a}$$

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \quad \text{für alle paarweise disjunkten Mengen} \tag{2.18b}$$

$$A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \text{ mit } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{A}$$

besitzt, nennen wir Prämaß auf \mathfrak{A} .

Bemerkung 2.21 (Rechenregeln) Ein Prämaß, das nur endliche Werte annimmt, ist offenbar auch ein Inhalt, also gelten in diesem Fall die in Bemerkung 2.15 bewiesenen Rechenregeln weiterhin.

Für allgemeine Prämaße muss jeweils berücksichtigt werden, dass ∞ kein additives inverses Element besitzt. Deshalb gilt Gleichung (2.11), sofern $\mu(A \cap B)$ endlich ist, die Ungleichung (2.12) bleibt uneingeschränkt gültig, und (2.13) bleibt gültig, falls $\mu(B)$ endlich ist.

Neu hinzugekommen ist die Gleichung (2.18b), aus der wir eine verallgemeinerte Variante der Subadditivität (2.12) gewinnen können: Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in \mathfrak{A} mit

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{A}.$$

Dann ist nach (2.1b) auch

$$B_i := \begin{cases} A_1 & \text{falls } i = 1, \\ A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j & \text{ansonsten} \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \quad (2.19)$$

eine Folge in \mathfrak{A} , allerdings gilt für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$ die Gleichung

$$B_i \cap B_j \subseteq A_i \cap \left(A_j \setminus \bigcup_{\ell=1}^{j-1} A_\ell \right) \subseteq A_i \cap (A_j \setminus A_i) = \emptyset,$$

die Folgenglieder sind also paarweise disjunkt. Für jedes

$$x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

existiert mindestens ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_i$. Wir wählen das kleinste solche i und stellen fest, dass dann

$$x \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \quad \text{und damit} \quad x \in A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j = B_i$$

gilt, so dass wir

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$$

erhalten. Aus der Konstruktion folgt $B_i \subseteq A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i.$$

Aus (2.18b) und (2.14) erhalten wir so

$$\mu \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \mu \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i), \quad (2.20)$$

das Prämaß ist also subadditiv.

Wir sind daran interessiert, nachzuweisen, dass der durch Satz 2.19 definierte JORDAN-Inhalt ein Prämaß auf der Menge der d -dimensionalen Figuren ist.

Definition 2.22 (Monotone Folgen) Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen. Die Folge nennen wir monoton fallend, falls

$$A_i \supseteq A_{i+1} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

gilt, und monoton wachsend, falls

$$A_i \subseteq A_{i+1} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

gilt.

Lemma 2.23 (\emptyset -Stetigkeit) Sei \mathfrak{A} ein Mengenring, und sei $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Inhalt². μ ist genau dann ein Prämaß, wenn für jede monoton fallende Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{A} mit

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$$

auch

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = 0$$

gilt. Diese Eigenschaft bezeichnet man als \emptyset -Stetigkeit des Inhalts.

Beweis. (vgl. [1, Satz 3.2]) Sei μ ein Prämaß, und sei A_1, A_2, \dots eine monoton fallende Folge in \mathfrak{A} mit leerem Schnitt. Wir definieren

$$B_i := A_i \setminus A_{i+1} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Für beliebige $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$ gilt $i + 1 \leq j$, also wegen der Monotonie der Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ auch

$$B_i \cap B_j = (A_i \setminus A_{i+1}) \cap (A_j \setminus A_{j+1}) \subseteq (A_i \setminus A_{i+1}) \cap (A_{i+1} \setminus A_{j+1}) = \emptyset,$$

also sind alle Elemente der Folge $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkt. Sei $i \in \mathbb{N}$ und $x \in A_i$. Da die Folge monoton fallend ist, gilt auch $x \in A_j$ für alle $j \in \{1, \dots, i\}$. Da der Schnitt aller Mengen leer ist, muss also ein $j \in \mathbb{N}_{\geq i}$ mit $x \notin A_{j+1}$ existieren. Für das kleinste solche j folgt $x \in A_j \setminus A_{j+1} = B_j$. Da x beliebig gewählt war, erhalten wir

$$A_i = \bigcup_{j=i}^{\infty} B_j,$$

so dass wir (2.18b) anwenden können, um

$$\mu(A_1) = \mu \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i)$$

zu erhalten. Da $\mu(A_1) < \infty$ gilt, muss

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=i}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{j=i}^{\infty} B_j \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$$

gelten, also ist μ \emptyset -stetig.

Sei nun μ als \emptyset -stetig vorausgesetzt, und sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Mengen, die

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{A}$$

²Für den Beweis ist wichtig, dass μ auf \mathfrak{A} nur endliche Werte annimmt. In unserem Fall ist das durch die Definition des Inhalts sicher gestellt, in der Literatur dagegen ist es nicht immer der Fall, dann müssen an dieser Stelle weitere Voraussetzungen einbezogen werden.

erfüllt. Wir definieren

$$B_i := A \setminus \bigcup_{j=1}^i A_j \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

und stellen fest, dass es sich um eine monoton fallende Folge handelt. Da für jedes $x \in A$ ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_i$ existiert, folgt $x \notin B_i$, also ist der Schnitt aller $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ leer. Dank (2.13) und (2.10b) sind die Inhalte der B_i durch

$$\begin{aligned} \mu(B_i) &= \mu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^i A_j\right) = \mu(A) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^i A_j\right) \\ &= \mu(A) - \sum_{j=1}^i \mu(A_j) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

gegeben. Indem wir die \emptyset -Stetigkeit verwenden folgt

$$\mu(A) - \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^i \mu(A_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(B_i) = 0,$$

also haben wir

$$\mu(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^i \mu(A_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j)$$

bewiesen und damit (2.18b) gezeigt. ■

Erinnerung 2.24 (Abgeschlossene Mengen) Sei (Ω, d_Ω) ein metrischer Raum, und sei $A \subseteq \Omega$. Ein Punkt $x \in \Omega$ heißt Berührungspunkt der Menge A , falls $K(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt, falls also jede offene Kugel um x die Menge A schneidet. Anschaulich gesprochen hat x einen Abstand von null zu A .

Die Menge aller Berührungspunkt $x \in \Omega$ der Menge A nennen wir den Abschluss von A und bezeichnen sie mit \bar{A} . Die Menge A heißt abgeschlossen, falls $A = \bar{A}$ gilt.

Eine Menge A ist genau dann abgeschlossen, wenn $\Omega \setminus A$ offen ist.

Erinnerung 2.25 (Kompakte Mengen) Eine Menge A ist kompakt, falls jede aus offenen Mengen bestehende Überdeckung der Menge A eine endliche Teilmenge besitzt, die immer noch eine Überdeckung ist.

Nach dem Satz von HEINE-BOREL ist das äquivalent dazu, dass $A \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und abgeschlossen ist.

Falls $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-leerer kompakter Mengen ist, ist der Durchschnitt dieser Mengen nicht leer. Den Beweis kann man per Kontraposition führen: Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge kompakter Mengen mit leerem Durchschnitt, und sei $A_1 \neq \emptyset$. Wir müssen beweisen, dass ein $i \in \mathbb{N}$ mit $A_i = \emptyset$ existiert. Da der Durchschnitt leer ist, können wir zu jedem $x \in A_1$ ein $i_x \in \mathbb{N}$ mit $x \notin A_{i_x}$ wählen. Da

2 Grundlagen der Maßtheorie

A_{i_x} abgeschlossen ist, muss sogar eine offene Menge U_x existieren, die x enthält und A_{i_x} nicht schneidet. Damit haben wir eine offene Überdeckung der Menge A_1 gefunden. Da A_1 kompakt ist, muss eine endliche Teilüberdeckung existieren, also eine endliche Menge $X \subseteq A_1$ mit

$$A_1 \subseteq \bigcup_{x \in X} U_x.$$

Wir setzen $i := \max\{i_x : x \in X\}$. Für jedes $y \in A_1$ finden wir ein $x \in X$ mit $y \in U_x$, und aus $U_x \cap A_i \subseteq U_x \cap A_{i_x} = \emptyset$ folgt $y \notin A_i$. Aus $A_i \subseteq A_1$ folgt damit $A_i = \emptyset$.

Satz 2.26 (LEBESGUE-Prämaß) Der durch Satz 2.19 definierte Inhalt λ_d auf dem Mengenring der d -dimensionalen Figuren \mathfrak{F}_d ist ein Prämaß. Es wird als das LEBESGUE-Prämaß bezeichnet.

Beweis. (vgl. [1, Satz 4.4]). Dank Lemma 2.23 müssen wir lediglich nachweisen, dass der Inhalt einer monoton gegen \emptyset fallenden Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen null konvergiert. Diesen Beweis führen wir per Kontraposition: Wir wählen eine monoton fallende Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, deren Inhalt *nicht* gegen 0, sondern gegen

$$\delta := \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_d(A_i) > 0$$

konvergiert. Wir wollen zeigen, dass der Durchschnitt dieser Folge nicht leer sein kann. Dazu greifen wir auf kompakte Teilmengen zurück: Wir konstruieren eine Folge $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{F}_d , die

$$B_i \subseteq \bar{B}_i \subseteq A_i, \quad \lambda_d(B_i) \geq \lambda_d(A_i) - \delta 2^{-i} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Dieses Ziel lässt sich relativ einfach erreichen, indem wir die Grenzen der Quader etwas „nach innen schieben“, aus denen die Figuren A_i bestehen.

Indem wir

$$C_i := \bigcap_{j=1}^i B_j \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

setzen, erhalten wir eine monoton fallende Folge in \mathfrak{F}_d mit

$$\bar{C}_i \subseteq \bigcap_{j=1}^i \bar{B}_j \subseteq \bigcap_{j=1}^i A_j \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Wenn wir zeigen können, dass der Schnitt der Mengen \bar{C}_i nicht leer ist, kann auch der Schnitt der Mengen A_i nicht leer sein, und das ist zu zeigen. Da Figuren immer beschränkt sind und da die Mengen \bar{C}_i auch abgeschlossen sind, sind sie nach HEINE-BOREL kompakt, also lässt sich Erinnerung 2.25 anwenden.

Wir beweisen zunächst, dass $\lambda_d(C_i) > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, denn daraus folgt $C_i \neq \emptyset$. Dazu verwenden wir eine vollständige Induktion mit der Behauptung

$$\lambda_d(C_i) \geq \lambda_d(A_i) - \delta(1 - 2^{-i}) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N},$$

aus der das Gewünschte folgt.

Induktionsanfang: Für $i = 1$ gilt nach Konstruktion

$$\lambda_d(C_1) = \lambda_d(B_1) \geq \lambda_d(A_1) - \delta/2 \geq \lambda_d(A_1) - \delta(1 - 2^{-1}).$$

Induktionsschritt: Sei $i \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\lambda_d(C_i) \geq \lambda_d(A_i) - \delta(1 - 2^{-i})$ gilt. Aus der Konstruktion erhalten wir

$$\begin{aligned} C_{i+1} &= \bigcap_{j=1}^{i+1} B_j = \bigcap_{j=1}^i B_j \cap B_{i+1} = C_i \cap B_{i+1}, \\ C_i \cup B_{i+1} &\subseteq B_i \cup B_{i+1} \subseteq A_i \cup A_{i+1} = A_i, \end{aligned}$$

also folgt mit (2.11)

$$\begin{aligned} \lambda_d(C_{i+1}) &= \lambda_d(C_i \cap B_{i+1}) = \lambda_d(C_i) + \lambda_d(B_{i+1}) - \lambda_d(C_i \cup B_{i+1}) \\ &\geq \lambda_d(C_i) + \lambda_d(A_{i+1}) - \delta 2^{-i-1} - \lambda_d(A_i) \\ &\geq \lambda_d(A_i) - \delta(1 - 2^{-i}) + \lambda_d(A_{i+1}) - \delta 2^{-i-1} - \lambda_d(A_i) \\ &= \lambda_d(A_{i+1}) - \delta(1 - 2^{-i} + 2^{-i-1}) = \lambda_d(A_{i+1}) - \delta(1 - 2^{-i-1}). \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsbeweis vollständig.

Dank $\lambda_d(A_i) \geq \delta$ erhalten wir insbesondere

$$\lambda_d(C_i) \geq \lambda_d(A_i) - \delta(1 - 2^{-i}) \geq \delta - \delta(1 - 2^{-i}) = \delta 2^{-i} > 0,$$

also insbesondere $C_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Dann ist $(\overline{C}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge kompakter nicht-leerer Teilmengen, muss also nach Erinnerung 2.25 einen nicht-leeren Schnitt besitzen, so dass wir

$$\emptyset \neq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{C}_i \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \overline{B}_i \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

erhalten und bewiesen haben, dass λ_d \emptyset -stetig und damit nach Lemma 2.23 auch ein Prämaß ist. ■

2.5 Maße

Wie wir bereits gesehen haben, bieten σ -Algebren wesentlich bessere Möglichkeiten, Mengen zu approximieren. Beispielsweise lassen sich mit dem Mengenring \mathfrak{F}_d lediglich rechtwinklige Geometrien darstellen, während sich mit der von ihm erzeugten σ -Algebra \mathfrak{B}_d der BOREL-Mengen unter anderem beliebige offene und abgeschlossene Teilmengen des \mathbb{R}^d behandeln lassen.

Es ist erstrebenswert, auch solchen Mengen eine Maßzahl zuordnen zu können.

Definition 2.27 (Maß) Sei \mathfrak{A} eine σ -Algebra auf Ω . Eine Abbildung

$$\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty],$$

die die Eigenschaften

$$\mu(\emptyset) = 0, \tag{2.21a}$$

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \quad \text{für alle paarweise disjunkten Mengen} \tag{2.21b}$$

$$A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$$

besitzt, nennen wir Maß³ auf \mathfrak{A} .

Bemerkung 2.28 (Rechenregeln) Da jede σ -Algebra ein Mengenring ist, ist jedes Maß auch ein Prämaß, so dass die in den Bemerkungen 2.15 und 2.21 bewiesenen Rechenregeln gültig bleiben.

Durch (2.21b) neu hinzu kommt eine Variante der Ungleichung (2.20): Da \mathfrak{A} eine σ -Algebra ist, ist für jede Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{A} auch ihre Vereinigung in \mathfrak{A} enthalten, so dass wir (2.20) anwenden dürfen und

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \quad \text{für alle Folgen } (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathfrak{A} \tag{2.22}$$

ohne weitere Einschränkungen erhalten.

Maße (und bei genauerer Betrachtung auch schon Prämaße) besitzen außerdem der Stetigkeit ähnliche Eigenschaften: Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in \mathfrak{A} , und sei

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{A}.$$

Falls $\mu(A) < \infty$ gilt, folgt mit (2.14) auch $\mu(A_i) \leq \mu(A) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also können wir (2.13) verwenden. Wir setzen

$$B_i := \begin{cases} A_1 & \text{falls } i = 1, \\ A_i \setminus A_{i-1} & \text{ansonsten} \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

und erhalten

$$\mu(A_i) = \mu(A_1) + \sum_{j=2}^i \mu(A_j) - \mu(A_{j-1}) = \sum_{j=1}^i \mu(B_j) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

mit (2.13) sowie

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^i \mu(B_j) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).$$

³engl. *measure*

Falls die linke Seite dieser Gleichung unendlich ist, muss es wegen (2.12) auch die rechte sein, also gilt die Gleichung für beliebige monoton wachsende Folgen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{A} .

Sei nun $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in \mathfrak{A} . Wir setzen

$$A := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

und stellen fest, dass $(A_i \setminus A)_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton gegen \emptyset fallende Folge ist. Mit Lemma 2.23 folgt

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) &= \mu(A) + \mu \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \setminus A \right) \\ &= \mu(A) + \mu \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \setminus A) \right) = \mu(A). \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$\mu \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \quad \text{für alle monoton wachsenden Folgen } (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathfrak{A}, \quad (2.23a)$$

$$\mu \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \inf_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \quad \text{für alle monoton fallenden Folgen } (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathfrak{A} \quad (2.23b)$$

bewiesen.

Unser Ziel ist es, zu einem auf einem Mengenring \mathfrak{R} gegebenen Prämaß μ eine Fortsetzung $\hat{\mu}$ auf eine σ -Algebra $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{R}$ zu konstruieren. Als Hilfsmittel führen wir Abbildungen ein, die schwächere Voraussetzungen als ein „echtes“ Maß erfüllen.

Definition 2.29 (Äußeres Maß) Sei Ω eine Menge. Eine Abbildung

$$\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty],$$

die die Eigenschaften

$$\mu^*(\emptyset) = 0, \quad (2.24a)$$

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(A) \quad \text{für alle } A, B \in \mathfrak{P}(\Omega) \text{ mit } B \subseteq A, \quad (2.24b)$$

$$\mu^* \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i) \quad \text{für alle Folgen } (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathfrak{P}(\Omega), \quad (2.24c)$$

besitzt, nennen wir äußeres Maß⁴ auf Ω .

Unser Ziel ist es nun, zu einem Maß auf einem Mengenring eine Fortsetzung auf die Potenzmenge zu definieren, die ein äußeres Maß ist. Die Idee dafür ist relativ naheliegend: Wir überdecken die Menge A mit „möglichst kleinen“ Elementen A_i des Mengenrings und verwenden das Infimum der diesen Überdeckungen zugeordneten Maßzahlen (siehe Abbildung 2.5).

⁴engl. *outer measure*

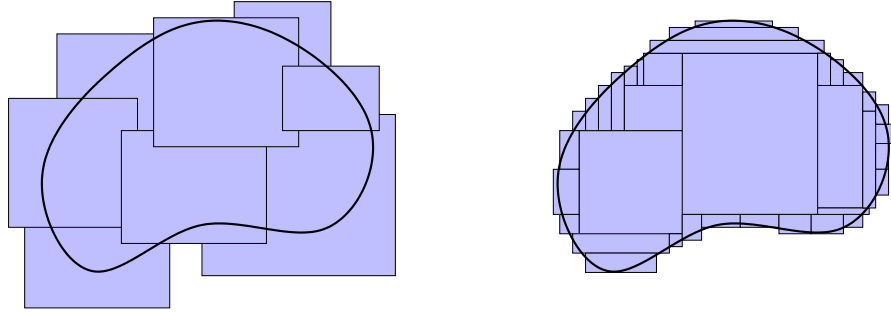


Abbildung 2.5: Beispiele für Überdeckungen einer Menge durch Quader

Satz 2.30 (Äußeres Maß) Sei μ ein Prämaß auf einem Mengenring \mathfrak{R} auf einer Menge Ω . Für jede Menge $A \subseteq \Omega$ definieren wir

$$\mathcal{U}_R(A) := \left\{ (A_i)_{i \in \mathbb{N}} : A_i \in \mathfrak{R} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}, A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\},$$

die Menge $\mathcal{U}_R(A)$ besteht also aus allen Folgen von Mengen aus \mathfrak{R} , deren Vereinigung A enthält.

Dann ist die durch

$$\mu^*(A) := \begin{cases} \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) : (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_R(A) \right\} & \text{falls } \mathcal{U}_R(A) \neq \emptyset, \\ \infty & \text{ansonsten} \end{cases} \quad \text{für alle } A \subseteq \Omega \quad (2.25)$$

definierte Abbildung $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ein äußeres Maß, das

$$\mu^*(A) = \mu(A) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{R}, \quad (2.26a)$$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{P}(\Omega), B \in \mathfrak{R} \quad (2.26b)$$

erfüllt.

Beweis. (vgl. [1, Satz 5.1]) Die Folge $\emptyset = A_1 = A_2 = \dots$ gehört nach (2.1a) zu $\mathcal{U}_R(\emptyset)$ und führt nach (2.10a) zu

$$\mu^*(\emptyset) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(\emptyset) = 0.$$

Da der Inhalt μ nach Definition keine negativen Werte annehmen kann, folgt $\mu^*(\emptyset) = 0$, also (2.24a).

Seien nun $A, B \subseteq \Omega$ mit $B \subseteq A$ gegeben. Nach Definition gilt dann $\mathcal{U}_R(A) \subseteq \mathcal{U}_R(B)$, also auch $\mu^*(A) \geq \mu^*(B)$, und damit (2.24b).

Sei nun $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$, und sei

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

Sollte ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\mu^*(A_i) = \infty$ existieren, gilt (2.24c) trivial. Wir dürfen also im Folgenden davon ausgehen, dass $\mu^*(A_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, und damit auch $\mathcal{U}_R(A_i) \neq \emptyset$. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ muss dann nach Definition eine Folge $(A_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}_R(A_i)$ mit

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_{ij}) \leq \mu^*(A_i) + 2^{-i} \epsilon$$

existieren. Für die Doppelfolge $(A_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ gilt

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{ij} = \bigcup_{i,j \in \mathbb{N}} A_{ij},$$

also gehört $(A_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ (abgesehen von einer geeigneten Ummumerierung) zu $\mathcal{U}_R(A)$ und es folgt

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\leq \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \mu(A_{ij}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_{ij}) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mu^*(A_i) + 2^{-i} \epsilon) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i) + \epsilon \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i) + \epsilon. \end{aligned}$$

Da wir diese Abschätzung für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ bewiesen haben, folgt (2.24c).

Sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann gehört die Folge $A_1 = A, \emptyset = A_2 = A_3 = \dots$ zu $\mathcal{U}_R(A)$, und wir erhalten

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) = \mu(A).$$

Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge aus $\mathcal{U}_R(A)$. Nach (2.20) gilt

$$\mu(A) \leq \mu \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cap A \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i \cap A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i),$$

also muss auch $\mu(A) \leq \mu^*(A)$ gelten und wir haben (2.26a) bewiesen.

Sei nun $A \subseteq \Omega$ und $B \in \mathfrak{A}$. Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{U}_R(A)$. Nach (2.10b) gilt

$$\mu(A_i) = \mu(A_i \cap B) + \mu(A_i \setminus B) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N},$$

also erhalten wir auch

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i \cap B) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i \setminus B).$$

Da die Folge $(A_i \cap B)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}_R(A \cap B)$ und die Folge $(A_i \setminus B)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}_R(A \setminus B)$ liegen, folgt nach Definition des äußeren Maßes

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B).$$

Da wir diese Abschätzung für alle Folgen $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{U}_R(A)$ bewiesen haben, folgt $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B)$. Indem wir (2.24c) auf $A_1 = A \cap B, A_2 = A \setminus B$

2 Grundlagen der Maßtheorie

und $\emptyset = A_3 = A_4 = \dots$ anwenden, erhalten wir auch $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B)$, also ist (2.26b) bewiesen. ■

Wir können also ein Prämaß μ auf einem Mengenring immer zu einem äußeren Maß μ^* auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ fortsetzen. Wenn μ^* ein Maß wäre, müsste (2.26b) für alle $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gelten, statt nur für $B \in \mathfrak{R}$. Im Allgemeinen ist das nicht der Fall, allerdings können wir μ^* auf eine Teilmenge der Potenzmenge einschränken, auf der die Gleichung gilt. Es stellt sich heraus, dass diese Teilmenge eine σ -Algebra ist und μ^* auf ihr ein Maß.

Satz 2.31 (CARATHÉODORY) Sei μ^* ein äußeres Maß auf Ω . Eine Menge $A \subseteq \Omega$ heißt μ^* -messbar, falls

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \quad \text{für alle } Z \subseteq \Omega \quad (2.27)$$

gilt. Die Menge

$$\mathfrak{A} := \{A \subseteq \Omega : A \text{ ist } \mu^* \text{-messbar}\}$$

ist eine σ -Algebra, und μ^* ist ein Maß auf \mathfrak{A} .

Beweis. (vgl. [5, Lemma VI.7.3]) Da die Gleichung

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap \emptyset) + \mu^*(Z \setminus \emptyset) \quad \text{für alle } Z \subseteq \Omega$$

gilt, ist die leere Menge in \mathfrak{A} enthalten.

Wir können (2.27) auch in der Form

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap (\Omega \setminus A)) \quad \text{für alle } B \subseteq \Omega$$

schreiben und folgern, dass für ein $A \in \mathfrak{A}$ auch $\Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$ gelten muss, also (2.5b). Aus $\emptyset \in \mathfrak{A}$ folgt damit (2.5a).

Seien $A, B \in \mathfrak{A}$ gegeben. In einem Zwischenschritt müssen wir nachweisen, dass $A \cap B \in \mathfrak{A}$ gilt. Sei $Z \subseteq \Omega$. Da A μ^* -messbar ist, gilt

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A),$$

und da B ebenfalls μ^* -messbar ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu^*(Z) &= \mu^*((Z \cap A) \cap B) + \mu^*((Z \cap A) \setminus B) + \mu^*(Z \setminus A) \\ &= \mu^*(Z \cap (A \cap B)) + \mu^*((Z \setminus B) \cap A) + \mu^*(Z \setminus A). \end{aligned}$$

Wir nutzen wieder aus, dass A μ^* -messbar ist, um

$$\begin{aligned} \mu^*(Z \setminus (A \cap B)) &= \mu^*((Z \setminus (A \cap B)) \cap A) + \mu^*((Z \setminus (A \cap B)) \setminus A) \\ &= \mu^*((Z \setminus B) \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \end{aligned}$$

zu zeigen und haben

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap (A \cap B)) + \mu^*(Z \setminus (A \cap B))$$

bewiesen, also $A \cap B \in \mathfrak{A}$. Wir haben bereits (2.5b) bewiesen also gilt auch

$$A \cup B = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)) \in \mathfrak{A}.$$

Es bleiben noch (2.5c) und (2.21b) zu zeigen. Da wir von einer beliebigen Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ immer zu der Folge $(A_i \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{i-1}))_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen mit derselben Vereinigung übergehen können, genügt es, (2.5c) für letztere zu zeigen.

Sei also $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in \mathfrak{A} . Wir zeigen induktiv, dass

$$\mu^* \left(Z \cap \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(Z \cap A_i) \quad \text{für alle } Z \subseteq \Omega \quad (2.28)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang: Der Fall $n = 1$ ist trivial.

Induktionsschritt: Gelte (2.28) für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $Z \subseteq \Omega$. Da die Vereinigung der Mengen A_1, \dots, A_{n+1} in \mathfrak{A} liegt, erhalten wir

$$\mu^* \left(Z \cap \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right) = \mu^*(Z) - \mu^* \left(Z \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right) = \mu^*(Z) - \mu^* \left(\left(Z \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \setminus A_{n+1} \right),$$

und da auch $A_{n+1} \in \mathfrak{A}$ gilt, folgt

$$= \mu^*(Z) - \mu^* \left(Z \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right) + \mu^* \left(\left(Z \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap A_{n+1} \right),$$

und indem wir für den letzten Term ausnutzen, dass A_{n+1} disjunkt von A_1, \dots, A_n ist, finden wir

$$= \mu^*(Z) - \mu^* \left(Z \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \right) + \mu^*(Z \cap A_{n+1}).$$

Indem wir (2.27) auf die Vereinigung der Mengen A_1, \dots, A_n anwenden, folgt somit

$$= \mu^* \left(Z \cap \bigcup_{i=1}^n A_i \right) + \mu^*(Z \cap A_{n+1}),$$

und mit der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$= \sum_{i=1}^n \mu^*(Z \cap A_i) + \mu^*(Z \cap A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(Z \cap A_i).$$

Damit ist der Induktionsbeweis vollständig.

2 Grundlagen der Maßtheorie

Wir setzen

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

Für beliebige $Z \subseteq \Omega$ ergibt sich aus der Monotonie-Ungleichung (2.24b) und der soeben bewiesenen Gleichung (2.28) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mu^*(Z) &= \mu^*\left(Z \cap \bigcup_{i=1}^n A_i\right) + \mu^*\left(Z \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i\right) \geq \mu^*\left(Z \cap \bigcup_{i=1}^n A_i\right) + \mu^*(Z \setminus A) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu^*(Z \cap A_i) + \mu^*(Z \setminus A) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

also folgt per Grenzübergang und (2.24c)

$$\begin{aligned} \mu^*(Z) &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(Z \cap A_i) + \mu^*(Z \setminus A) \\ &\geq \mu^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (Z \cap A_i)\right) + \mu^*(Z \setminus A) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Indem wir (2.24c) auf die Folge $Z \cap A, Z \setminus A, \emptyset, \dots$ anwenden folgt auch

$$\mu^*(Z) \leq \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A),$$

also haben wir

$$\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A) \quad \text{für alle } Z \subseteq \Omega$$

und damit gerade (2.5c) für \mathfrak{A} bewiesen. Also ist \mathfrak{A} eine σ -Algebra. Indem wir in (2.29) $Z = A$ einsetzen, folgt

$$\mu^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu^*(A) \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i) \geq \mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right),$$

also erfüllt μ^* auch (2.21b) und ist somit ein Maß auf \mathfrak{A} . ■

Wir haben unser Ziel fast erreicht: Ein Prämaß μ auf einem Mengerring \mathfrak{R} kann zu einem Maß μ^* auf einer σ -Algebra $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{R}$ fortgesetzt werden.

Bemerkung 2.32 Für das in Satz 2.30 definierte äußere Maß μ^* gilt (2.26b), also enthält die σ -Algebra der μ^* -messbaren Mengen insbesondere den Mengerring \mathfrak{R} , also auch die von \mathfrak{R} erzeugte σ -Algebra.

Beispielsweise können wir das LEBESGUE-Prämaß λ_d zu einem LEBESGUE-Maß auf einer σ -Algebra fortsetzen, die den Mengerring \mathfrak{F}_d der Figuren enthält, und damit auch die von ihm erzeugte BORELSche σ -Algebra \mathfrak{B}_d . Wir können also jeder BORELMenge eine Maßzahl zuordnen.

Eine Frage bleibt allerdings noch zu klären: Ist das Maß μ^* auf der von \mathfrak{R} erzeugten σ -Algebra bereits durch sein Verhalten auf \mathfrak{R} eindeutig bestimmt?

Diese Frage lässt sich besonders einfach beantworten, wenn wir uns auf Prämaße beschränken, zu denen es eine Folge von Teilmengen mit *endlicher* Maßzahl gibt, deren Vereinigung den gesamten Raum ausschöpft:

Definition 2.33 (σ -endliches Prämaß) Sei \mathfrak{R} ein Mengerring auf Ω , und sei μ ein Prämaß auf \mathfrak{R} . Falls eine Folge $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Mengen mit

$$\begin{aligned} \Omega_i \in \mathfrak{R}, \quad \mu(\Omega_i) < \infty \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}, \\ \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i = \Omega \end{aligned}$$

existiert, nennen wir μ σ -endlich auf \mathfrak{R} .

Satz 2.34 (Eindeutigkeit) Sei \mathfrak{A} eine σ -Algebra auf einer Menge Ω , und sei $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}$ ein Mengerring, der \mathfrak{A} erzeugt. Sei μ ein Maß auf \mathfrak{A} , und sei μ^* das gemäß Satz 2.30 durch $\mu|_{\mathfrak{R}}$ definierte äußere Maß. Falls μ σ -endlich auf \mathfrak{R} ist, gilt $\mu = \mu^*$ auf \mathfrak{A} .

Beweis. (vgl. [5, Theorem VI.7.1, Seite 157]) Nach (2.26b) sind alle Mengen in \mathfrak{R} μ^* -messbar, und da \mathfrak{R} die σ -Algebra \mathfrak{A} erzeugt, müssen auch alle Mengen in \mathfrak{A} μ^* -messbar sein. Insbesondere ist μ^* also ein Maß auf \mathfrak{A} .

Sei $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die nach Voraussetzung existierende Folge aus Definition 2.33. Bevor wir uns dem allgemeinen Fall zuwenden, behandeln wir zunächst nur solche Mengen, die in einer der Mengen Ω_i enthalten sind.

Sei $j \in \mathbb{N}$, und sei $B \in \mathfrak{A}$ mit $B \subseteq \Omega_j$ gegeben. Aus (2.14) folgt dann $\mu(B) \leq \mu(\Omega_j) < \infty$. Wir erhalten mit (2.22) die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(C_i) : (C_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_R(B) \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \mu \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \right) : (C_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_R(B) \right\} \geq \mu(B), \end{aligned}$$

denn $\mathcal{U}_R(B)$ enthält insbesondere die konstante Folge $(\Omega_j)_{i \in \mathbb{N}}$, ist also nicht leer.

Wir können die umgekehrte Abschätzung beweisen, indem wir zu dem Komplement $\Omega_j \setminus B$ der Menge B übergehen: Dank (2.1b) gilt $\Omega_j \setminus B \in \mathfrak{A}$, und es folgt mit (2.13) die Ungleichung

$$\mu(B) = \mu(\Omega_j) - \mu(\Omega_j \setminus B) \geq \mu(\Omega_j) - \mu^*(\Omega_j \setminus B) = \mu^*(\Omega_j) - \mu^*(\Omega_j \setminus B) = \mu^*(B),$$

also haben wir $\mu(B) = \mu^*(B)$ für alle $B \subseteq \Omega_j$ bewiesen.

Nun können wir uns allgemeinen Mengen zuwenden. Wir wählen $A \in \mathfrak{A}$ und untersuchen die durch

$$B_i := \begin{cases} \Omega_1 \cap A & \text{falls } i = 1, \\ (\Omega_i \cap A) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j & \text{ansonsten} \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

2 Grundlagen der Maßtheorie

definierte Folge $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Nach Konstruktion sind die Elemente der Folge paarweise disjunkt, und es gilt

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\Omega_i \cap A) = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Omega_i \right) \cap A = A.$$

Für jede Menge B_i gelten $B_i \in \mathfrak{A}$ und $B_i \subseteq \Omega_i$ nach Konstruktion, also nach dem zuvor Gezeigten auch $\mu^*(B_i) = \mu(B_i)$, so dass wir mit (2.21b) schließlich

$$\mu^*(A) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(B_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i) = \mu(A)$$

erhalten. ■

Folgerung 2.35 (Eindeutigkeit) Sei \mathfrak{A} eine σ -Algebra, und sei $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}$ ein Mengerring, der \mathfrak{A} erzeugt. Seien μ_1 und μ_2 Maße auf \mathfrak{A} , die

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{R}$$

erfüllen, und sei μ_1 σ -endlich auf \mathfrak{R} . Dann gilt

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A},$$

ein Maß ist also durch seine Werte auf einem Mengerring bereits eindeutig definiert.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass μ_2 ebenfalls σ -endlich auf \mathfrak{R} sein muss, da μ_1 und μ_2 auf diesem Ring übereinstimmen.

Seien μ_1^* und μ_2^* die durch Satz 2.30 definierten äußeren Maße zu μ_1 und μ_2 . Nach Satz 2.34 muss $\mu_1^*|_{\mathfrak{A}} = \mu_2^*|_{\mathfrak{A}}$ gelten. Da μ_1 und μ_2 auf \mathfrak{R} übereinstimmen, gilt für jedes $A \in \mathfrak{R}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \mu_1^*(A) &= \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_1(C_i) : C_i \in \mathcal{U}_R(A) \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_2(C_i) : C_i \in \mathcal{U}_R(A) \right\} = \mu_2^*(A), \end{aligned}$$

also folgt $\mu_1 = \mu_1^* = \mu_2^* = \mu_2$. ■

Das Ergebnis unserer Arbeit ist eines der zentralen Resultate der modernen Maßtheorie:

Satz 2.36 (Fortsetzung von Maßen) Sei μ ein σ -endliches Prämaß auf einem Mengerring \mathfrak{R} , und sei \mathfrak{A} die von \mathfrak{R} erzeugte σ -Algebra. Dann existiert genau eine Fortsetzung des Prämaßes μ zu einem Maß μ^* auf \mathfrak{A} .

Beweis. Wir definieren die Fortsetzung μ^* wie in Satz 2.30 und die σ -Algebra \mathfrak{A} wie in Satz 2.31. Aus Satz 2.34 folgt dann die Eindeutigkeit des Maßes. ■

Folgerung 2.37 (LEBESGUE-Maß) *Das LEBESGUE-Prämaß λ_d ist σ -endlich, lässt sich also eindeutig zu einem Maß λ_d^* auf einer σ -Algebra $\mathfrak{L}_d \supseteq \mathfrak{F}_d$ fortsetzen. Dieses Maß nennen wir das LEBESGUE-Maß, und die \mathfrak{L}_d nennen wir die LEBESGUESCHE σ -Algebra. Die LEBESGUESCHE σ -Algebra enthält die BORELSCHE σ -Algebra \mathfrak{B}_d .*

Beweis. Zu zeigen ist nur, dass λ_d σ -endlich ist. Offenbar erfüllen die Quader $E_i := [-i, i]^d$ die Voraussetzung der Definition 2.33, also lässt sich Satz 2.36 anwenden.

Da \mathfrak{B}_d die kleinste σ -Algebra ist, die \mathfrak{F}_d enthält, ist sie in \mathfrak{L}_d enthalten. ■

Im Folgenden unterscheiden wir nicht zwischen dem LEBESGUE-Prämaß λ_d und dem LEBESGUE-Maß λ_d^* , sondern werden beide einheitlich mit λ_d bezeichnen.

3 Einführung des allgemeinen Integrals

Auf der Grundlage des Begriffs des Maßes können wir uns nun der Frage widmen, wie sich ein Integral auf einem möglichst großen Raum von Funktionen sinnvoll definieren lässt. Wir gehen dabei von Treppenfunktionen aus, also von Funktionen, die nur endlich viele Werte annehmen können. Für derartige Funktionen lässt sich mit Hilfe des Maßes relativ einfach ein Integral definieren, das wir mit Hilfe von Grenzwerten auf einen größeren Raum von Funktionen fortsetzen können.

Da das Integral über einen Grenzwert definiert ist, benötigen wir möglichst flexible Konvergenzaussagen, um Beweise über sein Verhalten führen zu können. Ausgangspunkt vieler Beweise ist dabei die punktweise Konvergenz einer Folge von Funktionen, die unter bestimmten zusätzlichen Voraussetzungen bereits die Konvergenz des Integrals nach sich zieht.

3.1 Motivation

Ein wesentliches Ziel bei der Einführung des allgemeinen Integralbegriffs besteht darin, bereits aus der *punktweisen* Konvergenz einer Folge von Funktionen auf die Konvergenz der zugehörigen Integrale schließen zu können. Die punktweise Konvergenz lässt sich in der Praxis oft besonders einfach nachprüfen, so dass ein mit ihr gut verträglicher Integralbegriff sich als sehr nützlich erweist.

Das RIEMANN-Integral einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wird in der Regel über Ober- und Untersummen definiert: Wir zerlegen ein Intervall $[a, b]$ in $n \in \mathbb{N}$ Teilintervalle $[x_{j-1}, x_j]$ mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und untersuchen, wie sich die Ober- und Untersummen

$$R_+ := \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \max_{z \in [x_{j-1}, x_j]} f(z), \quad R_- := \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \min_{z \in [x_{j-1}, x_j]} f(z)$$

verhalten. Falls beide in einem geeigneten Sinn gegen denselben Grenzwert konvergieren, ist die Funktion RIEMANN-integrierbar und ihr Integral ist der Grenzwert. Dieser Integralbegriff bietet den großen Vorteil, direkt mit dem Begriff der Ableitung verträglich zu sein, so dass uns wichtige Aussagen wie der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung zur Verfügung stehen.

Allerdings ist er weniger gut für punktweise Konvergenzaussagen geeignet, denn der Grenzübergang, durch den das Integral beschrieben wird, spielt sich im Definitionsbereich der Funktion ab, während punktweise Konvergenz im Bildbereich stattfindet. Aus diesem Grund lassen sich Konvergenzaussagen für das RIEMANN-Integral in der Regel nur unter relativ starken Voraussetzungen treffen, die bei vielen Anwendungen nicht erfüllt sind.

3 Einführung des allgemeinen Integrals

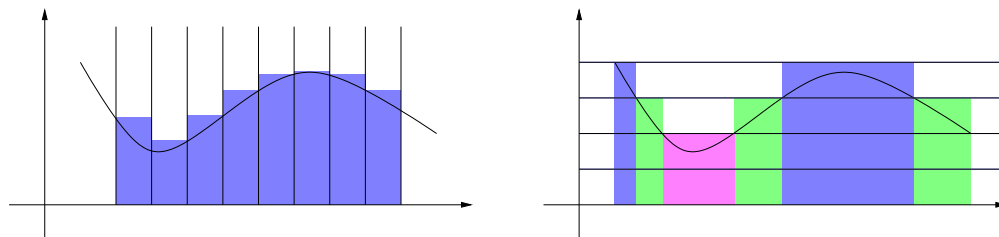


Abbildung 3.1: Idee des RIEMANN-Integrals (links) im Vergleich zu der des LEBESGUE-Integrals (rechts): Im ersten Fall wird der Definitionsbereich unterteilt, im zweiten der Bildbereich

Die Idee des LEBESGUE-Integrals besteht darin, die Definition des Integrals auf einem Grenzübergang im Bildbereich aufzubauen: Falls das Bild der Funktion f in einem Intervall $[c, d]$ enthalten ist, zerlegen wir dieses Intervall in disjunkte Teilintervalle $[y_{j-1}, y_j[$ mit $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ und untersuchen die Urbilder $f^{-1}([y_{j-1}, y_j[)$ dieser Intervalle. Unter relativ schwachen Voraussetzungen können wir diesen Urbildern eine Maßzahl zuordnen und so alternative Ober- und Untersummen

$$L_+ := \sum_{j=1}^n y_j \mu(f^{-1}([y_{j-1}, y_j[)), \quad L_- := \sum_{j=1}^n y_{j-1} \mu(f^{-1}([y_{j-1}, y_j[))$$

definieren. Falls diese Summen in geeigneter Weise gegen denselben Grenzwert konvergieren, ist die Funktion LEBESGUE-integrierbar und das LEBESGUE-Integral ist der Grenzwert.

3.2 Messbare Abbildungen

Um die vorgestellte Idee für die Definition des LEBESGUE-Integrals in die Tat umsetzen zu können, ist es erforderlich, dass wir die in L_+ und L_- auftretenden Maßzahlen $\mu(f^{-1}([y_{j-1}, y_j[))$ berechnen können, dass also die Urbilder der von uns verwendeten Intervalle in der σ -Algebra enthalten sind, auf der μ definiert ist. Funktionen, die diese Eigenschaft besitzen, werden wir nun näher untersuchen.

Definition 3.1 (Messbare Abbildung) Seien \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 σ -Algebren auf Mengen Ω_1 und Ω_2 . Eine Abbildung $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ heißt \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2 -messbar, falls

$$f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_1 \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{A}_2$$

gilt.

Ähnlich wie bei stetigen Abbildungen wird der Nachweis der Messbarkeit einer Abbildung in der Regel geführt, indem man sie aus anderen messbaren Abbildungen zusammensetzt:

Lemma 3.2 (Verkettung messbarer Abbildungen) Seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ und \mathfrak{A}_3 jeweils σ -Algebren auf Mengen Ω_1, Ω_2 und Ω_3 . Seien $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ und $g : \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ Abbildungen. Falls f \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2 -messbar und g \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_3 -messbar ist, ist die Verkettung $g \circ f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_3$ \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_3 -messbar.

Beweis. Seien f und g messbar. Sei $C \in \mathfrak{A}_3$. Da g messbar ist, muss $B := g^{-1}(C) \in \mathfrak{A}_2$ gelten. Da f messbar ist, muss damit $A := f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_1$ gelten. Also folgt

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) = f^{-1}(B) = A \in \mathfrak{A}_1,$$

und $g \circ f$ muss messbar sein. ■

Wir haben bisher Maße auf möglichst großen Mengen definiert, beispielsweise das Lebesgue-Maß λ_d auf \mathbb{R}^d . Die Abbildungen, die wir integrieren wollen, werden in der Regel nicht auf der Gesamtmenge definiert sein, so dass es nützlich ist, σ -Algebren einschränken zu können.

Da uns schon bei der Definition von Maßen und σ -Algebren die Zurückführung auf erzeugende Mengensysteme von Nutzen war, liegt es nahe, auch die Untersuchung der Messbarkeit von Abbildungen auf dieser Grundlage durchzuführen.

Lemma 3.3 (Kriterium für Messbarkeit) Seien \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 σ -Algebren auf Mengen Ω_1 und Ω_2 . Sei $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ eine Abbildung, und sei $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{A}_2$ eine Menge, die die σ -Algebra \mathfrak{A}_2 gemäß Satz 2.10 erzeugt. Falls

$$f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_1 \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{E}$$

gilt, ist f bereits \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2 -messbar. Es genügt also, die Messbarkeit für eine erzeugende Menge nachzuprüfen.

Beweis. Wir definieren das Mengensystem

$$\mathfrak{U} := \{B \subseteq \Omega_2 : f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_1\}$$

und stellen fest, dass $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{U}$ nach Voraussetzung gilt.

Wir weisen nach, dass \mathfrak{U} eine σ -Algebra auf Ω_2 ist. Offenbar gilt $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathfrak{U}$, also ist (2.6a) erfüllt. Für eine beliebige Menge $B \in \mathfrak{U}$ gilt

$$f^{-1}(\Omega_2 \setminus B) = f^{-1}(\Omega_2) \setminus f^{-1}(B) = \Omega_1 \setminus f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_1,$$

also erhalten wir (2.5b) und in Kombination mit (2.6a) auch (2.5a). Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in \mathfrak{U} . Dann erhalten wir

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_i) \in \mathfrak{A}_1,$$

also (2.5c). Somit ist \mathfrak{U} eine σ -Algebra, die \mathfrak{E} enthält. Da \mathfrak{A}_2 nach Satz 2.10 die kleinste σ -Algebra mit dieser Eigenschaft ist, folgt $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{U}$, also gilt insbesondere für alle $B \in \mathfrak{A}_2$ auch $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_1$, und damit ist f \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2 -messbar. ■

3 Einführung des allgemeinen Integrals

Erinnerung 3.4 (Stetige Abbildungen) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ gegeben, und sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. f heißt stetig, falls zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und jedem $x \in \mathbb{R}^n$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ so existiert, dass

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Stetige Abbildungen lassen sich allgemeiner auch dadurch charakterisieren, dass das Urbild einer offenen Menge wieder offen ist: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge, und sei $x \in f^{-1}(U)$. Da U offen ist, muss ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so existieren, dass die Kugel um $f(x) \in U$ mit Radius ϵ ganz in U enthalten ist, dass also

$$\|f(x) - z\| < \epsilon \Rightarrow z \in U \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^m$$

gilt. Nach Definition der Stetigkeit finden wir dann ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon \Rightarrow f(y) \in U \Rightarrow y \in f^{-1}(U) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n.$$

Also liegt die Kugel um x mit Radius δ in $f^{-1}(U)$, und diese Menge muss damit offen sein.

Lemma 3.5 (Stetige Abbildungen) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, und sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung. Dann ist f auch \mathfrak{B}_n - \mathfrak{B}_m -messbar.

Beweis. Nach Lemma 3.3 genügt es, ein Mengensystem zu untersuchen, dass \mathfrak{B}_m erzeugt. Dank Satz 2.13 wissen wir, dass die offenen Mengen in \mathbb{R}^m so ein System sind, und der Erinnerung 3.4 entnehmen wir, dass die Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen wieder offene Mengen und damit in \mathfrak{B}_n enthalten sind. ■

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir sehr viele häufig verwendete Abbildungen bereits als messbar identifizieren, beispielsweise die Addition, Subtraktion und Multiplikation oder die Bildung des Maximums oder Minimums. Um aus diesen Abbildungen weitere zusammensetzen zu können, benötigen wir eine Möglichkeit, mehrere Komponenten zu kombinieren.

Definition 3.6 (Produkt- σ -Algebra) Seien \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 σ -Algebren auf Ω_1 und Ω_2 . Sei \mathfrak{A} die durch

$$\mathfrak{E} := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2\}$$

erzeugte σ -Algebra. Wir nennen \mathfrak{A} die Produkt- σ -Algebra von \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 und bezeichnen sie mit $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$.

Bemerkung 3.7 (BOREL- σ -Algebra) Da die BOREL- σ -Algebren gerade durch Quader, also durch Tensorprodukte eindimensionaler Intervalle, erzeugt werden, ist für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ die Produkt- σ -Algebra von \mathfrak{B}_n und \mathfrak{B}_m gerade \mathfrak{B}_{n+m} .

Bemerkung 3.8 (Projektionen) Die Definition der Produkt- σ -Algebra ist gerade so gewählt, dass die Projektionen

$$\begin{aligned}\pi_1 : \Omega_1 \times \Omega_2 &\rightarrow \Omega_1, & (x_1, x_2) &\mapsto x_1, \\ \pi_2 : \Omega_1 \times \Omega_2 &\rightarrow \Omega_2, & (x_1, x_2) &\mapsto x_2,\end{aligned}$$

messbar sind: Für $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ gilt $\pi_1^{-1}(A_1) = A_1 \times \Omega_2$, für $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ entsprechend $\pi_2^{-1}(A_2) = \Omega_1 \times A_2$, und Schnitte dieser Urbilder ergeben die erzeugende Menge \mathfrak{E} . Die Produkt- σ -Algebra ist also die kleinste σ -Algebra, bezüglich der π_1 und π_2 messbar sind.

Lemma 3.9 (Messbare Komponenten) Seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ und \mathfrak{A} σ -Algebren auf Mengen Ω_1, Ω_2 und Ω . Seien $f_1 : \Omega \rightarrow \Omega_1$ und $f_2 : \Omega \rightarrow \Omega_2$ Abbildungen, und sei $f = (f_1, f_2) : \Omega \rightarrow \Omega_1 \times \Omega_2$.

f ist genau dann \mathfrak{A} - $(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$ -messbar, wenn f_1 \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1 - und f_2 \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_2 -messbar sind.

Beweis. Sei f messbar, und seien $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ sowie $A_2 \in \mathfrak{A}_2$. Dann gelten

$$f_1^{-1}(A_1) = f^{-1}(A_1 \times \Omega_2) \in \mathfrak{A}, \quad f_2^{-1}(A_2) = f^{-1}(\Omega_1 \times A_2) \in \mathfrak{A},$$

also sind f_1 und f_2 messbar.

Seien nun umgekehrt f_1 und f_2 messbar. Nach Lemma 3.3 genügt es, eine erzeugende Menge für $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ zu untersuchen. Nach Definition 3.6 bietet sich die Menge

$$\mathfrak{E} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2\}$$

an. Seien also $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ gegeben. Dann folgt

$$f^{-1}(A_1 \times A_2) = f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2) \in \mathfrak{A},$$

wobei im letzten Schritt (2.6b) benutzt wird. ■

Folgerung 3.10 (Vektorraum) Sei \mathfrak{A} eine σ -Algebra auf Ω . Die Menge der \mathfrak{A} - \mathfrak{B}_m -messbaren Abbildungen ist ein reeller Vektorraum.

Beweis. Seien $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ \mathfrak{A} - \mathfrak{B}_m -messbare Abbildungen. Dann ist nach Lemma 3.9 auch (f, g) \mathfrak{A} - \mathfrak{B}_{2m} -messbar. Die Addition $+$: $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist eine stetige Abbildung und damit nach Lemma 3.5 insbesondere \mathfrak{B}_{2m} - \mathfrak{B}_m -messbar, also ist $f + g$ nach Lemma 3.2 als Kombination beider Abbildungen \mathfrak{A} - \mathfrak{B}_m -messbar. Entsprechend können wir auch mit der Skalarmultiplikation verfahren. ■

3.3 Reellwertige messbare Abbildungen

Wir sind besonders an reellwertigen Funktionen interessiert, die für unsere Definition des Integrals eine entscheidende Rolle spielen. Die eindimensionalen BORELMengen lassen sich mit Hilfe besonders einfacher erzeugender Mengensysteme beschreiben:

3 Einführung des allgemeinen Integrals

Lemma 3.11 (Eindimensionale BORELMengen) Die Mengen

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{\geq} &:= \{[a, \infty[: a \in \mathbb{R}\}, & \mathfrak{E}_{\leq} &:= \{] - \infty, a] : a \in \mathbb{R}\}, \\ \mathfrak{E}_{>} &:= \{]a, \infty[: a \in \mathbb{R}\}, & \mathfrak{E}_{<} &:= \{] - \infty, a[: a \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

erzeugen die eindimensionale BOREL- σ -Algebra \mathfrak{B}_1 .

Beweis. Wir untersuchen zunächst \mathfrak{E}_{\geq} . Sei $a \in \mathbb{R}$. Nach Definition 2.11 gilt

$$[a, \infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + n - 1, a + n[\in \mathfrak{B}_1,$$

denn es ist eine abzählbare Vereinigung der Mengen $[a + n - 1, a + n[\in \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{B}_1$. Daraus folgt $\mathfrak{E}_{\geq} \subseteq \mathfrak{B}_1$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt

$$[a, b[= [a, \infty[\setminus [b, \infty[$$

also muss die von \mathfrak{E}_{\geq} erzeugte σ -Algebra auch $[a, b[$ enthalten, und damit die gesamte Menge \mathfrak{F}_1 , die die BOREL- σ -Algebra \mathfrak{B}_1 erzeugt. Also ist \mathfrak{E}_{\geq} eine erzeugende Menge für \mathfrak{B}_1 .

Als nächstes widmen wir uns $\mathfrak{E}_{>}$. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$]a, \infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + 1/n, \infty[$$

also ist $\mathfrak{E}_{>}$ nach (2.5c) Teilmenge der durch \mathfrak{E}_{\geq} erzeugten σ -Algebra \mathfrak{B}_1 . Umgekehrt gilt

$$[a, \infty[= \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]a - 1/n, \infty[$$

also ist \mathfrak{E}_{\geq} nach (2.6b) Teilmenge der durch $\mathfrak{E}_{>}$ erzeugten σ -Algebra, und damit auch \mathfrak{B}_1 . Damit ist gezeigt, dass auch $\mathfrak{E}_{>}$ eine erzeugende Menge für die BOREL- σ -Algebra \mathfrak{B}_1 ist.

Die restlichen Aussagen folgen, indem wir (2.5b) ausnutzen: Es gelten

$$] - \infty, a] = \mathbb{R} \setminus]a, \infty[, \quad] - \infty, a[= \mathbb{R} \setminus [a, \infty[\quad \text{für alle } a \in \mathbb{R},$$

also erzeugen \mathfrak{E}_{\leq} und $\mathfrak{E}_{<}$ ebenfalls die BOREL- σ -Algebra. ■

Im Folgenden widmen wir uns Funktionen, die in die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen abbilden. Dabei gehen wir, sofern nicht anders erwähnt, davon aus, dass \mathbb{R} mit der BORELSchen σ -Algebra \mathfrak{B}_1 versehen ist und bezeichnen \mathfrak{A} - \mathfrak{B}_1 -messbare Abbildungen kurz als \mathfrak{A} -messbar.

Erinnerung 3.12 (Infimum und Supremum) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} . Eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ heißt Infimum der Folge, falls sie ihre größte untere Schranke ist, falls also für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $m \in \mathbb{N}$ so existiert, dass

$$x_m \leq y + \epsilon, \quad y \leq x_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

3.3 Reellwertige messbare Abbildungen

gelten. Entsprechend heißt eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ Supremum der Folge, falls sie ihre kleinste obere Schranke ist, falls also für alle $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $m \in \mathbb{N}$ so existiert, dass

$$x_m \geq z - \epsilon, \quad z \geq x_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gelten.

Lemma 3.13 (Infimum messbar) Sei \mathfrak{A} eine σ -Algebra auf Ω . Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von \mathfrak{A} -messbaren Abbildungen, und sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Abbildung. Falls

$$f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

gilt, ist f eine \mathfrak{A} -messbare Abbildung, die wir das punktweise Infimum der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nennen und mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ bezeichnen.

Beweis. Nach Lemma 3.3 genügt es, die Urbilder eines erzeugenden Mengensystems zu untersuchen. Wir berufen uns auf Lemma 3.11: Für ein $a \in \mathbb{R}$ untersuchen wir

$$f^{-1}([a, \infty[) = \{x \in \Omega : f(x) \geq a\} = \{x \in \Omega : \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \geq a\}.$$

Für ein $x \in \Omega$ gilt $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \geq a$ genau dann, wenn $f_n(x) \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, also erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{-1}([a, \infty[) &= \{x \in \Omega : \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \geq a\} = \{x \in \Omega : f_n(x) \geq a \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{x \in \Omega : x \in f_n^{-1}([a, \infty[) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([a, \infty[). \end{aligned}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n nach Voraussetzung messbar, also muss $f_n^{-1}([a, \infty[) \in \mathfrak{A}$ gelten. Mit (2.6b) folgt

$$f^{-1}([a, \infty[) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([a, \infty[) \in \mathfrak{A},$$

also ist f nach Lemma 3.3 messbar. ■

Bemerkung 3.14 (Supremum messbar) Sei \mathfrak{A} eine σ -Algebra, und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge \mathfrak{A} -messbarer Abbildungen. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Abbildung. Falls

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

gilt, ist f eine \mathfrak{A} -messbare Abbildung, die wir das punktweise Supremum der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nennen und mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ bezeichnen.

Diese Aussage lässt sich mit Hilfe der Gleichung

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = - \inf_{n \in \mathbb{N}} (-f_n)$$

auf Lemma 3.13 zurückführen.

3 Einführung des allgemeinen Integrals

Erinnerung 3.15 (Grenzwerte) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Dann wird

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq m}} x_n$$

der Limes inferior der Folge genannt, während

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq m}} x_n$$

als ihr Limes superior bezeichnet wird. Falls beide übereinstimmen, konvergiert die Folge gegen den mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$

bezeichneten Grenzwert.

Satz 3.16 (Grenzwerte messbar) Sei \mathfrak{A} eine σ -Algebra auf Ω , und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge \mathfrak{A} -messbarer Abbildungen. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Abbildung. Falls

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

gilt, ist f \mathfrak{A} -messbar und wird punktweiser Limes inferior der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genannt und mit $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ bezeichnet. Falls

$$f(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega$$

gilt, ist f \mathfrak{A} -messbar und wird punktweiser Limes superior der Folge genannt und mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ bezeichnet.

Falls die Abbildung f punktweiser Limes inferior und superior der Folge ist, nennen wir sie ihren punktweisen Grenzwert und bezeichnen sie mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt jeweils, dass sich Lemma 3.13 beziehungsweise Bemerkung 3.14 anwenden lassen. ■

3.4 Treppenfunktionen

Messbare Funktionen besitzen bereits viele der Eigenschaften, die wir von einer Menge integrierbarer Funktionen erwarten: Sie bilden mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation einen Vektorraum, und punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen sind wieder messbar. Unsere Aufgabe besteht nun darin, einen Teilraum dieses Raums zu identifizieren, auf dem sich ein Integral sinnvoll definieren lässt. Dabei gehen wir analog zu der Definition des LEBESGUE-Maßes vor: Wir definieren zunächst ein Integral für sehr einfache Funktionen, nämlich die *Indikatorfunktionen* messbarer Mengen. Dann gehen wir zu dem von ihnen aufgespannten Teilraum über, dem Raum der *Treppenfunktionen*. Anschließend suchen wir nach einer sinnvollen Fortsetzung auf einen möglichst großen Raum.

Voraussetzung 3.17 (\mathfrak{A} und μ) Wir gehen im Folgenden davon aus, dass eine σ -Algebra \mathfrak{A} auf einer Menge Ω und ein Maß μ auf \mathfrak{A} gegeben sind.

Definition 3.18 (Indikatorfunktion) Sei $A \in \mathfrak{A}$ eine Menge. Die Funktion

$$\mathbf{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

nennen wir die Indikatorfunktion oder charakteristische Funktion der Menge A . Es lässt sich leicht nachprüfen, dass sie \mathfrak{A} -messbar ist.

Definition 3.19 (Partition) Seien $A \in \mathfrak{A}$ und $n \in \mathbb{N}$. Ein Tupel $(A_n)_{n=1}^k$ von Elementen von \mathfrak{A} nennen wir messbare Partition von A , falls

$$A = \bigcup_{n=1}^k A_n, \quad (3.1a)$$

$$\emptyset = A_n \cap A_m \quad \text{für alle } n, m \in \{1, \dots, k\} \text{ mit } n \neq m \quad (3.1b)$$

gelten, falls es sich also um eine disjunkte Überdeckung handelt.

Definition 3.20 (Treppenfunktion) Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$, eine messbare Partition $(A_n)_{n=1}^k$ von A und Koeffizienten $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{R}$ so existieren, dass

$$f = \sum_{n=1}^k f_n \mathbf{1}_{A_n} \quad (3.2)$$

gilt, nennen wir f eine μ -Treppenfunktion¹ (oder kurz Treppenfunktion).

Die Menge aller μ -Treppenfunktionen auf Ω bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$. Sie ist offenbar ein reeller Vektorraum. Eine Darstellung der Form (3.2) nennen wir kanonische Darstellung der Treppenfunktion f .

Da sich das Urbild einer beliebigen Menge unter einer Treppenfunktion als endliche Vereinigung der Mengen $(A_n)_{n=1}^k$ der Darstellung (3.2) ergibt, ist jede Treppenfunktion messbar. Also ist nach Satz 3.16 auch der Grenzwert von Treppenfunktionen wieder messbar.

Definition 3.21 (μ -messbare Funktionen) Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$ existiert, die punktweise gegen f konvergiert, nennen wir f μ -messbar. Offenbar bilden die μ -messbaren Funktionen einen reellen Vektorraum, den wir mit $\mathcal{M}(\Omega, \mu)$ bezeichnen.

¹engl. step function

3 Einführung des allgemeinen Integrals

Aus Satz 3.16 folgt, dass jede μ -messbare Funktion auch messbar sein muss. Da die Messbarkeit einer Funktion einfacher nachzuweisen ist als die μ -Messbarkeit, sind wir an einer Umkehrung dieser Aussage interessiert.

Erinnerung 3.22 (σ -endliche Prämaße) Ein Prämaß μ auf einem Mengenring \mathfrak{A} auf Ω heißt σ -endlich (vgl. Definition 2.33), falls eine Folge $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{A} mit

$$\begin{aligned} \mu(\Omega_n) < \infty & \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \\ \Omega & \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n \end{aligned}$$

existiert, falls sich also die gesamte Menge Ω durch Mengen endlichen Prämaßes ausschöpfen lässt.

Dank (2.12) wird für die durch

$$\widehat{\Omega}_n := \bigcup_{m=1}^n \Omega_m \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge $(\widehat{\Omega}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{A} ebenfalls

$$\mu(\widehat{\Omega}_n) \leq \sum_{m=1}^n \mu(\Omega_m) < \infty \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \quad (3.3a)$$

$$\Omega \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\Omega}_n \quad (3.3b)$$

gelten, also können wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf monoton wachsende Folgen beschränken.

Nach Folgerung 2.37 ist insbesondere das LEBESGUE-Maß λ_d σ -endlich.

Satz 3.23 (μ -Messbarkeit) Falls μ σ -endlich ist, ist eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann \mathfrak{A} -messbar, wenn sie μ -messbar ist.

Beweis. Sei μ σ -endlich, und sei eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

Falls f μ -messbar ist, ist sie punktwiser Grenzwert von Treppenfunktionen aus $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$. Diese Treppenfunktionen sind \mathfrak{A} -messbar, also muss nach Satz 3.16 auch ihr punktwiser Grenzwert \mathfrak{A} -messbar sein.

Sei nun f \mathfrak{A} -messbar. Um nachzuweisen, dass f auch μ -messbar ist, müssen wir eine Folge von Treppenfunktionen konstruieren, die punktwise gegen die Funktion konvergiert. Dazu verwenden wir den bereits in Abbildung 3.1 angedeuteten Ansatz: Für ein $n \in \mathbb{N}$ zerlegen wir den Wertebereich der Funktion in Streifen der Breite 2^{-n} und ersetzen sie auf diesen Streifen durch eine obere Schranke. Da sowohl Werte- als auch Definitionsbereich unbeschränkt sein können, schöpfen wir den Wertebereich durch die monoton wachsende Folge $[-n, n]$ von Teilmengen aus, während wir uns im Definitionsbereich die σ -Endlichkeit zunutze machen.

3.5 Integration von Treppenfunktionen

Sei also eine monoton wachsende Folge $(\widehat{\Omega}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften (3.3) fixiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\begin{aligned} A_{n,m} &:= \widehat{\Omega}_n \cap f^{-1}([(m-1)2^{-n}, m2^{-n}[), \\ f_{n,m} &:= m2^{-n} \quad \text{für alle } m \in \{1 - n2^n, \dots, n2^n\}. \end{aligned}$$

Da die Mengen $[(m-1)2^{-n}, m2^{-n}[$ paarweise disjunkt sind, sind es auch ihre Urbilder, also auch die Mengen $A_{n,m}$. Da f \mathfrak{A} -messbar ist, gilt $A_{n,m} \in \mathfrak{A}$ für alle $m \in \{(1-n)2^n, \dots, n2^n\}$, und aus (3.3a) folgt

$$\mu(A_n) \leq \mu(\widehat{\Omega}_n) < \infty, \quad A_n := \bigcup_{m=1-n2^n}^{n2^n} A_{n,m}.$$

Also ist

$$f_n := \sum_{m=1-n2^n}^{n2^n} f_{n,m} \mathbf{1}_{A_{n,m}}$$

eine Treppenfunktion in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$. Unsere Aufgabe besteht darin, nachzuweisen, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert.

Sei dazu ein $x \in \Omega$ gewählt. Nach (3.3b) und dank der Endlichkeit von $f(x)$ finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$x \in \widehat{\Omega}_n, \quad f(x) \in [-n, n[\quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ existiert dann ein $m \in \{1 - n2^n, \dots, n2^n\}$ mit $f(x) \in [(m-1)2^{-n}, m2^{-n}[$, also $x \in A_{n,m}$, und wir erhalten

$$f_n(x) - f(x) = f_{n,m} - f(x) = m2^{-n} - f(x) \leq m2^{-n} - (m-1)2^{-n} = 2^{-n},$$

also folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Damit ist f der punktweise Grenzwert von Treppenfunktionen, also μ -messbar. ■

3.5 Integration von Treppenfunktionen

Wir erwarten, dass das zu definierende ein Integral linear von seinem Integranden abhängt, also liegt auf der Hand, wie das Integral einer Treppenfunktion zu definieren ist. Ähnlich wie bei der Konstruktion des JORDAN-Inhalts in Satz 2.19 müssen wir dabei allerdings sicherstellen, dass das Integral von der konkreten Wahl der Darstellung unabhängig ist.

Lemma 3.24 (Kombinierte Partition) *Seien $(A_n)_{n=1}^k$ und $(B_m)_{m=1}^\ell$ Partitionen von Ω . Die durch*

$$C_{nm} := A_n \cap B_m \quad \text{für alle } n \in \{1, \dots, k\}, m \in \{1, \dots, \ell\}$$

3 Einführung des allgemeinen Integrals

definierten Mengen bilden eine Partition $(C_{nm})_{n,m=1}^{k,\ell}$. Außerdem gelten

$$A_n = \bigcup_{m=1}^{\ell} C_{nm} \quad \text{für alle } n \in \{1, \dots, k\}, \quad (3.4a)$$

$$B_m = \bigcup_{n=1}^k C_{nm} \quad \text{für alle } m \in \{1, \dots, \ell\}. \quad (3.4b)$$

Beweis. Sei $x \in \Omega$. Dann existieren ein $n \in \{1, \dots, k\}$ mit $x \in A_n$ und ein $m \in \{1, \dots, \ell\}$ mit $x \in B_m$, also folgt $x \in C_{nm}$ und damit

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^k \bigcup_{m=1}^{\ell} C_{nm}.$$

Dass die Mengen C_{nm} paarweise disjunkt sind, beweisen wir per Kontraposition. Seien dazu $n_1, n_2 \in \{1, \dots, k\}$ und $m_1, m_2 \in \{1, \dots, \ell\}$ mit $C_{n_1 m_1} \cap C_{n_2 m_2} \neq \emptyset$ gegeben. Aus der Definition folgt

$$\emptyset \neq C_{n_1 m_1} \cap C_{n_2 m_2} = (A_{n_1} \cap B_{m_1}) \cap (A_{n_2} \cap B_{m_2}) = (A_{n_1} \cap A_{n_2}) \cap (B_{m_1} \cap B_{m_2}),$$

also müssen $A_{n_1} \cap A_{n_2} \neq \emptyset$ und $B_{m_1} \cap B_{m_2} \neq \emptyset$ gelten, und damit $n_1 = n_2$ und $m_1 = m_2$. Also ist $(C_{nm})_{n,m=1}^{k,\ell}$ eine Partition.

Sei $n \in \{1, \dots, k\}$. Für jedes $x \in A_n \subseteq \Omega$ muss ein $m \in \{1, \dots, \ell\}$ so existieren, dass $x \in B_m$ gilt, also folgt $x \in C_{nm}$. Also ist

$$A_n \subseteq \bigcup_{m=1}^{\ell} C_{nm} \subseteq A_n,$$

und wir haben (3.4a) bewiesen. Mit der Gleichung (3.4b) können wir entsprechend verfahren. ■

Satz 3.25 (Eindeutigkeit) Sei $f \in \mathcal{S}(\Omega, \mu)$, und seien kanonische Darstellungen

$$f = \sum_{n=1}^k f_n \mathbf{1}_{A_n}, \quad f = \sum_{m=1}^{\ell} g_m \mathbf{1}_{B_m}$$

mit $k, \ell \in \mathbb{N}$, Familien $(f_n)_{n=1}^k$ und $(g_m)_{m=1}^{\ell}$ in \mathbb{R} und Partitionen $(A_n)_{n=1}^k$ und $(B_m)_{m=1}^{\ell}$ in \mathfrak{A} gegeben. Dann gilt auch

$$\sum_{n=1}^k f_n \mu(A_n) = \sum_{m=1}^{\ell} g_m \mu(B_m).$$

3.5 Integration von Treppenfunktionen

Beweis. Sei $(C_{nm})_{n,m=1}^{k,\ell}$ die in Lemma 3.24 definierte Partition. Aus (2.10b) sowie (3.4a) und (3.4b) folgen

$$\begin{aligned}\mu(A_n) &= \sum_{m=1}^{\ell} \mu(C_{nm}) && \text{für alle } n \in \{1, \dots, k\}, \\ \mu(B_m) &= \sum_{n=1}^k \mu(C_{nm}) && \text{für alle } m \in \{1, \dots, \ell\}.\end{aligned}$$

Falls $\mu(C_{nm}) \neq 0$ für $n \in \{1, \dots, k\}$ und $m \in \{1, \dots, \ell\}$ gilt, impliziert (2.10a) insbesondere $C_{nm} \neq \emptyset$. Also können wir ein $x \in C_{nm} = A_n \cap B_m$ fixieren und

$$f_n = \sum_{j=1}^k f_j \mathbf{1}_{A_j}(x) = f(x) = \sum_{\ell=1}^m g_\ell \mathbf{1}_{B_\ell}(x) = g_m$$

folgern. Daraus ergibt sich

$$\sum_{n=1}^k f_n \mu(A_n) = \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^{\ell} f_n \mu(C_{nm}) = \sum_{m=1}^{\ell} \sum_{n=1}^k g_m \mu(C_{nm}) = \sum_{m=1}^{\ell} g_m \mu(B_m),$$

also die zu zeigende Gleichung. ■

Definition 3.26 (Integral einer Treppenfunktion) Sei $f \in \mathcal{S}(\Omega, \mu)$ eine Treppenfunktion, und sei eine kanonische Darstellung

$$f = \sum_{n=1}^k f_n \mathbf{1}_{A_n}$$

mit $k \in \mathbb{N}$, einer Familie $(f_n)_{n=1}^k$ in \mathbb{R} und einer Partition $(A_n)_{n=1}^k$ in \mathfrak{A} gewählt. Dann bezeichnen wir

$$\int f d\mu := \sum_{n=1}^k f_n \mu(A_n)$$

als das LEBESGUE-Integral der Funktion f . Nach Satz 3.25 ist es von der Wahl von k , f_1, \dots, f_k und A_1, \dots, A_k unabhängig, also wohldefiniert.

Nach Definition 3.20 existiert ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $f|_{\Omega \setminus A} = 0$, also folgt für $n \in \{1, \dots, k\}$ aus $f_n \neq 0$ bereits $A_n \subseteq A$, also ist das Integral dank (2.14) auch ein endlicher Wert.

Lemma 3.27 (Rechenregeln) Seien $f, g \in \mathcal{S}(\Omega, \mu)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$\int f + \alpha g d\mu = \int f d\mu + \alpha \int f d\mu, \tag{3.5a}$$

$$f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu, \tag{3.5b}$$

3 Einführung des allgemeinen Integrals

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu, \quad (3.5c)$$

das Integral ist also eine lineare und monotone Abbildung. (3.5c) kann als eine Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung von Summen auf Integrale interpretiert werden.

Beweis. Nach Definition 3.20 finden wir $k, \ell \in \mathbb{N}$ und Familien $(f_n)_{n=1}^k$ und $(g_m)_{m=1}^\ell$ in \mathbb{R} sowie Partitionen $(A_n)_{n=1}^k$ und $(B_m)_{m=1}^\ell$ in \mathfrak{A} , die

$$f = \sum_{n=1}^k f_n \mathbf{1}_{A_n}, \quad g = \sum_{m=1}^\ell g_m \mathbf{1}_{B_m}$$

erfüllen. Dank Lemma 3.24 ist auch $(C_{nm})_{n,m=1}^{k,\ell}$ mit

$$C_{nm} = A_n \cap B_m \quad \text{für alle } n \in \{1, \dots, k\}, m \in \{1, \dots, \ell\}$$

eine Partition, für die

$$f = \sum_{n=1}^k f_n \sum_{m=1}^\ell \mathbf{1}_{C_{nm}}, \quad g = \sum_{m=1}^\ell g_m \sum_{n=1}^k \mathbf{1}_{C_{nm}}$$

gelten. Damit steht uns mit

$$f + \alpha g = \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^\ell f_n \mathbf{1}_{C_{nm}} + \alpha \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^\ell g_m \mathbf{1}_{C_{nm}} = \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^\ell (f_n + \alpha g_m) \mathbf{1}_{C_{nm}}$$

auch eine kanonische Darstellung der Linearkombination $f + \alpha g$ zur Verfügung, und wir erhalten nach Definition

$$\begin{aligned} \int f + \alpha g d\mu &= \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^\ell (f_n + \alpha g_m) \mu(C_{nm}) = \sum_{n=1}^k f_n \sum_{m=1}^\ell \mu(C_{nm}) + \alpha \sum_{m=1}^\ell g_m \sum_{n=1}^k \mu(C_{nm}) \\ &= \int f d\mu + \alpha \int g d\mu. \end{aligned}$$

Damit ist (3.5a) bewiesen.

Gelte nun $f \leq g$. Falls $\mu(C_{nm}) \neq 0$ für $n \in \{1, \dots, k\}$ und $m \in \{1, \dots, \ell\}$ gelten sollte, muss nach (2.10a) auch $C_{nm} \neq \emptyset$ gelten, also können wir ein $x \in C_{nm}$ wählen und

$$f_n = f_n \mathbf{1}_{A_n}(x) = \sum_{j=1}^k f_j \mathbf{1}_{A_j}(x) = f(x) \leq g(x) = \sum_{j=1}^\ell g_j \mathbf{1}_{B_j}(x) = g_m \mathbf{1}_{B_m}(x) = g_m$$

folgern. Damit erhalten wir

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^\ell f_n \mu(C_{nm}) \leq \sum_{n=1}^k \sum_{m=1}^\ell g_m \mu(C_{nm}) = \int g d\mu$$

und haben (3.5b) bewiesen.

Offenbar gilt

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

also folgt mit (3.5b) auch

$$-\int |f| d\mu \leq \int f d\mu \leq \int |f| d\mu$$

und somit (3.5c). ■

3.6 LEBESGUE-Integrale

Die Konstruktion von Maßen aus Prämaßen in Abschnitt 2.5 beruht auf der Idee, eine allgemeine Menge durch endliche Vereinigungen von „einfachen“ Mengen anzunähern. Das so definierte äußere Maß erweist sich dann als Maß auf einer geeignet konstruierten σ -Algebra.

Bei der Definition des LEBESGUE-Integrals gehen wir ähnlich vor: Wir wissen bereits, wie das Integral für „einfache“ Funktionen, nämlich die Treppenfunktionen, zu definieren ist, also liegt es nahe, das Integral für allgemeinere Funktionen zu definieren, indem man sie durch Treppenfunktionen annähert.

Es stellt sich die Frage, in welchem Sinn wir „Annäherung durch Treppenfunktionen“ verstehen wollen. Gleichmäßige Konvergenz zu fordern würde beispielsweise viele wichtige Anwendungen, etwa bei der Integration unbeschränkter Funktionen, ausschließen. Attraktiv wäre ein Konvergenzbegriff, der sicher stellt, dass der resultierende Raum der LEBESGUE-integrierbaren Funktionen ein *vollständiger* Raum ist.

Erinnerung 3.28 (Halbnorm) Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum, und sei $f : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Abbildung. Falls sie

$$f(0) = 0, \tag{3.6a}$$

$$f(\alpha v) = |\alpha|f(v) \quad \text{für alle } v \in V \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}, \tag{3.6b}$$

$$f(v+w) \leq f(v) + f(w) \quad \text{für alle } v, w \in V \tag{3.6c}$$

erfüllt, bezeichnen wir als Halbnorm und notieren sie häufig als $|v| = f(v)$.

Erinnerung 3.29 (CAUCHY-Folgen und Vollständigkeit) Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Halbnorm auf V . Eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt CAUCHY-Folge, (bezüglich dieser Halbnorm) falls für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}_{> 0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|v_n - v_m| \leq \epsilon \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$$

existiert. Der Raum V heißt vollständig (bezüglich dieser Halbnorm), falls für jede CAUCHY-Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $v \in V$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |v - v_n| = 0$$

3 Einführung des allgemeinen Integrals

existiert, falls also jede CAUCHY-Folge in der Halbnorm gegen einen Grenzwert in V konvergiert.

Für unsere Zwecke bietet es sich an, eine Halbnorm zu definieren, die mit unserem Integralbegriff verträglich ist:

Definition 3.30 (L^1 -Halbnorm) Wir definieren eine Abbildung $|\cdot|_{L^1} : \mathcal{S}(\Omega, \mu) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$|f|_{L^1} := \int |f| d\mu \quad \text{für alle } f \in \mathcal{S}(\Omega, \mu).$$

Diese Abbildung nennen wir die L^1 -Halbnorm auf $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$.

Bemerkung 3.31 (Rechenregeln) Zunächst untersuchen wir, ob $|\cdot|_{L^1}$ tatsächlich eine Halbnorm ist. Die Eigenschaft (3.6a) ist offensichtlich erfüllt. Zum Nachweis der Homogenitätseigenschaft (3.6b) wählen wir $f \in \mathcal{S}(\Omega, \mu)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$|\alpha f(x)| = |\alpha| |f(x)| \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

also folgt mit (3.5a) auch

$$|\alpha f|_{L^1} = \int |\alpha f| d\mu = |\alpha| \int |f| d\mu = |\alpha| |f|_{L^1},$$

so dass (3.6b) bewiesen ist. Zum Nachweis der Dreiecksungleichung (3.6c) wählen wir $f, g \in \mathcal{S}(\Omega, \mu)$ und erhalten

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| = |f|(x) + |g|(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Mit (3.5b) und (3.5a) folgt daraus

$$|f+g|_{L^1} = \int |f+g| d\mu \leq \int |f| + |g| d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = |f|_{L^1} + |g|_{L^1},$$

also ist auch (3.6c) bewiesen.

Bei der Arbeit mit Integralen spielen die Mengen $A \in \mathfrak{A}$ eine besondere Rolle, für die $\mu(A) = 0$ gilt. Im Allgemeinen handelt es sich dabei nicht nur um die leere Menge, beispielsweise folgt aus (2.25) die Gleichung $\lambda_d(\{x\}) = 0$ für beliebige $x \in \mathbb{R}^d$.

Definition 3.32 (Nullmengen) Eine Menge $N \in \mathfrak{A}$, für die $\mu(N) = 0$ gilt, nennen wir eine μ -Nullmenge.

Man sagt, dass eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Eigenschaft μ -fast überall besitzt, falls eine Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ so existiert, dass die Eigenschaft für alle $x \in \Omega \setminus N$ erfüllt ist.

Wir sagen beispielsweise, dass eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen μ -fast überall punktweise gegen eine Funktion f konvergiert, falls eine Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ so existiert, dass $f_n(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus N$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Die Konstruktion des Raums der integrierbaren Funktionen beruht auf punktweisen Grenzwerten von CAUCHY-Folgen von Treppenfunktionen:

Definition 3.33 (Integrierbare Funktionen) Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen f μ -integrierbar, falls eine L^1 -CAUCHY-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$ existiert, die μ -fast überall punktweise gegen f konvergiert. Die Menge alle μ -integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$.

Lemma 3.34 (Vektorraum) Die Menge $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum.

Beweis. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Nach Definition finden wir CAUCHY-Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die μ -fast überall punktweise gegen f und g konvergieren.

Für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren dann $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} |f_n - f_m|_{L^1} &\leq \epsilon && \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, \\ |g_n - g_m|_{L^1} &\leq \epsilon && \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq m_0}, \end{aligned}$$

also folgt mit (3.6c) und (3.6b) auch

$$\begin{aligned} |(f_n + \alpha g_n) - (f_m + \alpha g_m)|_{L^1} &= |(f_n - f_m) + \alpha(g_n - g_m)|_{L^1} \\ &\leq |f_n - f_m|_{L^1} + |\alpha| |g_n - g_m|_{L^1} \leq (1 + |\alpha|)\epsilon \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq k_0} \end{aligned}$$

mit $k_0 := \max\{n_0, m_0\}$, also ist $(f_n + \alpha g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge.

Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μ -fast überall punktweise gegen f und g konvergieren, existieren μ -Nullmengen N_f und N_g mit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= f(x) && \text{für alle } x \in \Omega \setminus N_f, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) &= g(x) && \text{für alle } x \in \Omega \setminus N_g, \end{aligned}$$

also folgt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + \alpha g_n)(x) = (f + \alpha g)(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \setminus N$$

mit $N := N_f \cup N_g$. Aus (2.12) folgt $\mu(N) \leq \mu(N_f) + \mu(N_g) = 0$, also ist $(f_n + \alpha g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$, die μ -fast überall gegen $f + \alpha g$ konvergiert. Aus unserer Definition folgt $f + \alpha g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. ■

Natürlich wollen wir auf dem Raum der integrierbaren Funktionen auch ein Integral zur Verfügung haben. Da nach Definition jede Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ Grenzwert von Treppenfunktionen ist, deren Integrale wir bereits kennen, bietet es sich an, den Grenzwert dieser Integrale zu verwenden. Da f Grenzwert verschiedener Folgen von Treppenfunktionen sein kann, müssen wir nachweisen, dass das so definierte Integral von der Wahl der Folge unabhängig ist. Zu diesem Zweck ist es nützlich, die Konvergenz in der L^1 -Halbnorm zu der punktweisen Konvergenz und der gleichmäßigen Konvergenz in Bezug setzen zu können.

3 Einführung des allgemeinen Integrals

Erinnerung 3.35 (Gleichmäßige Konvergenz) Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, falls für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so existiert, dass

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, x \in \Omega$$

gilt. Die gleichmäßige Konvergenz lässt sich mit Hilfe der Supremumsnorm

$$\|g\|_\infty := \sup\{|g(x)| : x \in \Omega\} \quad \text{für alle beschränkten Funktionen } g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

in der Form

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

schreiben. Sie impliziert die punktweise Konvergenz, ist in der Regel aber eine wesentlich stärkere Forderung.

Lemma 3.36 (L^1 -CAUCHY-Folgen) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -CAUCHY-Folge in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$. Dann existiert eine Teilfolge, die μ -fast überall punktweise konvergiert. Für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert außerdem eine Menge $Z \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(Z) < \epsilon$ so, dass diese Teilfolge auf $\Omega \setminus Z$ gleichmäßig konvergiert.

Beweis. (vgl. [5, Lemma VI.3.1]) Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge ist, können wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ so fixieren, dass

$$|f_n - f_m|_{L^1} \leq 4^{-k} \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_k}$$

gilt. Wir setzen

$$m_k := \begin{cases} n_1 & \text{falls } k = 1, \\ \max\{n_k, m_{k-1} + 1\} & \text{ansonsten} \end{cases} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Damit ist $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge. Wir untersuchen die durch

$$g_k := f_{m_k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

definierte Teilfolge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nach Konstruktion gilt

$$|g_n - g_k|_{L^1} \leq 4^{-k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq k}. \quad (3.7)$$

Wir stellen g_k durch Teleskopsummen dar

$$g_k = g_1 + \sum_{n=1}^{k-1} (g_{n+1} - g_n) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und werden nachweisen, dass die rechte Seite dieser Gleichung die gewünschten Konvergenzeigenschaften besitzt.

Sei $k \in \mathbb{N}$. Da g_{k+1} und g_k Treppenfunktionen sind, ist auch $g_{k+1} - g_k$ eine Treppenfunktion, und damit insbesondere \mathfrak{A} -messbar. Also ist die Menge

$$Y_k := \{x \in \Omega : |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \geq 2^{-k}\} = (g_{k+1} - g_k)^{-1}([-\infty, -2^{-k}[\cup]2^{-k}, \infty[)$$

in der σ -Algebra \mathfrak{A} enthalten, und es gilt $|g_{k+1}(x) - g_k(x)| \leq 2^{-k}$ für alle $x \in \Omega \setminus Y_k$.

Aus (3.7) und (3.5b) folgt

$$\begin{aligned} \mu(Y_k) &= \int \mathbf{1}_{Y_k} d\mu \leq \int 2^k |g_{k+1} - g_k| \mathbf{1}_{Y_k} d\mu \\ &\leq 2^k \int |g_{k+1} - g_k| d\mu = 2^k \|g_{k+1} - g_k\|_{L^1} \leq 2^{-k}. \end{aligned}$$

Wir definieren die Mengen

$$Z_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} Y_n \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und stellen fest, dass nach (2.20)

$$\mu(Z_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(Y_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2^{1-k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

gilt. Seien nun $k \in \mathbb{N}$ und ein $x \in \Omega \setminus Z_k$ gegeben. Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq k}$ gilt dann $x \in \Omega \setminus Y_n$, also

$$\sum_{n=j}^{\infty} |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq \sum_{n=j}^{\infty} 2^{-n} \leq 2^{-j} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2^{1-j} \leq 2^{1-k} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_{\geq k}. \quad (3.8)$$

Damit existiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_{n+1}(x) - g_n(x)|,$$

also auch

$$g(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x) = g_1(x) + \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{j-1} (g_{n+1}(x) - g_n(x)) = g_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (g_{n+1}(x) - g_n(x)).$$

Aus dieser Definition und (3.8) folgt

$$\begin{aligned} |g(x) - g_j(x)| &= \left| g_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (g_{n+1}(x) - g_n(x)) - g_1(x) - \sum_{n=1}^{j-1} (g_{n+1}(x) - g_n(x)) \right| \\ &\leq \sum_{n=j}^{\infty} |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq 2^{1-j} \quad \text{für alle } x \in \Omega \setminus Z_k, j \in \mathbb{N}_{\geq k}, \end{aligned}$$

3 Einführung des allgemeinen Integrals

also konvergiert die Folge $(g_j|_{\Omega \setminus Z_k})_{j \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $g|_{\Omega \setminus Z_k}$.

Wir setzen $N := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Z_k$ und stellen fest, dass aus (2.14) bereits $\mu(N) \leq \mu(Z_k) \leq 2^{1-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt, also $\mu(N) = 0$. Für jedes $x \in \Omega \setminus N$ findet sich ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in \Omega \setminus Z_k$, und wir haben bereits gesehen, dass dann $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$ gilt, also konvergiert $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ außerhalb der Nullmenge N gegen

$$g(x) := \begin{cases} \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x) & \text{falls } x \in \Omega \setminus N, \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ finden wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit $2^{1-k} < \epsilon$. Wir setzen $Z := Z_k$ und haben bereits gezeigt, dass $\mu(Z) \leq 2^{1-k}$ gilt und die Folge $(g_n|_{\Omega \setminus Z})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $g|_{\Omega \setminus Z}$ konvergiert. ■

Mit diesem Ergebnis können wir direkt eine nützliche Eigenschaft integrierbarer Funktionen folgern:

Lemma 3.37 (Fast messbar) *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Dann existiert eine μ -Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ so, dass $\hat{f} := \mathbf{1}_{\Omega \setminus N} f$ μ -messbar ist. Offenbar sind f und \hat{f} μ -fast überall identisch.*

Beweis. Nach Definition existiert eine L^1 -CAUCHY-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$, die μ -fast überall punktweise gegen f konvergiert. Also existiert eine μ -Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ so, dass \hat{f} der punktweise Grenzwert der Folge $(\mathbf{1}_{\Omega \setminus N} f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbf{1}_{\Omega \setminus N} f_n \in \mathcal{S}(\Omega, \mu)$, also ist \hat{f} punktweiser Grenzwert einer Folge in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$ und damit nach Definition 3.21 μ -messbar und nach Satz 3.16 auch \mathfrak{A} -messbar. ■

Nun können wir nachweisen, dass die Integrale zweier CAUCHY-Folgen integrierbarer Treppenfunktionen, die punktweise gegen dieselbe Funktion konvergieren, denselben Grenzwert besitzen.

Satz 3.38 (Eindeutigkeit) *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei L^1 -CAUCHY-Folgen in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$, die punktweise μ -fast überall gegen f konvergieren. Dann konvergieren die Folgen*

$$\left(\int f_n d\mu \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\int g_n d\mu \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen denselben Grenzwert, es gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu.$$

Außerdem gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g_n\|_{L^1} = 0.$$

Beweis. (vgl. [5, Lemma VI.3.2]) Da \mathbb{R} vollständig ist, folgt die Konvergenz der Folgen der Integrale bereits, wenn wir zeigen können, dass es sich um CAUCHY-Folgen handelt. Für ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert, da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -CAUCHY-Folge ist, ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f_m\|_{L^1} \leq \epsilon \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}.$$

Daraus folgt mit (3.5a) und (3.5b) auch

$$\begin{aligned} \left| \int f_n d\mu - \int f_m d\mu \right| &= \left| \int f_n - f_m d\mu \right| \\ &\leq \int |f_n - f_m| d\mu = \|f_n - f_m\|_{L^1} \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}. \end{aligned}$$

Also ist die Folge der Integrale eine CAUCHY-Folge und damit konvergent. Dasselbe Argument lässt sich auf die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ anwenden.

Es bleibt zu zeigen, dass beide Grenzwerte übereinstimmen. Dazu definieren wir $h_n := f_n - g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und müssen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|_{L^1} = 0$$

beweisen, denn daraus folgt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int f_n d\mu - \int g_n d\mu \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int h_n d\mu \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int |h_n| d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|h_n\|_{L^1} = 0.$$

Wir führen den Beweis, indem wir die Folge auf drei Teilmengen untersuchen: Auf einer Menge, auf der sie wegen des endlichen Maßes des Trägers der Funktionen aus $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$ gegen null konvergiert, auf einer zweiten Menge, auf der sie dank Lemma 3.36 gleichmäßig konvergiert, und auf einer Restmenge, die wir klein genug wählen können.

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CAUCHY-Folgen sind, gilt dasselbe dank der Dreiecksungleichung (3.6c) auch für die Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Also finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\|h_n - h_m\|_{L^1} \leq \epsilon/5 \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0} \quad (3.9)$$

gilt. Da $h_{n_0} \in \mathcal{S}(\Omega, \mu)$ gilt, muss nach Definition 3.20 ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und $h_{n_0}|_{\Omega \setminus A} = 0$ existieren. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int |h_n| \mathbf{1}_{\Omega \setminus A} d\mu &= \int |h_n - h_{n_0}| \mathbf{1}_{\Omega \setminus A} d\mu \\ &\leq \int |h_n - h_{n_0}| d\mu = \|h_n - h_{n_0}\|_{L^1} \leq \epsilon/5 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, \end{aligned}$$

also haben wir die gewünschte Konvergenzaussage immerhin schon auf der Menge $\Omega \setminus A$ bewiesen.

Aus (3.5b) folgt, dass auch $(h_n \mathbf{1}_A)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$ ist, also muss nach Lemma 3.36 eine Menge $Z \in \mathfrak{A}$ mit

$$\mu(Z) \leq \frac{\epsilon/5}{1 + \|h_{n_0}\|_{\infty}} \quad (3.10)$$

so existieren, dass eine Teilfolge auf $A \setminus Z$ gleichmäßig konvergiert. Da $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen null konvergiert, muss auch diese Teilfolge gegen null konvergieren, also können wir wegen $\mu(A \setminus Z) \leq \mu(A) < \infty$ ein $m_0 \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ mit

$$\|h_{m_0} \mathbf{1}_{A \setminus Z}\|_{\infty} \leq \frac{\epsilon/5}{1 + \mu(A \setminus Z)},$$

3 Einführung des allgemeinen Integrals

finden, so dass mit (3.5b) auch

$$\begin{aligned} \int |h_{m_0}| \mathbf{1}_{A \setminus Z} d\mu &\leq \int \|h_{m_0} \mathbf{1}_{A \setminus Z}\|_\infty \mathbf{1}_{A \setminus Z} d\mu \\ &\leq \|h_{m_0} \mathbf{1}_{A \setminus Z}\|_\infty \mu(A \setminus Z) \leq \frac{\epsilon/5}{1 + \mu(A \setminus Z)} \mu(A \setminus Z) < \epsilon/5 \end{aligned}$$

gilt. Damit haben wir auch auf der Menge $A \setminus Z$ eine Abschätzung erhalten. Es fehlt noch die Menge $A \cap Z$, für die sich dank (3.5b) und (3.10) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int |h_{m_0}| \mathbf{1}_{A \cap Z} d\mu &\leq \int |h_{m_0} - h_{n_0}| \mathbf{1}_{A \cap Z} d\mu + \int |h_{n_0}| \mathbf{1}_{A \cap Z} d\mu \\ &\leq |h_{m_0} - h_{n_0}|_{L^1} + \int \|h_{n_0}\|_\infty \mathbf{1}_{A \cap Z} d\mu \\ &\leq |h_{m_0} - h_{n_0}|_{L^1} + \|h_{n_0}\|_\infty \mu(A \cap Z) \\ &\leq |h_{m_0} - h_{n_0}|_{L^1} + \|h_{n_0}\|_\infty \frac{\epsilon/5}{1 + \|h_{n_0}\|_\infty} < \epsilon/5 + \epsilon/5 = 2\epsilon/5 \end{aligned}$$

ergibt. Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned} \int |h_{m_0}| d\mu &= \int |h_{m_0}| (\mathbf{1}_{\Omega \setminus A} + \mathbf{1}_{A \setminus Z} + \mathbf{1}_{A \cap Z}) d\mu \\ &= \int |h_{m_0}| \mathbf{1}_{\Omega \setminus A} d\mu + \int |h_{m_0}| \mathbf{1}_{A \setminus Z} d\mu + \int |h_{m_0}| \mathbf{1}_{A \cap Z} d\mu \leq 4\epsilon/5. \end{aligned}$$

bewiesen. Aus $m_0 \geq n_0$ und (3.9) folgt damit auch

$$\int |h_n| d\mu = \int |h_n - h_{m_0}| d\mu + \int |h_{m_0}| d\mu \leq \epsilon/5 + 4\epsilon/5 = \epsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq m_0},$$

und damit die gewünschte Aussage. ■

Definition 3.39 (LEBESGUE-Integral) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Nach Definition existiert dann eine L^1 -CAUCHY-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$, die punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert. Wir nennen

$$\int f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

das LEBESGUE-Integral von f . Nach Satz 3.38 existiert ein von der konkreten Wahl der Folge unabhängiger Grenzwert, also ist das Integral wohldefiniert.

Lemma 3.40 (Rechenregeln) Es gelten

$$\int f + \alpha g d\mu = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu), \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.11a)$$

$$f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu), \quad (3.11b)$$

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu \quad \text{für alle } f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu), \quad (3.11c)$$

auch das allgemeine LEBESGUE-Integral ist also linear und monoton.

Beweis. Da das Integral als Grenzwert der Integrale von Treppenfunktionen definiert ist, übertragen sich die in Lemma 3.27 gezeigten Eigenschaften auf allgemeine Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$:

Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ L^1 -CAUCHY-Folgen in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$, die punktweise μ -fast überall gegen f und g konvergieren.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $(f_n + \alpha g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -CAUCHY-Folge in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$, die punktweise μ -fast überall gegen $f + \alpha g$ konvergiert, und wir erhalten mit (3.5a) die Gleichung

$$\int f + \alpha g \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n + \alpha g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu = \int f \, d\mu + \alpha \int g \, d\mu$$

also (3.11a).

Gelte nun $f \leq g$. Dann gilt auch $h := f - g \geq 0$, und mit

$$h_n := \max\{g_n - f_n, 0\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erhalten wir eine Folge in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$, die punktweise μ -fast überall gegen h konvergiert. Wir definieren

$$A_n := \{x \in \Omega : g_n(x) - f_n(x) \geq 0\} = (g_n - f_n)^{-1}([0, \infty[) \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und erhalten $h_n = (g_n - f_n)\mathbf{1}_{A_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ L^1 -CAUCHY-Folgen sind, gilt dasselbe für $(g_n - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, also können wir für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so finden, dass

$$|g_n - f_n - (g_m - f_m)|_{L^1} \leq \epsilon \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$$

gilt. Dann folgt aus (3.5b)

$$\begin{aligned} |h_n - h_m|_{L^1} &= \int |h_n - h_m| \, d\mu = \int |g_n - f_n - (g_m - f_m)| \mathbf{1}_{A_n} \, d\mu \\ &\leq \int |g_n - f_n - (g_m - f_m)| \, d\mu \\ &= |g_n - f_n - (g_m - f_m)|_{L^1} \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, \end{aligned}$$

also ist $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -CAUCHY-Folge. Da $h_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach Konstruktion gilt, folgt aus (3.5b) auch

$$\int h \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n \, d\mu \geq 0.$$

Mit der Linearität (3.11a) des Integrals erhalten wir

$$\int f \, d\mu = \int g - h \, d\mu = \int g \, d\mu - \int h \, d\mu \leq \int g \, d\mu,$$

also (3.11b). Die Ungleichung (3.11c) folgt wie im Beweis des Lemmas 3.27. \blacksquare

Da wir das Integral auf den Raum $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ fortsetzen können, bietet es sich an, auch nach einer Fortsetzung der L^1 -Halbnorm auf diesen Raum zu suchen.

3 Einführung des allgemeinen Integrals

Lemma 3.41 (L^1 -Halbnorm) Für jedes $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ ist auch $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und

$$|f|_{L^1} := \int |f| d\mu \quad \text{für alle } f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$$

definiert eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, die wir die L^1 -Halbnorm nennen.

Falls $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -CAUCHY-Folge ist, die punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert, gilt

$$|f|_{L^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|_{L^1}.$$

Beweis. (vgl. [5, Lemma 3.3]) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Nach Definition existiert eine L^1 -CAUCHY-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$, die punktweise gegen f konvergiert. Aus

$$||f_n(x)| - |f_m(x)|| \leq |f_n(x) - f_m(x)| \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}, x \in \Omega$$

folgt mit (3.5b) auch

$$\begin{aligned} ||f_n| - |f_m||_{L^1} &= \int ||f_n| - |f_m|| d\mu \\ &\leq \int |f_n - f_m| d\mu = |f_n - f_m|_{L^1} \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

und da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -CAUCHY-Folge ist, muss auch $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine sein. Letztere Folge konvergiert offenbar punktweise gegen $|f|$, also folgt per Definition $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$.

Aus der Definition des Integrals und Bemerkung 3.31 folgt, dass

$$|f|_{L^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|_{L^1}$$

in der Tat eine Halbnorm ist. ■

Lemma 3.42 (Stetige Fortsetzung) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -CAUCHY-Folge in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$, die punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f - f_n|_{L^1} = 0,$$

das Integral und die L^1 -Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ sind also die bezüglich der L^1 -Halbnorm stetigen Fortsetzung ihrer Gegenstücke auf dem Raum $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$ der Treppenfunktionen.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(f_m - f_n)_{m \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -CAUCHY-Folge in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$, die punktweise gegen $f - f_n$ konvergiert, und aus Lemma 3.41 folgt

$$|f - f_n|_{L^1} = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m - f_n|_{L^1}.$$

Sei nun $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$|f_n - f_m|_{L^1} \leq \epsilon \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$$

gilt. Dann gilt insbesondere auch

$$|f - f_n|_{L^1} = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m - f_n|_{L^1} \leq \epsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0},$$

und das ist die gewünschte Aussage. ■

Satz 3.43 (Vollständigkeit) *Der Raum $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ ist mit der L^1 -Halbnorm $|\cdot|_{L^1}$ vollständig.*

Beweis. (vgl. [5, Theorem 3.4]) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Nach Definition finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $g_n \in \mathcal{S}(\Omega, \mu)$ aus der f_n approximierenden Folge von μ -Treppenfunktionen, das

$$|f_n - g_n|_{L^1} \leq 1/n$$

erfüllt. Wir untersuchen die so konstruierte Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$. Wir fixieren ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $1/n_0 \leq \epsilon/3$ und

$$|f_n - f_m|_{L^1} \leq \epsilon/3 \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$$

gilt. Dann folgt

$$|g_n - g_m|_{L^1} \leq |g_n - f_n|_{L^1} + |f_n - f_m|_{L^1} + |g_m - f_m|_{L^1} \leq \epsilon \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}.$$

Also ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -CAUCHY-Folge in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$.

Nach Lemma 3.36 existieren dann eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Teilfolge $(g_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ der Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert. Also folgt bereits $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ per Definition.

Wir müssen zeigen, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der L^1 -Halbnorm gegen f konvergiert. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dank Lemma 3.42 gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f - g_{m_n}|_{L^1} = 0,$$

also können wir insbesondere ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} 1/n_0 &\leq \epsilon/3, \\ |f - g_{n_0}|_{L^1} &\leq \epsilon/3, \\ |g_n - g_m|_{L^1} &\leq \epsilon/3 \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0} \end{aligned}$$

finden. Für die zweite Ungleichung nutzen wir dabei aus, dass $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bereits als L^1 -CAUCHY-Folge erkannt ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} |f - f_n|_{L^1} &\leq |f - g_{n_0}|_{L^1} + |g_{n_0} - g_n|_{L^1} + |g_n - f_n|_{L^1} \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + 1/n \leq \epsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, \end{aligned}$$

und die gewünschte Konvergenzaussage ist bewiesen. ■

Notation 3.44 (Integral auf Teilmengen) *Sei $A \in \mathfrak{A}$, sei $C \supseteq A$, und sei $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir können sie durch null zu einer Abbildung*

$$\hat{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{ansonsten,} \end{cases}$$

3 Einführung des allgemeinen Integrals

fortsetzen. Falls \hat{f} μ -integrierbar ist, nennen wir f μ -integrierbar auf A und bezeichnen das Integral mit

$$\int_A f d\mu := \int \hat{f} d\mu.$$

Falls f μ -integrierbar auf $B \in \mathfrak{A}$ mit $A \subseteq B \subseteq C$ ist, folgt aus (3.11a)

$$\int_B f d\mu = \int_B f \mathbf{1}_A + f \mathbf{1}_{B \setminus A} d\mu = \int_A f d\mu + \int_{B \setminus A} f d\mu.$$

Falls $f \geq 0$ gilt, erhalten wir mit (3.11b)

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

4 Eigenschaften des Integrals

Wir haben bereits gesehen, dass das LEBESGUE-Integral vorteilhafte Eigenschaften besitzt: Das Integral kann für Abbildungen auf sehr allgemeinen Definitionsbereichen Ω definiert werden, es ist bezüglich der L^1 -Halbnorm stetig, und der Raum $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ der integrierbaren Funktionen ist vollständig.

In diesem Kapitel untersuchen wir weitere Eigenschaften, die es uns ermöglichen, das Integral praktisch einzusetzen: Zunächst interessieren wir uns dabei für Grenzwertsätze. Wir haben bereits gesehen, dass punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen wieder messbar sind, und wir untersuchen, unter welchen Bedingungen Grenzwerte integrierbarer Funktionen wieder integrierbar sind. Zentral sind in diesem Bereich die Sätze über monotone und majorisierte Konvergenz sowie das Lemma von FATOU, die es uns ermöglichen, die Integrierbarkeit von Grenzwerten von Funktionen unter relativ allgemeinen Voraussetzungen zu analysieren.

Da das LEBESGUE-Integral mit dem LEBESGUE-Maß auch auf \mathbb{R}^d definierte Funktionen behandeln kann, stellt sich die Frage, wie sich der Wert des Integrals für solche Funktionen konkret berechnen oder abschätzen lässt. Von entscheidender Bedeutung sind die Sätze von FUBINI und TONELLI, mit dem sich mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale zurückführen lassen.

Schließlich sind wir daran interessiert, zu untersuchen, wie sich Koordinatentransformationen im Definitionsbereich einer Funktion auf ihr Integral auswirken. Falls beispielsweise eine Funktion in Zylinderkoordinaten (Höhe, Radius, Winkel) beschrieben ist, liegt es nahe, auch diese Koordinaten statt der bei der Definition des LEBESGUE-Maßes verwendeten kartesischen Koordinaten (Höhe, Breite, Tiefe) einzusetzen.

4.1 Grenzwertaussagen

Zunächst benötigen wir eine Verallgemeinerung des Lemmas 3.36, die wir auch auf Folgen integrierbarer Funktionen anwenden können.

Lemma 4.1 (L^1 -Nullfolgen) *Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -Nullfolge. Dann besitzt sie eine Teilfolge, die punktweise μ -fast überall gegen null konvergiert. Für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert eine Menge $Z \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(Z) < \epsilon$ so, dass die Teilfolge auf $\Omega \setminus Z$ gleichmäßig konvergiert.*

Beweis. (vgl. [5, Theorem 5.2]) Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -Nullfolge ist, können wir für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $n_m \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_{n_m}|_{L^1} \leq 4^{-m}, \quad n_m < n_{m+1} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

4 Eigenschaften des Integrals

finden. Nach Lemma 3.37 existiert eine Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von \mathfrak{A} -messbaren Funktionen und eine Folge $N_m \in \mathfrak{A}$ von μ -Nullmengen so, dass

$$g_m|_{\Omega \setminus N_m} = f_{n_m}|_{\Omega \setminus N_m} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

gilt. Dann muss nach (2.22) auch

$$N := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} N_m$$

eine μ -Nullmenge sein. Wir können wie im Beweis des Lemmas 3.36 fortfahren: Da für alle $m \in \mathbb{N}$ die Funktion g_m \mathfrak{A} -messbar ist, gilt

$$\begin{aligned} Y_m &:= \{x \in \Omega : |g_m(x)| \geq 2^{-m}\} \\ &= g_m^{-1}([-\infty, 2^{-m}] \cup [2^{-m}, \infty]) \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sei $m \in \mathbb{N}$. Da g_m keine μ -Treppenfunktion ist, ist nicht offensichtlich, dass $\mu(Y_m) < \infty$ gilt, wir müssen diese Aussage also beweisen. Aus $g_m \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ folgt nach Definition, dass eine Familie $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$ existiert, die punktweise μ -fast überall gegen g_m konvergiert. Nach Definition 3.20 existiert dann auch eine Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathfrak{A} mit $h_k|_{\Omega \setminus A_k} = 0$ und $\mu(A_k) < \infty$, und aus der punktweisen Konvergenz folgt

$$\mu(Y_m) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mu(Y_m \cap A_k). \quad (4.2)$$

Mit Definition 3.26, (3.11b) und (4.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu(Y_m \cap A_k) &= 2^m \int 2^{-m} \mathbf{1}_{Y_m \cap A_k} d\mu \leq 2^m \int |g_m| \mathbf{1}_{Y_m \cap A_k} d\mu \leq 2^m \int |g_m| d\mu \\ &= 2^m \|g_m\|_{L^1} \leq 2^m 4^{-m} = 2^{-m} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

also haben wir dank (4.2) und (2.22) insbesondere

$$\mu(Y_m) \leq 2^{-m} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

gezeigt. Wir setzen wieder

$$Z_m := \bigcup_{j=m}^{\infty} Y_j \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

und erhalten mit (2.22) und der geometrischen Summenformel

$$\mu(Z_m) \leq \sum_{j=m}^{\infty} \mu(Y_j) \leq \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-m} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} < 2^{1-m} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$, jedes $x \in \Omega \setminus Z_m$ und jedes $j \in \mathbb{N}_{\geq m}$ gilt dann $x \in \Omega \setminus Y_j$, also nach Definition $|g_j(x)| \leq 2^{-j}$. Damit konvergiert die Folge $(\mathbf{1}_{\Omega \setminus Z_m} g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen

null, also konvergiert auch $(\mathbf{1}_{\Omega \setminus (Z_m \cup N)} f_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen null. Da wir für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\mu(Z_m) < 2^{1-m} \leq \epsilon$ finden können, ist damit bereits der zweite Teil der Behauptung bewiesen.

Die Menge

$$Z := N \cup \bigcap_{m \in \mathbb{N}} Z_m$$

erfüllt dank (2.12) und (2.14) insbesondere $\mu(Z) = 0$, und für jedes $x \in \Omega \setminus Z$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in Z_m$, also muss $(g_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ gegen null konvergieren. Aus $x \in N$ folgt $g_j(x) = f_{n_j}(x)$ für alle $j \in \mathbb{N}$. ■

Folgerung 4.2 (L^1 -CAUCHY-Folgen) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Nach Satz 3.43 existiert dann ein $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, gegen das die Folge in der L^1 -Halbnorm konvergiert. Die Folge besitzt eine Teilfolge, die punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert, und für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert eine Menge $Z \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(Z) < \epsilon$ so, dass die Teilfolge auf $\Omega \setminus Z$ gleichmäßig konvergiert.

Beweis. (vgl. [5, Theorem 5.2]) Wir wenden Lemma 4.1 auf die Nullfolge $(f_n - f)_{n \in \mathbb{N}}$ an. ■

Folgerung 4.3 (Halbnorm) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Es gilt $|f|_{L^1} = 0$ genau dann, wenn f μ -fast überall gleich null ist.

Beweis. (vgl. [5, Corollary 5.3]) Die Folge $(0)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt $|f - 0|_{L^1} = 0$, konvergiert also insbesondere in der L^1 -Halbnorm gegen f . Nach Lemma 4.1 muss sie punktweise μ -fast überall gegen f konvergieren, also ist f μ -fast überall gleich null. ■

In der Regel sind wir daran interessiert, zu untersuchen, ob der punktweise Grenzwert einer Folge integrierbarer Funktionen wieder eine integrierbare Funktion ist. Eine erste Aussage erhalten wir mit dem folgenden *Satz von BEPPO LEVI*:

Satz 4.4 (Monotone Konvergenz) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktweise monoton wachsende Folge in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und gelte

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu < \infty.$$

Dann ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge, die sowohl in der L^1 -Halbnorm als auch punktweise μ -fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ konvergiert, und es gilt

$$\int f d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$\alpha := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu \in \mathbb{R}.$$

4 Eigenschaften des Integrals

Sei $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Nach Voraussetzung existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \leq \alpha - \int f_{n_0} d\mu \leq \epsilon.$$

Da die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wächst und das Integral nach (3.11b) monoton ist, folgt

$$0 \leq \alpha - \int f_n d\mu \leq \alpha - \int f_{n_0} d\mu \leq \epsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}. \quad (4.3)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |f_n - f_m|_{L^1} &= \int f_n - f_m d\mu = \int f_n d\mu - \int f_m d\mu \\ &\leq \alpha - \int f_m d\mu \leq \epsilon \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0} \text{ mit } n \geq m, \end{aligned}$$

und mit $|f_n - f_m|_{L^1} = |f_m - f_n|_{L^1}$ folgt, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge sein muss. Nach Satz 3.43 existiert ein $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, gegen das diese Folge in der L^1 -Halbnorm konvergiert.

Nach Folgerung 4.2 konvergiert eine Teilfolge dieser Folge μ -fast überall gegen f , und da die Folge monoton wachsend ist, muss sie auch selbst fast überall gegen f konvergieren.

Sei nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$|f - f_n|_{L^1} \leq \epsilon/2, \quad 0 \leq \alpha - \int f_n d\mu \leq \epsilon/2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$$

gelten. Mit (3.11b) erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \int f d\mu \right| &= \left| \alpha - \int f_n d\mu + \int f_n - f d\mu \right| \leq \left| \alpha - \int f_n d\mu \right| + \left| \int f_n - f d\mu \right| \\ &\leq \epsilon/2 + \int |f_n - f| d\mu \leq \epsilon/2 + |f_n - f|_{L^1} \leq \epsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, \end{aligned}$$

also muss α das Integral der Funktion f sein. ■

Folgerung 4.5 (Monoton fallende Folge) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktweise monoton fallende Folge in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und gelte

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu > -\infty.$$

Dann ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge, die sowohl in der L^1 -Halbnorm als auch punktweise μ -fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ konvergiert, und es gilt

$$\int f d\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu.$$

Beweis. Wir wenden Satz 4.4 auf die Folge $(-f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an. ■

Erinnerung 4.6 (RIEMANN-Integral) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben, und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zu einem Tupel (y_0, \dots, y_k) mit $a = y_0 < y_1 < \dots < y_k = b$ heißen

$$R_+(y) := \sum_{j=1}^k (y_j - y_{j-1}) \max_{z \in [y_{j-1}, y_j]} f(z) \quad R_-(y) := \sum_{j=1}^k (y_j - y_{j-1}) \min_{z \in [y_{j-1}, y_j]} f(z),$$

die Ober- und Untersumme der Funktion f . Falls sich zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Tupel (y_0, \dots, y_k) mit den oben beschriebenen Eigenschaften finden lässt, das

$$R_+(y) - R_-(y) \leq \epsilon$$

erfüllt, heißt f RIEMANN-integrierbar. In diesem Fall existiert eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ so, dass

$$R_-(y) \leq s \leq R_+(y)$$

für alle Tupel (y_0, \dots, y_k) gilt. Diese Zahl nennen wir das RIEMANN-Integral der Funktion f , wir schreiben sie als

$$\int_a^b f(x) dx := s.$$

Folgerung 4.7 (RIEMANN-Integral) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben, sei $\Omega := [a, b]$ und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine RIEMANN-integrierbare Funktion. Dann ist sie auch λ_1 -integrierbar, und beide Integrale stimmen überein.

Beweis. Wir setzen $\mu := \mu$. Nach Definition existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Tupel $y_n = (y_{n,0}, \dots, y_{n,k_n})$ mit

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{1}{n} \leq R_-(y_n) \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} R_-(y_n) &= \sum_{j=1}^{k_n} (y_{n,j} - y_{n,j-1}) \min_{z \in [y_{n,j-1}, y_{n,j}]} f(z) \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} \mu([y_{n,j-1}, y_{n,j}]) \min_{z \in [y_{n,j-1}, y_{n,j}]} f(z) = \int f_n d\mu \end{aligned}$$

mit der durch

$$f_n := \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{1}_{[y_{j-1}, y_j]} \min_{z \in [y_{j-1}, y_j]} f(z)$$

definierten μ -Treppenfunktion. Die durch

$$g_n := \max\{f_1, \dots, f_n\} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

4 Eigenschaften des Integrals

definierten μ -Treppenfunktionen bilden dann eine monoton wachsende Folge, die

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{1}{n} \leq \int g_n d\mu \leq \int_a^b f(x) dx \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Damit lässt sich Satz 4.4 anwenden, um zu folgern, dass $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise μ -fast überall und in der L^1 -Halbnorm gegen eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ konvergiert und

$$\int g d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n d\mu = \int_a^b f(x) dx$$

gilt. Nach Konstruktion gilt $g_n \leq f$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $g \leq f$ μ -fast überall.

Analog können wir mit Hilfe der Obersummen eine monoton fallende Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von μ -Treppenfunktionen konstruieren, die in der L^1 -Halbnorm gegen eine Funktion $h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ konvergiert und

$$\int h d\mu = \inf_{n \in \mathbb{N}} \int h_n d\mu = \int_a^b f(x) dx$$

sowie $f \leq h$ μ -fast überall erfüllt. Damit folgt mit (3.11b)

$$|h - g|_{L^1} = \int h - g d\mu = \int h d\mu - \int g d\mu = 0,$$

also stimmen h und g nach Folgerung 4.3 μ -fast überall überein. Da $g \leq f \leq h$ μ -fast überall gilt, müssen beide Funktionen auch μ -fast überall mit f übereinstimmen, und es folgt $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. ■

Lemma 4.8 (Maximum) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und seien $\max(f, g)$ definiert durch

$$\max(f, g)(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{für alle } x \in \Omega. \quad (4.4)$$

Dann gilt $\max(f, g) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

Beweis. Da $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ ein Vektorraum ist, gilt auch $f - g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und nach Lemma 3.41 folgt $|f - g| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und aus

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

folgt die Behauptung. ■

Folgerung 4.9 (Supremum) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Falls eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ und eine μ -Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ mit

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, x \in \Omega \setminus N$$

existieren, können wir eine μ -Nullmenge $Z \in \mathfrak{A}$ so finden, dass

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) < \infty \quad \text{für alle } x \in \Omega \setminus Z$$

gilt und die durch

$$\left(\sup_{n \rightarrow \mathbb{N}} f_n\right)(x) := \begin{cases} \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) & \text{falls } x \in \Omega \setminus Z, \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \quad \text{für alle } x \in \Omega \quad (4.5)$$

definierte Funktion $\sup_{n \rightarrow \mathbb{N}} f_n$ in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ liegt und ihr Integral die Abschätzung

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu \leq \int \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mu \leq \int |g| d\mu$$

erfüllt.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir Funktionen $s_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$s_n(x) := \max\{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Nach Lemma 4.8 gilt $s_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist punktweise monoton wachsend.

Aus unserer Voraussetzung und (3.11b) folgen

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int s_n d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int |s_n| d\mu \leq \int |g| d\mu, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also können wir Satz 4.4 anwenden, um eine Funktion $s \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ und eine μ -Nullmenge $Z \in \mathfrak{A}$ mit

$$s(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \setminus Z,$$

$$\int s d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int s_n d\mu$$

zu finden. Insbesondere existiert das punktweise Supremum für alle $x \in \Omega \setminus Z$, so dass die in (4.5) gegebene Funktion wohldefiniert ist.

Da s und $\sup_{n \rightarrow \mathbb{N}} f_n$ sich nur auf einer μ -Nullmenge unterscheiden können und da $f_n \leq s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir mit (3.11b) schließlich

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int s_n d\mu = \int s d\mu = \int \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mu,$$

und das ist die gewünschte Aussage. ■

Wichtig an diesem Resultat ist, dass aus der *punktweisen* Beschränktheit der Funktionen f_n durch die μ -integrierbare Funktion g bereits die Integrierbarkeit der Funktion f folgt. Der punktweise Grenzwert einer Folge von Funktionen lässt sich ebenfalls mit Hilfe dieser Eigenschaft beschreiben:

4 Eigenschaften des Integrals

Lemma 4.10 (FATOU) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer Funktionen in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ mit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu < \infty$$

Dann existiert eine μ -Nullmenge $Z \in \mathfrak{A}$ so, dass $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für alle $x \in \Omega \setminus Z$ existiert und endlich ist und die durch

$$(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) := \begin{cases} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) & \text{falls } x \in \Omega \setminus Z, \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \quad \text{für alle } x \in \Omega \quad (4.6)$$

definierte Funktion $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ liegt in $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ und erfüllt

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis. (vgl. [5, Corollary 5.7]) Wir definieren

$$g_{\ell, k} := \min(f_\ell, f_{\ell+1}, \dots, f_{\ell+k}) \quad \text{für alle } \ell, k \in \mathbb{N}$$

und stellen fest, dass für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Folge $(g_{\ell, k})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Aus (3.11b) erhalten wir deshalb

$$\int g_{\ell, k} d\mu \leq \int f_\ell d\mu \quad \text{für alle } \ell, k \in \mathbb{N},$$

und mit Folgerung 4.5 folgt, dass die Folge $(g_{\ell, k})_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ in der L^1 -Halbnorm und außerhalb einer μ -Nullmenge $Z_\ell \in \mathfrak{A}$ auch punktweise gegen eine Funktion $g_\ell \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ konvergiert. Nach Definition muss dann

$$g_\ell(x) \leq f_k(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \setminus Z_\ell, k \in \mathbb{N}_{\geq \ell}$$

gelten, und aus (3.11b) folgt

$$\int g_\ell d\mu \leq \inf_{k \in \mathbb{N}_{\geq \ell}} \int f_k d\mu \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

Nach Definition gilt

$$g_\ell(x) = \inf_{n \geq \ell} f_n(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \setminus Z_\ell,$$

also können wir

$$Z := \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} Z_\ell$$

setzen und aus (2.22) folgern, dass auch Z eine μ -Nullmenge ist. Nach Definition gilt aber

$$g_\ell(x) = \inf_{n \geq \ell} f_n(x) \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}, x \in \Omega \setminus Z,$$

also ist die Folge $(g_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ μ -fast überall punktweise monoton wachsend. Nach (4.7) und unserer Voraussetzung haben wir

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}} \int g_\ell d\mu \leq \sup_{\ell \in \mathbb{N}} \inf_{n \in \mathbb{N}_{\geq \ell}} \int f_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n < \infty,$$

also erfüllt auch die Folge $(g_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ die Voraussetzungen des Satzes 4.4, muss also in der L^1 -Halbnorm und μ -fast überall punktweise gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ konvergieren, die

$$\int f d\mu = \sup_{\ell \in \mathbb{N}} \int g_\ell d\mu \leq \sup_{\ell \in \mathbb{N}} \inf_{n \in \mathbb{N}_{\geq \ell}} \int f_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

erfüllt. ■

Eines der wichtigsten Kriterien für die Integrierbarkeit des punktweisen Grenzwerts integrierbarer Funktionen ist der *Satz von LEBESGUE*¹, der besagt, dass eine μ -messbare Funktion integrierbar ist, falls sich ihr Betrag durch eine integrierbare Funktion beschränken lässt.

Satz 4.11 (Majorisierte Konvergenz) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge im Raum $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, die punktweise μ -fast überall gegen eine Funktion f konvergiert. Seien $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ und eine μ -Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ so gegeben, dass

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \setminus N, n \in \mathbb{N}$$

gilt. Dann folgt $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auch in der L^1 -Halbnorm gegen f .

Beweis. (vgl. [5, Theorem VI.5.8]) Sei $N_0 \in \mathfrak{A}$ eine μ -Nullmenge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \setminus N_0. \quad (4.8)$$

Nach Voraussetzung gilt

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x)| + |f_m(x)| \leq 2g(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \setminus N, n, m \in \mathbb{N},$$

also finden wir nach Folgerung 4.9 für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine μ -Nullmenge $N_k \in \mathfrak{A}$ so, dass

$$h_k(x) := \begin{cases} \sup_{n, m \geq k} |f_n(x) - f_m(x)| & \text{falls } x \in N_k, \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \quad \text{für alle } x \in \Omega \setminus N_k, k \in \mathbb{N}$$

eine Funktion $h_k \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ mit

$$\int h_k d\mu \leq 2 \int g d\mu$$

¹engl. *dominated convergence theorem*

4 Eigenschaften des Integrals

definiert. Dank (2.22) ist auch

$$N := N_0 \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$$

eine μ -Nullmenge, und die Funktionen

$$\hat{h}_k := h_k \mathbf{1}_{\Omega \setminus N} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

bilden eine monoton wachsende Folge mit

$$\int \hat{h}_k d\mu \leq 2 \int g \mathbf{1}_{\Omega \setminus N} d\mu \leq 2 \int g d\mu < \infty \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Aus Satz 4.4 folgt, dass $(\hat{h}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -CAUCHY-Folge ist, die punktweise μ -fast überall gegen eine Funktion $h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ konvergiert. Da die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert, muss \hat{h}_k punktweise μ -fast überall gegen null konvergieren, also muss h μ -fast überall gleich null sein. Damit folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n, m \geq k} |f_n - f_m|_{L^1} = \lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{h}_k|_{L^1} = |h|_{L^1} = 0,$$

also ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge. Nach Folgerung 4.2 muss die Folge in der L^1 -Halbnorm und punktweise μ -fast überall gegen eine Funktion $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ konvergieren. Da sie nach Voraussetzung auch punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert, müssen f und \hat{f} μ -fast überall identisch sein, also gilt auch $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. ■

Mit Hilfe dieses Ergebnisses lassen sich Aussagen über die Integrierbarkeit einer großen Klasse von Funktionen treffen: Wir haben in den Abschnitten 3.2 und 3.3 relativ einfach zu erfüllende Bedingungen kennen gelernt, die sicher stellen, dass eine Funktion messbar ist. Der Satz 3.23 stellt eine Beziehung zwischen messbaren und μ -messbaren Funktionen her, trifft also eine Aussage darüber, unter welchen Bedingungen sich messbare Funktionen punktweise durch Treppenfunktionen approximieren lassen, so dass sich Satz 4.11 anwenden lässt:

Folgerung 4.12 (Integrierbarkeit messbarer Funktionen) Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ eine μ -messbare Funktion, und seien eine μ -integrierbare Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ und eine μ -Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ mit

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \setminus N$$

gegeben. Dann gelten $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ und $|f|_{L^1} \leq |g|_{L^1}$.

Beweis. Nach Definition 3.21 existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$, die punktweise gegen f konvergiert. Unser Ziel ist es, eine Folge zu konstruieren, die punktweise μ -fast überall durch $2g$ beschränkt ist, denn dann können wir Satz 4.11 anwenden.

Nach Lemma 3.37 existieren eine μ -Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ und eine μ -messbare Funktion $\hat{g} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ so, dass $g|_{\Omega \setminus N} = \hat{g}|_{\Omega \setminus N}$ gilt.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Da f_n und \hat{g} μ -messbar sind und $\mathcal{M}(\Omega, \mu)$ ein \mathbb{R} -Vektorraum ist, müssen auch $2\hat{g} - f_n$ und $2\hat{g} + f_n$ μ -messbar sein, und damit nach Satz 3.16 auch messbar. Also gilt

$$\begin{aligned} A_n &:= \{x \in \Omega : |f_n(x)| \geq 2\hat{g}(x)\} \\ &= (2\hat{g} - f_n)^{-1}(] - \infty, 0]) \cup (2\hat{g} + f_n)^{-1}(] - \infty, 0]) \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

und damit insbesondere

$$|f_n(x)| < 2\hat{g}(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \setminus A_n.$$

Wir definieren die Funktionen $\hat{f}_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ durch

$$\hat{f}_n := f_n \mathbf{1}_{\Omega \setminus A_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und stellen fest, dass

$$|\hat{f}_n(x)| \leq 2\hat{g}(x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, x \in \Omega$$

gilt. Da die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert, muss auch die Folge $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diese Eigenschaft besitzen. Da $\hat{g} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ gilt, können wir Satz 4.11 und (3.11b) anwenden, um zu folgern, dass $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ und

$$|f|_{L^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{f}_n|_{L^1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|_{L^1} \leq |g|_{L^1}$$

gelten. ■

Für nicht-negative \mathfrak{A} -messbare Funktionen lässt sich die μ -Integrierbarkeit besonders einfach charakterisieren: Für jede solche Funktion lässt sich eine monoton wachsende und punktweise konvergente Folge von Treppenfunktionen konstruieren. Die Funktion ist genau dann μ -integrierbar, wenn die Folge der Integrale dieser Treppenfunktionen beschränkt ist.

Folgerung 4.13 (Nicht-negative Funktionen) *Sei das Maß μ σ -endlich, und sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine \mathfrak{A} -messbare Funktion. Für jede solche Funktion existiert eine monoton wachsende Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht-negativer μ -Treppenfunktionen, die punktweise μ -fast überall gegen f konvergiert.*

f ist genau dann μ -integrierbar, wenn

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu < \infty \quad (4.9)$$

gilt, und in diesem Fall haben wir

$$\int f d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu. \quad (4.10)$$

4 Eigenschaften des Integrals

Beweis. Bei der Konstruktion der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ können wir wie in Satz 3.23 vorgehen: Da μ σ -endlich ist, finden wir eine Familie $(\widehat{\Omega}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften (3.3).

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} A_{n,m} &:= \widehat{\Omega}_n \cap f^{-1}([(m-1)2^{-n}, m2^{-n}],) \\ f_{n,m} &:= (m-1)2^{-n} \quad \text{für alle } m \in \{1, \dots, n2^n\} \end{aligned}$$

und setzen

$$f_n := \sum_{m=1}^{n2^n} f_{n,m} \mathbf{1}_{A_{n,m}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wie im Beweis des Satzes 3.23 lässt sich zeigen, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert. Aus

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= A_{n+1,2m-1} \cup A_{n+1,2m}, \\ f_{n,m} &= f_{n+1,2m-1} \leq f_{n+1,2m} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, m \in \{1, \dots, n2^n\} \end{aligned}$$

folgt, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch monoton wachsend ist.

Falls (4.9) gilt, können wir den Satz 4.4 über die monotone Konvergenz anwenden.

Falls umgekehrt f μ -integrierbar ist, gilt

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega, n \in \mathbb{N},$$

also können wir den Satz 4.11 über die majorisierte Konvergenz anwenden, um zu folgern, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der L^1 -Halbnorm gegen f konvergiert. Mit (3.5b) und Lemma 3.42 folgt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu,$$

und der Beweis ist vollständig. ■

Bemerkung 4.14 (Integral messbarer Funktionen) *Wir können (4.10) als alternative Definition des Integrals verwenden, die jeder nicht-negativen \mathfrak{A} -messbaren Funktion ein Integral zuordnet. Folgerung 4.13 besagt dann, dass die Funktion genau dann μ -integrierbar ist, wenn das durch (4.10) definierte Integral endlich ist. In diesem Fall stimmt sein Wert mit dem der bisherigen Definition des Integrals überein. Mit Hilfe des Satzes 4.11 kann man aus der Integrierbarkeit des Betrags einer Funktion auf die Integrierbarkeit der Funktion selber schließen, deshalb wird in der Literatur häufig der Raum $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ als die Menge aller messbaren Funktionen f mit $|f|_{L^1} < \infty$ definiert.*

Ein Blick auf den Beweis der Folgerung zeigt, dass wir jede beliebige monoton wachsende und punktweise konvergente Folge einsetzen können. Falls wir eine Folge finden können, für die (4.9) gilt, muss wegen (3.11b) dasselbe auch für alle anderen derartigen Folgen gelten, also ist der Wert des Integrals von der Wahl der Folge unabhängig.

4.2 L^p -Räume

Wir haben bereits gesehen, dass die Summe zweier integrierbarer Funktionen wieder integrierbar ist. Das Produkt zweier integrierbarer Funktionen ist im Allgemeinen nicht wieder integrierbar, aber es ist möglich, den Raum $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ durch verallgemeinerte Räume zu ersetzen, mit deren Hilfe sich Aussagen über die Integrierbarkeit von Produkten treffen lassen.

Lemma 4.15 (YOUNG-UNGLEICHUNG) Seien $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (4.11)$$

gegeben. Es gilt

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \quad (4.12)$$

Beweis. Wir untersuchen die Funktion

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}, \quad z \mapsto (1+z)^{1/p}.$$

Ihre Ableitung ist durch

$$f'(z) = \frac{1}{p}(1+z)^{1/p-1} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

gegeben, also folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, dass für jedes $z \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\eta \in [0, z]$ mit

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = f'(\eta) = \frac{1}{p}(1+\eta)^{1/p-1}$$

existiert. Aus $p > 1$ folgt $1/p < 1$, also $1/p - 1 < 0$, und wir können die rechte Seite der Gleichung durch $1/p$ abschätzen:

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} \leq \frac{1}{p} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Indem wir mit z multiplizieren und $f(0)$ auf die rechte Seite bringen, folgt

$$(1+z)^{1/p} \leq \frac{z}{p} + 1 = \frac{z}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1+z}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (4.13)$$

$$z^{1/p} \leq \frac{z}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}_{\geq 1}. \quad (4.14)$$

Seien nun $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Falls $x = 0$ oder $y = 0$ gilt, ist (4.12) trivial erfüllt. Wir können also $x \neq 0$ und $y \neq 0$ voraussetzen. Falls $x^p \geq y^q$ gilt, wenden wir (4.14) auf $z = x^p/y^q \geq 1$ an und erhalten

$$xy^{-q/p} = z^{1/p} \leq \frac{z}{p} + \frac{1}{q} = \frac{x^p}{py^q} + \frac{1}{q}, \quad xy = xy^{q(1-1/p)} = xy^{-q/p}y^q \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

4 Eigenschaften des Integrals

Anderenfalls, also für $x^p < y^q$, vertauschen wir p und q in (4.14) und wenden die Ungleichung auf $z = y^q/x^p > 1$ an, und

$$yx^{-p/q} = z^{1/q} \leq \frac{z}{q} + \frac{1}{p} = \frac{y^q}{qx^p} + \frac{1}{p}, \quad xy = yx^{p(1-1/q)} = yx^{-p/q}x^p \leq \frac{y^q}{q} + \frac{x^p}{p}$$

zu zeigen. ■

Folgerung 4.12 legt nahe, dass μ -Messbarkeit einer Funktion und die Beschränktheit ihres Betrags durch eine integrierbare Funktion bereits die Integrierbarkeit sicherstellen. Die YOUNG-Ungleichung bietet uns eine Möglichkeit, das Produkt zweier Zahlen zu beschränken, also bietet es sich an, sie punktweise anzuwenden und so eine Aussage über Produkte von Funktionen zu erhalten.

Definition 4.16 (\mathcal{L}^p -Raum) Sei $p \in \mathbb{R}_{>1}$. Wir setzen

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist } \mu\text{-fast } \mu\text{-messbar mit } |f|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)\}.$$

Die Formulierung „ μ -fast μ -messbar“ ist so zu verstehen, dass eine μ -messbare Funktion $\hat{f} \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ und eine μ -Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ mit $f|_{\Omega \setminus N} = \hat{f}|_{\Omega \setminus N}$ existieren. Die Menge $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ bezeichnen wir als den Raum der p -fach integrierbaren Funktionen.

Nach Lemma 3.37 und Lemma 3.41 ist jedes $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ auch μ -fast μ -messbar mit $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und indem wir Folgerung 4.12 auf $g := |f|$ anwenden, erhalten wir auch, dass jede μ -fast μ -messbare Funktion mit $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ auch μ -integrierbar ist. Also ist Definition 4.16 für $p = 1$ mit der bisherigen Definition von $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ verträglich.

Definition 4.17 (L^p -Halbnorm) Sei $p \in \mathbb{R}_{>1}$. Wir setzen

$$|f|_{L^p} := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu).$$

Die so definierte Abbildung nennen wir die L^p -Halbnorm.

Lemma 4.18 (HÖLDER-Ungleichung) Seien $p, q \in \mathbb{R}_{>1}$ mit (4.11) gegeben, und seien $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mu)$. Dann gelten $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ und

$$|fg|_{L^1} \leq |f|_{L^p} |g|_{L^q}. \quad (4.15)$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir davon ausgehen, dass f und g μ -messbar sind. Dann ist fg als Produkt μ -messbarer Funktionen selber μ -messbar, denn wir können mit Lemma 3.24 eine Folge von μ -Treppenfunktionen konstruieren, die punktweise gegen fg konvergiert.

Falls $|f|_{L^p} = 0$ gilt, besagt Folgerung 4.3, dass f punktweise μ -fast überall gleich null ist, also gilt dasselbe für fg , und wir erhalten $|fg|_{L^1} = 0$. Entsprechend können wir den Fall $|g|_{L^q} = 0$ behandeln.

Wir dürfen also von $|f|_{L^p} > 0$ und $|g|_{L^q} > 0$ ausgehen. Dann sind

$$\hat{f} := f/|f|_{L^p}, \quad \hat{g} := g/|g|_{L^q}$$

wohldefiniert und erfüllen $|\hat{f}|_{L^p} = 1$ und $|\hat{g}|_{L^q} = 1$.

Mit der YOUNG-Ungleichung (4.12) erhalten wir

$$|\hat{f}\hat{g}|(x) = |\hat{f}(x)||\hat{g}(x)| \leq \frac{|\hat{f}(x)|^p}{p} + \frac{|\hat{g}(x)|^q}{q} \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

und dank (3.11b) folgt daraus

$$\int |\hat{f}\hat{g}| d\mu \leq \frac{1}{p} \int |\hat{f}|^p d\mu + \frac{1}{q} \int |\hat{g}|^q d\mu = \frac{|f|_{L^p}^p}{p} + \frac{|g|_{L^q}^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (4.16)$$

Also können wir Folgerung 4.12 anwenden, um zu folgern, dass $\hat{f}\hat{g} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ gilt. Durch Multiplikation mit $|f|_{L^p}|g|_{L^q}$ folgt direkt $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und (4.16) nimmt die Form

$$|fg|_{L^1} = \int |fg| d\mu = |f|_{L^p}|g|_{L^q} \int |\hat{f}\hat{g}| d\mu \leq |f|_{L^p}|g|_{L^q}$$

an, also ist (4.15) bewiesen. ■

Da wir $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ als Raum bezeichnen, wäre es natürlich von Vorteil, wenn es sich tatsächlich um einen Vektorraum handeln würde. Angesichts der Definition 4.16 genügt es, nachzuweisen, dass die L^p -Halbnorm tatsächlich eine Halbnorm ist. Die einzige Herausforderung stellt dabei die Dreiecksungleichung (3.6c) dar.

Lemma 4.19 (Konvexität) Sei $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Es gilt

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^p \leq \frac{x^p + y^p}{2} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

die Funktion $x \mapsto x^p$ ist also konvex.

Beweis. Wir definieren die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad z \mapsto z^p,$$

und stellen fest, dass ihre Ableitung $f'(z) = pz^{p-1}$ eine monoton wachsende Funktion ist. Seien $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben, und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \leq y$ angenommen. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\begin{aligned} f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(x) &= \left(f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) - \left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x)\right) \\ &= f'(\eta_+) \frac{y-x}{2} - f'(\eta_-) \frac{y-x}{2} \end{aligned}$$

für Zwischenpunkte $\eta_- \in [x, (x+y)/2]$ und $\eta_+ \in [(x+y)/2, y]$. Aus $\eta_- \leq \eta_+$ folgt $f'(\eta_-) \leq f'(\eta_+)$, also

$$f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(x) \geq 0$$

und damit die Behauptung. ■

4 Eigenschaften des Integrals

Lemma 4.20 (MINKOWSKI-Ungleichung) Sei $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$. Dann gelten $f + g \in \mathcal{L}^p$ und

$$|f + g|_{L^p} \leq |f|_{L^p} + |g|_{L^p}. \quad (4.17)$$

Beweis. Für $p = 1$ folgt die Ungleichung bereits aus Lemma 3.41. Also können wir uns auf den Fall $p > 1$ beschränken.

Wir dürfen wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ gilt, und da wir mit Hilfe von Lemma 3.24 eine Folge von μ -Treppenfunktionen konstruieren können, die $|f + g|^p$ punktweise approximiert, folgt $|f + g|^p \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$.

Dank Lemma 4.19 erhalten wir

$$\begin{aligned} |f + g|^p(x) &= |f(x) + g(x)|^p = 2^p \left| \frac{f(x) + g(x)}{2} \right|^p \leq 2^p \left(\frac{|f(x)| + |g(x)|}{2} \right)^p \\ &\leq 2^p \frac{|f(x)|^p + |g(x)|^p}{2} \quad \text{für alle } x \in \Omega, \end{aligned}$$

und da $|f|^p, |g|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ nach Voraussetzung gelten, erhalten wir mit Folgerung 4.12 auch $|f + g|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, also $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$.

Falls $|f + g|_{L^p} = 0$ gilt, ist (4.17) trivial erfüllt. Also dürfen wir im Folgenden von $|f + g|_{L^p} > 0$ ausgehen. Wir definieren $q \in \mathbb{R}_{>1}$ über (4.11), also als $1/q = 1 - 1/p = (p - 1)/p$, und stellen fest, dass die Funktion

$$h := |f + g|^{p-1}$$

die Gleichung

$$\int |h|^q d\mu = \int (|f + g|^{p-1})^q d\mu = \int |f + g|^{(p-1)p/(p-1)} d\mu = \int |f + g|^p d\mu$$

erfüllt, haben also $h \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mu)$ und $|h|_{L^q} = |f + g|^{p/q}$ bewiesen. Deshalb dürfen wir die HÖLDER-Ungleichung (4.15) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} |f + g|_{L^p}^p &= \int |f + g|^p d\mu = \int |f + g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \int (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} d\mu \\ &= \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq |f|_{L^p} |h|_{L^q} + |g|_{L^p} |h|_{L^q} = (|f|_{L^p} + |g|_{L^p}) \left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{1/q} \\ &= (|f|_{L^p} + |g|_{L^p}) \left(\int |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{1/q} = (|f|_{L^p} + |g|_{L^p}) |f + g|_{L^p}^{p/q} \\ &= (|f|_{L^p} + |g|_{L^p}) |f + g|_{L^p}^{p-1}. \end{aligned}$$

Wir dividieren beide Seiten durch $|f + g|_{L^p}^{p-1}$ und erhalten (4.17). ■

Folgerung 4.21 (\mathcal{L}^p -Raum und L^p -Halbnorm) Sei $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum und die L^p -Halbnorm ist eine Halbnorm auf diesem Raum.

Für eine Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ gilt $|f|_{L^p} = 0$ genau dann, wenn f punktweise μ -fast überall gleich null ist.

Beweis. Aus Lemma 4.20 folgt, dass die Summe zweier Funktionen aus $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ wieder in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ liegt. Das Produkt einer p -fach integrierbaren Funktion mit einer reellen Zahl ist offensichtlich auch wieder p -fach integrierbar, also ist $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ ein \mathbb{R} -Vektorraum.

Die Eigenschaften (3.6a) und (3.6b) erfüllt die L^p -Halbnorm offensichtlich, die Dreiecksungleichung (3.6c) folgt aus der MINKOWSKI-Ungleichung (4.17).

Falls eine Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ mit $|f|_{L^p} = 0$ gegeben ist, gilt nach Definition

$$\int |f|^p d\mu = 0,$$

also ist die L^1 -Halbnorm der Funktion $|f|^p$ gleich null, so dass mit Folgerung 4.3 auch f punktweise μ -fast überall gleich null sein muss. ■

Da ein wesentliches Resultat der Untersuchung des Raums $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ der μ -integrierbaren Funktionen darin bestand, dass dieser Raum vollständig bezüglich der L^1 -Halbnorm ist, sind wir auch daran interessiert, ein entsprechendes Ergebnis für die Räume $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ zu zeigen. Glücklicherweise genügt es dazu, den Beweis des Lemmas 3.36 leicht zu modifizieren und so auch noch Aussagen über punktweise Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz zu erhalten.

Satz 4.22 (Vollständigkeit) Sei $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine L^p -CAUCHY-Folge in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$. Dann existiert ein $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ so, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f - f_n|_{L^p} = 0$$

gilt, dass die Folge also in der L^p -Halbnorm gegen f konvergiert. Eine Teilfolge der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise μ -fast überall, und für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $Z \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(Z) \leq \epsilon$ so, dass die Teilfolge auf $\Omega \setminus Z$ gleichmäßig konvergiert.

Beweis. (vgl. [5, Theorem 1.4]) Wie in den vorangehenden Beweisen dürfen wir ohne Beschränkung davon ausgehen, dass die Funktionen f_n μ -messbar sind.

Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine L^p -CAUCHY-Folge ist, finden wir wie im Beweis des Lemmas 3.36 eine Teilfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so, dass

$$|g_n - g_m|_{L^p}^p \leq 4^{-n} \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \quad (4.18)$$

gilt. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} Y_n &:= \{x \in \Omega : |g_{n+1}(x) - g_n(x)|^p \geq 2^{-n}\} \\ &= (g_{n+1} - g_n)^{-1}([-\infty, -2^{-n/p}] \cup [2^{-n/p}, \infty]) \in \mathfrak{A} \end{aligned}$$

4 Eigenschaften des Integrals

und wollen nachweisen, dass $\mu(Y_n) \leq 2^{-n}$ gilt. Da $|g_{n+1} - g_n|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ nach Definition gilt, können wir eine Folge $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$ finden, die $|g_{n+1} - g_n|^p$ unter anderem punktweise μ -fast überall approximiert. Da h_m eine μ -Treppenfunktion ist, finden wir nach Definition 3.20 eine Menge $A_m \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A_m) < \infty$ und $h_m|_{\Omega \setminus A_m} = 0$. Da $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ punktweise μ -fast überall gegen $|g_{n+1} - g_n|^p$ konvergiert, muss insbesondere

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(Y_n \cap A_m) = \mu(Y_n) \quad (4.19)$$

gelten. Aus (4.18) und (3.11b) folgt

$$\begin{aligned} 4^{-n} &\geq |g_{n+1} - g_n|_{L^p}^p = \int |g_{n+1} - g_n|^p d\mu \geq \int |g_{n+1} - g_n|^p \mathbf{1}_{Y_n \cap A_m} d\mu \\ &\geq 2^{-n} \int \mathbf{1}_{Y_n \cap A_m} d\mu = 2^{-n} \mu(Y_n \cap A_m) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

also erhalten wir mit (4.19) auch $\mu(Y_n) \leq 2^{-n}$.

Nun können wir wie im Beweis des Lemmas 3.36 fortfahren: Wir definieren

$$Z_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} Y_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \Omega \setminus Z_n$ folgt mit der Definition der Mengen Y_k bereits

$$|g_{k+1}(x) - g_k(x)|^p < 2^{-k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_{\geq n},$$

also gilt mit $\xi := 2^{-1/p} < 1$ auch

$$|g_{k+1}(x) - g_k(x)| < \xi^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_{\geq n},$$

also ist

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{k+1}(x) - g_k(x)$$

wohldefiniert und erfüllt nach geometrischer Summenformel

$$|f(x) - g_k(x)| \leq \frac{\xi^k}{1 - \xi} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_{\geq n}.$$

Die Menge

$$N := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n$$

erfüllt nach (2.14)

$$\mu(N) \leq \mu(Z_n) \leq \frac{\xi^n}{1 - \xi} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

ist also eine μ -Nullmenge. Da für jedes $x \in \Omega \setminus N$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in \Omega \setminus Z_n$ existieren muss, ist $f(x)$ auf der gesamten Menge $\Omega \setminus N$ definiert, und wir können es auf der

Nullmenge durch $f|_N = 0$ fortsetzen. Also ist f eine Funktion, gegen die die Teilfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ außerhalb der Nullmenge N punktweise konvergiert.

Für jedes $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(Z_n) \leq \xi^k / (1 - \xi) \leq \epsilon$, und wir haben bereits gezeigt, dass die Teilfolge $(g_n|_{\Omega \setminus Z_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|_{\Omega \setminus Z_n}$ konvergiert.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der L^p -Halbnorm gegen f konvergiert. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$|g_n - g_m|_{L^p}^p \leq \epsilon \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$$

gilt. Für ein $m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ folgt insbesondere

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |g_n - g_m|_{L^1}^p = \liminf_{n \rightarrow \infty} |g_n - g_m|_{L^p}^p \leq \epsilon < \infty,$$

so dass mit dem Lemma 4.10 von FATOU eine Funktion $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ gefunden werden kann, die punktweise μ -fast überall mit $|f - g_m|^p$ übereinstimmt. Also gilt auch $|f - g_m|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$, und damit $f - g_m \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$. Da $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ nach Folgerung 4.21 ein Vektorraum ist, erhalten wir $f = f - g_m + g_m \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$.

Lemma 4.10 beinhaltet auch die Abschätzung

$$\int |f - g_m|^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |g_n - g_m|_{L^p}^p \leq \epsilon,$$

also haben wir bewiesen, dass auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |f - g_m|_{L^p}^p = 0$$

gilt. Um zu zeigen, dass auch die ursprüngliche Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f konvergiert, fixieren wir ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Da die Teilfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f konvergiert, finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|f - f_{n_0}|_{L^p} \leq \epsilon/2, \quad |f_n - f_m|_{L^p} \leq \epsilon/2 \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$$

gelten. Es folgt

$$|f - f_n|_{L^p} \leq |f - f_{n_0}|_{L^p} + |f_{n_0} - f_n|_{L^p} \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0},$$

also konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der L^p -Halbnorm gegen f . ■

In manchen Anwendungen ist es unpraktisch, mit einer Halbnorm anstelle einer „echten“ Norm arbeiten zu müssen. Dank Folgerung 4.3 wissen wir, dass sich mehrere Funktionen mit verschwindender L^1 -Halbnorm nur auf μ -Nullmengen voneinander unterscheiden können. Diese Unterschiede können wir formal beseitigen, indem wir statt mit Funktionen mit *Äquivalenzklassen* von Funktionen arbeiten. Wir definieren für alle $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \sim g \quad : \iff \quad \text{es existiert eine } \mu\text{-Nullmenge } N \in \mathfrak{A} \text{ mit } f|_{\Omega \setminus N} = g|_{\Omega \setminus N},$$

4 Eigenschaften des Integrals

zwei Funktionen sind also genau dann äquivalent, wenn sie sich höchstens auf einer μ -Nullmenge unterscheiden. Der Raum der Abbildungen von Ω nach \mathbb{R} zerfällt damit in Äquivalenzklassen der Form

$$[f] := \{g : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \sim g\} \quad \text{für alle } f : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

und indem wir uns auf die Äquivalenzklassen der Funktionen aus einem der Räume $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ beschränken, erhalten wir geeignete \mathbb{R} -Vektorräume:

Definition 4.23 (L^p -Raum) Sei $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Wir setzen

$$L^p(\Omega, \mu) := \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)\}$$

und stellen fest, dass die Rechenoperationen

$$\begin{aligned} [f] + [g] &:= [f + g] && \text{für alle } f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu), \\ \alpha[f] &:= [\alpha f] && \text{für alle } f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu), \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

von der konkreten Wahl des Repräsentanten unabhängig, also wohldefiniert sind. Im Fall $p = 1$ ist auch das Integral

$$\int [f] d\mu := \int f d\mu \quad \text{für alle } f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$$

wohldefiniert.

Folgerung 4.24 (BANACH-Raum) Sei $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Dann ist die durch

$$\|[f]\|_{L^p} := \|f\|_{L^p} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$$

definierte Abbildung auf $L^p(\Omega, \mu)$ eine Norm, die wir die L^p -Norm nennen, und der Raum ist bezüglich dieser Norm vollständig, somit ein BANACH-Raum.

Die HÖLDER-Ungleichung (4.15) und die MINKOWSKI-Ungleichung (4.17) übertragen sich entsprechend.

Beweis. Nach Folgerung 4.3 ist die L^p -Norm wohldefiniert und tatsächlich eine Norm. Die Vollständigkeit des Raums $L^p(\Omega, \mu)$ folgt mit Satz 4.22. ■

Folgerung 4.25 (HILBERT-Raum) Die Gleichung

$$\langle [f], [g] \rangle_{L^2} := \int f g d\mu \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$$

definiert ein Skalarprodukt auf $L^2(\Omega, \mu)$, das wir das L^2 -Skalarprodukt nennen. Es erfüllt

$$\langle [f], [f] \rangle_{L^2} = \|[f]\|_{L^2}^2 \quad \text{für alle } f \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mu),$$

also ist $L^2(\Omega, \mu)$ ein HILBERT-Raum.

Beweis. Da das Integral sich von Änderungen der Funktion auf einer μ -Nullmenge nicht beeindrucken lässt, ist das L^2 -Skalarprodukt wohldefiniert. Die restlichen Eigenschaften folgen aus der Linearität (3.11a) des Integrals und Folgerung 4.24. ■

Um die HÖLDER-Ungleichung (4.15) auch auf den Fall $p = 1$ übertragen zu können, wäre es nützlich, die Räume $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$ und $L^\infty(\Omega, \mu)$ zur Verfügung zu haben, damit (4.11) mit $q = \infty$ gilt.

Definition 4.26 (L^∞ -Raum) Wir definieren die L^∞ -Halbnorm durch

$$|f|_{L^\infty} := \inf\{\|f|_{\Omega \setminus N}\|_\infty : N \in \mathfrak{A}, \mu(N) = 0\} \quad \text{für alle } f : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

also das kleinste Supremum, das der Betrag einer Funktion außerhalb einer μ -Nullmenge annehmen kann.

Den Räumen $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ und $L^p(\Omega, \mu)$ entsprechen dann die Räume

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) &:= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist } \mu\text{-fast } \mu\text{-messbar mit } |f|_{L^\infty} < \infty\}, \\ L^\infty(\Omega, \mu) &:= \{[f] : f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)\}, \end{aligned}$$

und der L^p -Norm entspricht die durch

$$\|[f]\|_{L^\infty} := |f|_{L^\infty} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$$

definierte L^∞ -Norm. Mit Hilfe des Satzes 4.11 folgt, dass die MINKOWSKI-Ungleichung (4.17) auch für $p = 1$ und $q = \infty$ gilt. Aus der Vollständigkeit des Körpers \mathbb{R} und der Eigenschaft (2.22) folgt, dass $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu)$ vollständig ist, also $L^\infty(\Omega, \mu)$ ein BANACH-Räume.

Bemerkung 4.27 (Sprechweise) In der Praxis wird häufig nicht zwischen einer Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ und der ihr entsprechenden Äquivalenzklasse $[f] \in L^p(\Omega, \mu)$ unterschieden, es wird also beispielsweise $f \in L^p(\Omega, \mu)$ oder $\|f\|_{L^p}$ geschrieben.

Dadurch reduziert sich der Schreibaufwand erheblich, allerdings sollte man nicht vergessen, dass mit Äquivalenzklassen von Funktionen gearbeitet wird. Beispielsweise gilt $\lambda_1(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist $\{x\}$ eine λ_1 -Nullmenge und damit für $f \in L^p(\Omega, \mu)$ der Ausdruck „ $f(x)$ “ nicht wohldefiniert, da er von der Wahl des konkreten Repräsentanten der Äquivalenzklasse abhängt.

4.3 Produktmaß und Doppelintegral

Wir haben die BOREL- σ -Algebra \mathfrak{B}_d als von d -dimensionalen Quadern erzeugte σ -Algebra definiert. Da das kartesische Produkt eines d - und eines n -dimensionalen Quaders gerade ein $(d + n)$ -dimensionaler Quader ist, folgt nach Definition 3.6 bereits $\mathfrak{B}_d \otimes \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_{d+n}$. Durch wiederholtes Anwenden dieser Gleichung können wir die d -dimensionale BOREL- σ -Algebra auf ein kartesisches Produkt der eindimensionalen BOREL- σ -Algebren zurückführen, mit denen sich in bestimmten Situationen besonders einfach arbeiten lässt.

4 Eigenschaften des Integrals

Wenn wir mit Hilfe des kartesischen Produkts eine σ -Algebra definieren können, wäre es hilfreich, wenn wir auch ein Maß auf der Produkt- σ -Algebra konstruieren könnten, das mit den Maßen der Faktoren verträglich ist. In einem letzten Schritt wäre es hilfreich, auch ein Integral für auf dem kartesischen Produkt definierte Funktionen finden zu können.

Im Fall des LEBESGUE-Integrals wird es so möglich, Integrale über d -dimensionale Gebiete auf solche über eindimensionale Gebiete zurückzuführen, die sich häufig mit Hilfe der Folgerung 4.7 als RIEMANN-Integrale entpuppen, die sich per Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung berechnen lassen.

Seien also zwei σ -Algebren \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 auf Mengen Ω_1 und Ω_2 gegeben, und sei $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$. Seien μ_1 und μ_2 σ -endliche Maße auf diesen σ -Algebren. Unser Ziel ist es, ein Maß μ auf der Produkt- σ -Algebra $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ auf Ω zu finden.

Bei der Definition des Maßes gehen wir wie im Fall des LEBESGUE-Maßes vor: Der Flächeninhalt eines Rechtecks ergibt sich als Produkt der Breite und der Höhe, also liegt es nahe, die Gleichung

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad \text{für alle } A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2 \quad (4.20)$$

zu fordern.

Lemma 4.28 (Mengenring) *Sei $A \subseteq \Omega$. Falls $k \in \mathbb{N}$ und $A_{1,1}, \dots, A_{1,k} \in \mathfrak{A}_1$ und $A_{2,1}, \dots, A_{2,k} \in \mathfrak{A}_2$ mit*

$$A = \bigcup_{n=1}^k A_{1,n} \times A_{2,n}, \quad (4.21a)$$

$$\emptyset = (A_{1,n} \times A_{2,n}) \cap (A_{1,m} \times A_{2,m}) \quad \text{für alle } n, m \in \{1, \dots, k\} \text{ mit } n \neq m \quad (4.21b)$$

existieren, nennen wir A eine verallgemeinerte Figur. Die Menge \mathfrak{F} der verallgemeinerten Figuren ist ein Mengenring, der die Produkt- σ -Algebra \mathfrak{A} erzeugt. Ein Maß μ , das (4.20) erfüllt, muss auch

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^k \mu_1(A_{1,n})\mu_2(A_{2,n})$$

für jede verallgemeinerte Figur A in der Darstellung (4.21) erfüllen.

Beweis. Offensichtlich gelten $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathfrak{F}$ und $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathfrak{F}$. Die zweite Eigenschaft hat zur Folge, dass wir wesentlich einfacher als in Satz 2.6 nachweisen können, dass \mathfrak{F} ein Mengenring ist, indem wir lediglich den Schnitt von Mengen untersuchen: Seien $A, B \in \mathfrak{F}$ gegeben, und seien $k, \ell \in \mathbb{N}$ sowie $A_{1,1}, \dots, A_{1,k} \in \mathfrak{A}_1$, $B_{1,1}, \dots, B_{1,\ell} \in \mathfrak{A}_1$, $A_{2,1}, \dots, A_{2,k} \in \mathfrak{A}_2$ und $B_{2,1}, \dots, B_{2,\ell} \in \mathfrak{A}_2$ so gewählt, dass (4.21) jeweils für A und B (im zweiten Fall mit $B_{1,n}$, $B_{2,n}$ und ℓ anstelle von $A_{1,n}$, $A_{2,n}$ und k) gilt. Dann erhalten wir mit dem Distributivgesetz

$$A \cap B = \left(\bigcup_{n=1}^k A_{1,n} \times A_{2,n} \right) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\ell} B_{1,m} \times B_{2,m} \right)$$

$$= \bigcup_{n=1}^k \bigcup_{m=1}^{\ell} (A_{1,n} \cap B_{1,m}) \times (A_{2,n} \cap B_{2,m}),$$

und da die Mengen auf der rechten Seite dieser Gleichung disjunkt sind, folgt

$$A \cap B \in \mathfrak{F} \quad \text{für alle } A, B \in \mathfrak{F}. \quad (4.22)$$

Mit den Regeln von DE MORGAN erhalten wir

$$\Omega \setminus A = \Omega \setminus \left(\bigcup_{n=1}^k A_{1,n} \times A_{2,n} \right) = \bigcap_{n=1}^k (\Omega_1 \setminus A_{1,n}) \times (\Omega_2 \setminus A_{2,n}),$$

und da $\Omega_1 \setminus A_{1,n} \in \mathfrak{A}_1$ und $\Omega_2 \setminus A_{2,n} \in \mathfrak{A}_2$ gelten, folgt

$$(\Omega_1 \setminus A_{1,n}) \times (\Omega_2 \setminus A_{2,n}) \in \mathfrak{F}$$

und können (4.22) anwenden, um

$$\Omega \setminus A \in \mathfrak{F}, \quad B \setminus A = B \cap (\Omega \setminus A) \in \mathfrak{F}$$

zu zeigen. Die restlichen Aussagen folgen direkt aus unseren Definitionen. ■

Folgerung 4.29 (Produktmaß eindeutig) *Es kann höchstens ein Maß auf \mathfrak{A} geben, dass (4.20) erfüllt.*

Beweis. Sei μ ein Maß auf der Produkt- σ -Algebra \mathfrak{A} , das (4.20) erfüllt. Nach Lemma 4.28 ist es durch (4.20) bereits auf dem Mengenring \mathfrak{F} der Figuren eindeutig festgelegt, und da \mathfrak{F} die Produkt- σ -Algebra erzeugt und die Maße μ_1 und μ_2 σ -endlich sind, können wir uns auf Folgerung 2.35 berufen. ■

Falls es das gesuchte Maß μ gibt, ist es durch (4.20) bereits eindeutig festgelegt. Wir müssen also „nur noch“ zeigen, dass ein Maß μ mit dieser Eigenschaft existiert. Die Konstruktion beruht auf der Idee, die Querschnitte einer zu messende Menge $A \in \mathfrak{A}$ zu untersuchen. Wir werden zeigen, dass diese Querschnitte in \mathfrak{A}_1 beziehungsweise \mathfrak{A}_2 liegen, so dass sie sich mit μ_1 beziehungsweise μ_2 messen lassen. Durch Integration dieser Maßzahlen erhalten wir das gewünschte Produktmaß.

Definition 4.30 (Schnitte einer Menge) *Sei $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$. Wir definieren*

$$\begin{aligned} A_x &:= \{y \in \Omega_2 : (x, y) \in A\} && \text{für alle } x \in \Omega_1, \\ A_y &:= \{x \in \Omega_1 : (x, y) \in A\} && \text{für alle } y \in \Omega_2. \end{aligned}$$

Die Menge A_x nennen wir den x -Schnitt der Menge A , A_y entsprechend den y -Schnitt², vgl. Abbildung 4.1.

²Die Bezeichnung ist dadurch motiviert, dass A_x der Querschnitt der Menge A senkrecht zur „ x -Koordinate“ ist.

4 Eigenschaften des Integrals

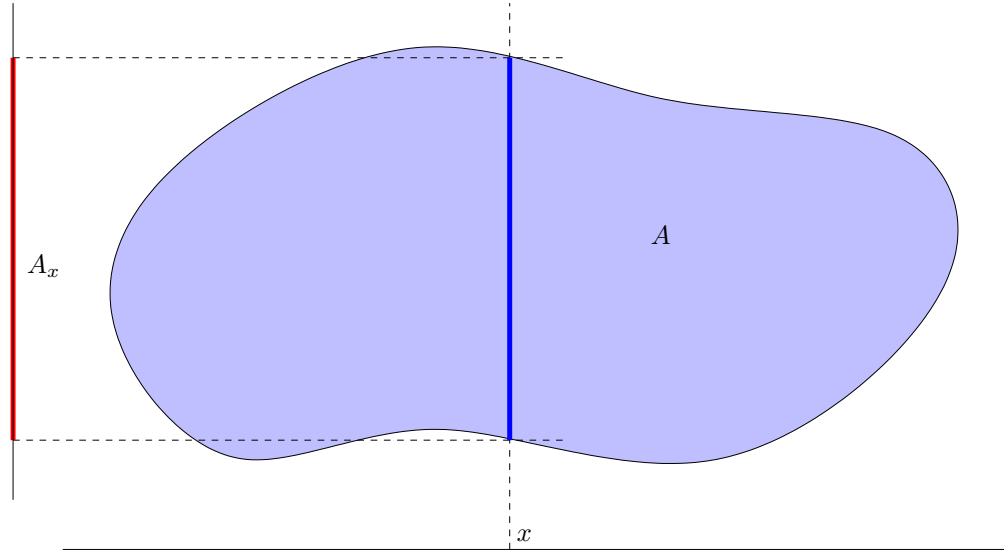


Abbildung 4.1: Schnitt einer Menge A der Produkt- σ -Algebra: Für ein $x \in \Omega_1$ werden alle $y \in \Omega_2$ gesammelt, die $(x, y) \in A$ erfüllen. So ergibt sich eine Menge $A_x \subseteq \Omega_2$, die anschaulich dem Querschnitt der Menge A entlang der „Koordinate“ x entspricht.

Lemma 4.31 (Schnitt) Sei $A \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$. Dann gelten

$$A_x \in \mathfrak{A}_2, \quad A_y \in \mathfrak{A}_1 \quad \text{für alle } x \in \Omega_1, y \in \Omega_2.$$

Beweis. (vgl. [1, Lemma 23.1]) Wir gehen ähnlich wie im Beweis des Lemmas 3.3 vor: Wir definieren das Mengensystem

$$\mathfrak{U} := \{B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 : B_x \in \mathfrak{A}_2 \text{ für alle } x \in \Omega_1\}$$

und wollen nachweisen, dass \mathfrak{U} eine σ -Algebra ist. Offenbar gilt $\emptyset_x = \emptyset$ für alle $x \in \Omega_1$, also auch (2.6a).

Sei $B \in \mathfrak{U}$. Dann gilt

$$(\Omega \setminus B)_x = \Omega_2 \setminus B_x \in \mathfrak{A}_2,$$

also folgen (2.5b) und (2.5a).

Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathfrak{U} . Dann gilt

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right)_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n)_x \in \mathfrak{A}_2,$$

also auch (2.5c), und \mathfrak{U} muss eine σ -Algebra sein.

Seien $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ gegeben. Dann gilt

$$(A_1 \times A_2)_x = \begin{cases} A_2 & \text{falls } x \in A_1, \\ \emptyset & \text{ansonsten,} \end{cases} \quad \text{für alle } x \in \Omega_1,$$

also insbesondere $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ die kleinste σ -Algebra ist, die die kartesischen Produkte $A_1 \times A_2$ für alle $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ enthält, muss sie in \mathfrak{U} enthalten sein. Also folgt nach Definition der Menge \mathfrak{U} insbesondere $A_x \in \mathfrak{A}_2$ für alle $A \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.

Entsprechend können wir mit den y -Schnitten verfahren. ■

Wir sind daran interessiert, wie sich die Maße der Schnitte A_x und A_y einer Menge A in Abhängigkeit von x beziehungsweise y verändern: Die Idee der Konstruktion des Produktmaßes besteht gerade darin, die Maße der Schnitt zu integrieren und so ein Maß der gesamten Menge zu finden. Um Schwierigkeiten mit dem Wert ∞ zu vermeiden, untersuchen wir zunächst nur den Fall, dass wir sowohl in der x - als auch in der y -Richtung auf eine Menge endlichen Maßes beschränkt sind.

Lemma 4.32 (Maß der Schnitte) *Seien $\widehat{\Omega}_1 \subseteq \Omega_1$ und $\widehat{\Omega}_2 \subseteq \Omega_2$ mit $\mu_1(\widehat{\Omega}_1) < \infty$ und $\mu_2(\widehat{\Omega}_2) < \infty$ gegeben.*

Für alle $A \in \mathfrak{A}$ sind die Funktionen

$$\begin{aligned} \hat{s}_{A,1} : \Omega_1 &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, & x &\mapsto \begin{cases} \mu_2(\widehat{\Omega}_2 \cap A_x) & \text{falls } x \in \widehat{\Omega}_1, \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}, \\ \hat{s}_{A,2} : \Omega_2 &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, & y &\mapsto \begin{cases} \mu_1(\widehat{\Omega}_1 \cap A_y) & \text{falls } y \in \widehat{\Omega}_2, \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \end{aligned}$$

wohldefiniert und μ_1 - beziehungsweise μ_2 -integrierbar.

Beweis. Wir verfahren ähnlich wie im Beweis des Lemmas 4.31.

Aus Symmetriegründen genügt es, sich auf den ersten Fall zu konzentrieren, also können wir $\hat{s}_A := \hat{s}_{A,1}$ als Abkürzung einführen. Sei

$$\mathfrak{U} := \{A \in \mathfrak{A} : s_A \text{ ist } \mu_1\text{-integrierbar}\}.$$

Wir wollen nachweisen, dass \mathfrak{U} eine σ -Algebra ist, die die Mengen $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ enthält, denn dann muss \mathfrak{A} nach Definition in \mathfrak{U} enthalten sein und die Aussage ist bewiesen.

Seien zunächst $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ gegeben. Für $A := A_1 \times A_2$ gilt dann

$$\hat{s}_{A,1} = \mathbf{1}_{\widehat{\Omega}_1 \cap A_1} \mu_2(\widehat{\Omega}_2 \cap A_2),$$

und da $\mu_1(\widehat{\Omega}_1 \cap A_1) \leq \mu_1(\widehat{\Omega}_1)$ nach (2.14) gilt, ist $\hat{s}_{A,1}$ eine μ_1 -Treppenfunktion und damit μ_1 -integrierbar.

Offenbar gilt $s_{\emptyset,1} = 0$, also $\emptyset \in \mathfrak{U}$ und damit (2.6a).

4 Eigenschaften des Integrals

Als nächstes weisen wir nach, dass zu jeder Menge $A \in \mathfrak{A}$ auch ihr Komplement $\Omega \setminus A$ zu \mathfrak{A} gehört. Sei also $A \in \mathfrak{A}$ gegeben. Für $x \in \widehat{\Omega}_1$ erhalten wir mit (2.13)

$$\begin{aligned}\hat{s}_{\Omega \setminus A}(x) &= \mu_2(\widehat{\Omega}_2 \cap (\Omega \setminus A)_x) = \mu_2(\widehat{\Omega}_2 \cap (\Omega_2 \setminus A_x)) = \mu_2(\widehat{\Omega}_2 \setminus (\widehat{\Omega}_2 \cap A_x)) \\ &= \mu_2(\widehat{\Omega}_2) - \mu_2(\widehat{\Omega}_2 \cap A_x) = \hat{s}_\Omega(x) - \hat{s}_A(x),\end{aligned}$$

also $\Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$ und damit (2.5b). Da wir $\emptyset \in \mathfrak{A}$ bereits gezeigt haben, folgt auch $\Omega \in \mathfrak{A}$, also (2.5a).

Jetzt bleibt nur noch (2.5c) nachzuweisen. Für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in \mathfrak{A} erhalten wir

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad A_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n)_x \quad \text{für alle } x \in \Omega_1,$$

und die Mengen $((A_n)_x)_{n \in \mathbb{N}}$ sind für jedes $x \in \Omega_1$ paarweise disjunkt. Sei $x \in \Omega_1$. Falls $x \notin \widehat{\Omega}_1$ gilt, erhalten wir direkt

$$\hat{s}_A(x) = 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{s}_{A_n}(x).$$

Falls dagegen $x \in \widehat{\Omega}_1$ gilt, folgt aus (2.21b) auch

$$\hat{s}_A(x) = \mu_2(\widehat{\Omega}_2 \cap A_x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2(\widehat{\Omega}_2 \cap (A_n)_x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{s}_{A_n}(x).$$

Um den Satz 4.4 anwenden zu können, müssen wir nachweisen, dass die Integrale der Partialsummen beschränkt bleiben. Da

$$\sum_{n=1}^m \hat{s}_{A_n}(x) = \hat{s}_{A_1 \cup \dots \cup A_m}(x) = \mu_2(\widehat{\Omega}_2 \cap (A_1 \cup \dots \cup A_m)_x) \leq \mu_2(\widehat{\Omega}_2) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

gilt, folgt mit (3.11b) auch

$$\int \sum_{n=1}^m \hat{s}_{A_n}(x) d\mu_1 \leq \int \mu_2(\widehat{\Omega}_2) d\mu_1 = \mu_1(\widehat{\Omega}_1) \mu_2(\widehat{\Omega}_2) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N},$$

und mit Satz 4.4 erhalten wir $\hat{s}_A \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mu_1)$, also $A \in \mathfrak{A}$ und damit (2.5c). \blacksquare

Mit Hilfe der Maße der Schnitte einer Menge können wir nun das gewünschte Produktmaß definieren.

Satz 4.33 (Produktmaß) *Es existiert genau ein Maß $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$, das (4.20) erfüllt. Dieses Maß ist σ -endlich, und für jedes $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ existieren $s_{A,1} \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mu_1)$ und $s_{A,2} \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mu_2)$ sowie eine μ_1 -Nullmenge $N_{A,1} \in \mathfrak{A}_1$ und eine μ_2 -Nullmenge $N_{A,2} \in \mathfrak{A}_2$ mit*

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int s_{A,1} d\mu_1 = \int s_{A,2} d\mu_2, \\ s_{A,1}(x) &= \mu_2(A_x), \quad s_{A,2}(y) = \mu_1(A_y) \quad \text{für alle } x \in \Omega_1 \setminus N_{A,1}, \quad y \in \Omega_2 \setminus N_{A,2}.\end{aligned}$$

4.3 Produktmaß und Doppelintegral

Beweis. (vgl. [1, Satz 23.3]) Da μ_1 und μ_2 σ -endlich sind, können wir nach Erinnerung 3.22 monoton wachsende Folgen $(\widehat{\Omega}_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\widehat{\Omega}_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned} \mu_1(\widehat{\Omega}_{1,n}) < \infty, & \quad \mu_2(\widehat{\Omega}_{2,n}) < \infty & \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\Omega}_{1,n} = \Omega_1, & \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\Omega}_{2,n} = \Omega_2 \end{aligned}$$

finden. Sei $A \in \mathfrak{A}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\hat{s}_{A,n} : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \begin{cases} \mu_2(\widehat{\Omega}_{2,n} \cap A_x) & \text{falls } x \in \widehat{\Omega}_{1,n}, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Mit Lemma 4.32 folgt, dass $(\hat{s}_{A,n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge μ_1 -integrierbarer Funktionen ist, und diese Folge ist offenbar auch monoton wachsend. Wir definieren

$$\mu(A) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \hat{s}_{A,n} d\mu_1.$$

Unsere Aufgabe besteht darin, nachzuweisen, dass das so gegebene μ ein Maß auf \mathfrak{A} ist und (4.20) erfüllt.

Zunächst prüfen wir (2.21a) nach: Es gilt

$$\hat{s}_{\emptyset,n}(x) = \mu_2(\emptyset_x) = \mu_2(\emptyset) = 0 \quad \text{für alle } x \in \widehat{\Omega}_{1,n},$$

und da $\hat{s}_{\emptyset,n}$ auf $\Omega_1 \setminus \widehat{\Omega}_{1,n}$ nach Definition verschwindet, folgt $\mu(\emptyset) = 0$.

Nun müssen wir zeigen, dass auch (2.21b) gilt. Sei dazu eine Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in \mathfrak{A} fixiert. Wir setzen

$$A := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$$

und erhalten, da die Mengen $(A_m)_x$ für alle $x \in \Omega_1$ disjunkt sein müssen, die Gleichung

$$\begin{aligned} \hat{s}_{A,n}(x) &= \mu_2(\widehat{\Omega}_{1,n} \cap A_x) = \mu_2\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \widehat{\Omega}_{1,n} \cap (A_m)_x\right) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu_2(\widehat{\Omega}_{1,n} \cap (A_m)_x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \hat{s}_{A_m,n}(x) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, x \in \widehat{\Omega}_{1,n}. \end{aligned}$$

Da $\hat{s}_{A,n}$ und $\hat{s}_{A_m,n}$ auf $\Omega_1 \setminus \widehat{\Omega}_{1,n}$ nach Definition verschwinden, folgt

$$\hat{s}_{A,n} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \hat{s}_{A_m,n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Lemma 4.32 ist $\hat{s}_{A,n}$ μ_1 -integrierbar, also muss nach dem Satz 4.4 über die monotone Konvergenz auch die rechte Seite dieser Gleichung μ_1 -integrierbar sein und

$$\int \hat{s}_{A,n} d\mu_1 = \sum_{m \in \mathbb{N}} \int \hat{s}_{A_m,n} d\mu_1$$

4 Eigenschaften des Integrals

gelten. Alle Integrale sind positiv, also folgt

$$\mu(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \hat{s}_{A,n} d\mu_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \int \hat{s}_{A_m,n} d\mu_1 = \sum_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \hat{s}_{A_m,n} d\mu_1 = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mu(A_m),$$

und wir haben die σ -Additivität (2.21b) nachgewiesen. Also ist μ ein Maß.

Als nächstes weisen wir nach, dass μ die Produktmaß-Eigenschaft (4.20) besitzt. Seien dazu $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ und $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ gegeben. Wir setzen $A := A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}$ und stellen fest, dass

$$\hat{s}_{A,n}(x) = \mu_2(\widehat{\Omega}_{2,n} \cap A_x) = \begin{cases} \mu_2(\widehat{\Omega}_{2,n} \cap A_2) & \text{falls } x \in A_1, \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, x \in \widehat{\Omega}_{1,n}$$

gilt. Also ist $\hat{s}_{A,n}$ eine μ_1 -Treppenfunktion, deren Integral durch

$$\int \hat{s}_{A,n} d\mu_1 = \mu_1(\widehat{\Omega}_{1,n} \cap A_1) \mu_2(\widehat{\Omega}_{2,n} \cap A_2) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gegeben ist. Nach Konstruktion sind $(\widehat{\Omega}_{1,n} \cap A_1)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\widehat{\Omega}_{2,n} \cap A_2)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen, deren Vereinigung jeweils A_1 beziehungsweise A_2 ist, also können wir die „Stetigkeit“ des Maßes (2.23a) anwenden, um

$$\mu(A) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \hat{s}_{A,n} d\mu_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_1(\widehat{\Omega}_{1,n} \cap A_1) \mu_2(\widehat{\Omega}_{2,n} \cap A_2) = \mu_1(A_1) \mu_2(A_2)$$

zu erhalten, und damit ist (4.20) nachgewiesen.

Als nächstes zeigen wir, dass μ σ -stetig ist. Das ist relativ einfach: Wir haben

$$\begin{aligned} \mu(\widehat{\Omega}_{1,n} \times \widehat{\Omega}_{2,n}) &= \mu_1(\widehat{\Omega}_{1,n}) \mu_2(\widehat{\Omega}_{2,n}) < \infty, \\ \Omega &= \Omega_1 \times \Omega_2 = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\Omega}_{1,n} \right) \times \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\Omega}_{2,n} \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\Omega}_{1,n} \times \widehat{\Omega}_{2,n}, \end{aligned}$$

also ist $(\widehat{\Omega}_{1,n} \times \widehat{\Omega}_{2,n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Teilmengen endlichen Maßes, deren Vereinigung Ω ist.

Jetzt ist nur noch die Darstellung des Maßes über das Integral nachzuweisen. Sei $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ gegeben. Da $(\hat{s}_{A,n})_{n \in \mathbb{N}}$ nach eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{L}^1(\Omega_1, \mu_1)$ ist, die nach Voraussetzung

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int \hat{s}_{A,n} d\mu_1 = \mu(A) < \infty$$

erfüllt, muss nach dem Satz 4.4 eine Funktion $s_A \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mu_1)$ existieren, die

$$\int s_A d\mu_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \hat{s}_{A,n} d\mu_1 = \mu(A)$$

erfüllt und punktweise μ_1 -fast überall der Grenzwert der Funktionen $\hat{s}_{A,n}$ ist. Sei $N_{A,1} \in \mathfrak{A}_1$ also eine μ_1 -Nullmenge, mit der

$$s_A(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \hat{s}_{A,n} \quad \text{für alle } x \in \Omega_1 \setminus N_{A,1}$$

gilt. Sei $x \in \Omega_1 \setminus N_{A,1}$. Wir können ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so finden, dass $x \in \widehat{\Omega}_{1,n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt, und infolge der „Stetigkeit“ des Maßes (2.23a) folgt daraus

$$s_A(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{s}_{A,n}(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_2(\widehat{\Omega}_{2,n} \cap A_x) = \mu_2(A_x),$$

also die gewünschte Gleichung.

Wir können den gesamten Beweis auch für die y -Schnitte anstelle der x -Schnitte durchführen und erhalten wieder ein Maß mit den gewünschten Eigenschaften. Da es nach Folgerung 4.29 nur genau ein Maß geben kann, müssen beiden übereinstimmen. ■

Bemerkung 4.34 *Ignoriert man die Tatsache, dass $s_{A,1}$ und $s_{A,2}$ den Wert unendlich annehmen können, und interpretiert man das Integral im Sinn der Bemerkung 4.14, so kann man Satz 4.33 auch kurz fassen:*

$$\mu(A) := \int \mu_2(A_x) d\mu_1 = \int \mu_1(A_y) d\mu_2 \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}$$

definiert das einzige Maß auf \mathfrak{A} , das die Produktmaß-Eigenschaft (4.20) besitzt.

Definition 4.35 (Produktmaß) *Das nach Satz 4.33 eindeutig durch*

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad \text{für alle } A_1 \in \mathfrak{A}_1, A_2 \in \mathfrak{A}_2$$

definierte Maß auf $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ nennen wir das Produktmaß von μ_1 und μ_2 und notieren es als $\mu_1 \otimes \mu_2 = \mu$.

Für den Rest dieses Abschnitts gehen wir davon aus, dass $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ gilt. Unser Ziel besteht darin, die Eigenschaften des Produktmaßes etwas genauer zu untersuchen, insbesondere sind wir daran interessiert, Integrale bezüglich des Produktmaßes auf Integrale bezüglich der eventuell zugänglicheren Maße μ_1 und μ_2 zurückzuführen.

Definition 4.36 (Schnitt einer Funktion) *Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren*

$$\begin{aligned} f_x : \Omega_2 &\rightarrow \mathbb{R}, & y &\mapsto f(x, y) & \text{für alle } x \in \Omega_1, \\ f_y : \Omega_1 &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto f(x, y) & \text{für alle } y \in \Omega_2. \end{aligned}$$

Die Abbildung f_x nennen wir den x -Schnitt der Funktion f , f_y entsprechend den y -Schnitt.

Da wir im Folgenden mit Funktionen in zwei Variablen arbeiten müssen, bietet es sich an, die Notation des Integrals so zu modifizieren, dass die jeweilige Integrationsvariable klar angegeben ist: Wir schreiben

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f d\mu$$

und bezeichnen mit

$$\int f(x, y) d\mu_2(y) = \int f_x d\mu_2, \quad \int f(x, y) d\mu_1(x) = \int f_y d\mu_1$$

die Integration bezüglich jeweils nur einer Variablen.

4 Eigenschaften des Integrals

Lemma 4.37 (Treppenfunktion) Sei $f \in \mathcal{S}(\Omega, \mu)$ eine μ -Treppenfunktion. Dann existieren eine μ_1 -Nullmenge $N_{f,1} \in \mathfrak{A}_1$ und eine μ_2 -Nullmenge $N_{f,2} \in \mathfrak{A}_2$ mit

$$\begin{aligned} f_x &\in \mathcal{S}(\Omega_2, \mu_2) && \text{für alle } x \in \Omega_1 \setminus N_{f,1}, \\ f_y &\in \mathcal{S}(\Omega_1, \mu_1) && \text{für alle } y \in \Omega_2 \setminus N_{f,2}. \end{aligned}$$

Die Abbildungen

$$\begin{aligned} F_1 : \Omega_1 &\rightarrow \mathbb{R}, && x \mapsto \begin{cases} \int f_x d\mu_2 & \text{falls } x \in \Omega_1 \setminus N_{f,1}, \\ 0 & \text{ansonsten,} \end{cases} \\ F_2 : \Omega_2 &\rightarrow \mathbb{R}, && y \mapsto \begin{cases} \int f_y d\mu_1 & \text{falls } x \in \Omega_2 \setminus N_{f,2} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \end{aligned}$$

sind μ_1 - beziehungsweise μ_2 -integrierbar und erfüllen

$$\int f d\mu = \int F_1 d\mu_1 = \int F_2 d\mu_2.$$

Beweis. Nach Definition 3.20 existieren eine Menge $A \in \mathfrak{A}$, eine messbare Partition $(A_n)_{n=1}^k$ und Koeffizienten $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{R}$ so, dass $\mu(A) < \infty$ und

$$f = \sum_{n=1}^k f_n \mathbf{1}_{A_n}$$

gelten. Insbesondere muss dann nach (2.14) auch $\mu(A_n) \leq \mu(A) < \infty$ für alle $n \in \{1, \dots, k\}$ gelten.

Sei $n \in \{1, \dots, k\}$. Nach Satz 4.33 finden wir eine μ_1 -Nullmenge $N_{n,1} \in \mathfrak{A}_1$, eine μ_2 -Nullmenge $N_{n,2} \in \mathfrak{A}_2$ und Funktionen $s_{n,1} \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mu_1)$ und $s_{n,2} \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mu_2)$ mit

$$\mu(A_n) = \int s_{n,1} d\mu_1 = \int s_{n,2} d\mu_2,$$

$$s_{n,1}(x) = \mu_2((A_n)_x), \quad s_{n,2}(y) = \mu_1((A_n)_y) \quad \text{für alle } x \in \Omega_1 \setminus N_{n,1}, \quad y \in \Omega_2 \setminus N_{n,2}.$$

Nach (2.21b) sind dann auch

$$N_{f,1} := \bigcup_{n=1}^k N_{n,1}, \quad N_{f,2} := \bigcup_{n=1}^k N_{n,2}$$

μ_1 - beziehungsweise μ_2 -Nullmengen, und wir erhalten dank der Linearität (3.11a) des Integrals und der Tatsache, dass das Integral sich nicht ändert, wenn der Integrand auf der μ_1 -Nullmenge $N_{f,1}$ verändert wird, die Gleichung

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^k f_n \mu(A_n) = \sum_{n=1}^k f_n \int s_{n,1} d\mu_1 = \int \sum_{n=1}^k f_n s_{n,1}(x) d\mu_1(x)$$

$$= \int \sum_{n=1}^k f_n \mu_2((A_n)_x) d\mu_1(x) = \int \int f_x d\mu_2 d\mu_1(x) = \int F_1 d\mu_1.$$

Entsprechend können wir mit der zweiten Integrationsvariablen verfahren. ■

Dieses Ergebnis soll nun auf beliebige μ -integrierbare Funktionen übertragen werden. Dazu müssen wir nach Definition 3.33 L^1 -CAUCHY-Folgen von μ -Treppenfunktionen untersuchen, die außerhalb einer μ -Nullmenge punktweise gegen die zu integrierende Funktion konvergieren. Also müssen wir zunächst die Eigenschaften von μ -Nullmengen näher untersuchen.

Lemma 4.38 (Nullmenge) *Für jede μ -Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ existieren eine μ_1 -Nullmenge $N_1 \in \mathfrak{A}_1$ und eine μ_2 -Nullmenge $N_2 \in \mathfrak{A}_2$ so, dass*

$$\begin{aligned} \mu_2(N_x) &= 0 && \text{für alle } x \in \Omega_1 \setminus N_1, \\ \mu_1(N_y) &= 0 && \text{für alle } y \in \Omega_2 \setminus N_2 \end{aligned}$$

gelten.

Beweis. Wir führen den Beweis per Kontraposition. Sei $N \in \mathfrak{A}$ so gegeben, dass eine Menge $N_1 \in \mathfrak{A}_1$ mit $\mu_1(N_1) > 0$ und

$$\mu_2(N_x) > 0 \quad \text{für alle } x \in N_1$$

existiert. Nach Folgerung 4.3 kann das Integral einer nicht-negativen Funktion nur dann gleich null sein, wenn die Funktion fast überall gleich null ist. Wir haben gezeigt, dass die Funktion $x \mapsto \mu_2(N_x)$ diese Eigenschaft nicht besitzt, also folgt

$$\mu(N) = \int \mu_2(N_x) d\mu_1(x) > 0,$$

so dass N keine μ -Nullmenge sein kann.

Entsprechend können wir bei der zweiten Integrationsvariablen vorgehen. ■

Mit Hilfe dieser Vorbereitungen können wir nun das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts beweisen: Den *Satz von FUBINI-TONELLI* über die Integration bezüglich eines Produktmaßes.

Satz 4.39 (Produktintegration) *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Dann existieren eine μ_1 -Nullmenge $N_{f,1} \in \mathfrak{A}_1$ und eine μ_2 -Nullmenge $N_{f,2} \in \mathfrak{A}_2$ mit*

$$\begin{aligned} f_x &\in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mu_2) && \text{für alle } x \in \Omega_1 \setminus N_{f,1}, \\ f_y &\in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mu_1) && \text{für alle } y \in \Omega_2 \setminus N_{f,2}. \end{aligned}$$

Die Abbildungen

$$F_1 : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \int f(x, y) d\mu_2(y) & \text{falls } x \in \Omega_1 \setminus N_{f,1}, \\ 0 & \text{ansonsten,} \end{cases}$$

4 Eigenschaften des Integrals

$$F_2 : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \begin{cases} \int f(x, y) d\mu_1(x) & \text{falls } y \in \Omega_2 \setminus N_{f,2}, \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

sind μ_1 - beziehungsweise μ_2 -integrierbar und erfüllen

$$\int f d\mu = \int F_1 d\mu_1 = \int F_2 d\mu_2.$$

Beweis. Nach Definition 3.33 finden wir eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von μ -Treppenfunktionen und eine μ -Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ so, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, y) = f(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in \Omega \setminus N$$

gelten. Nach Lemma 4.38 gibt es eine μ_1 -Nullmenge $N_0 \in \mathfrak{A}_1$ so, dass $\mu_1(N_x) = 0$ für alle $x \in \Omega_1 \setminus N_0$ gilt, für derartige x konvergiert also $(f_n)_x$ punktweise μ_2 -fast überall gegen f_x .

Da die Folge in der L^1 -Halbnorm konvergiert, muss auch

$$\alpha := \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n|_{L^1} < \infty \quad (4.23)$$

gelten. Mit Lemma 4.37 finden wir Folgen $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\widehat{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen in $\mathcal{L}^1(\Omega_1, \mu_1)$ sowie eine Folge $(\widehat{N}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von μ_1 -Nullmengen so, dass

$$\int f_n d\mu = \int F_n d\mu_1, \quad F_n(x) = \int f_n(x, y) d\mu_2(y), \quad (4.24a)$$

$$\int |f_n| d\mu = \int \widehat{F}_n d\mu_1, \quad \widehat{F}_n(x) = \int |f_n(x, y)| d\mu_2(y) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, x \in \Omega_1 \setminus \widehat{N}_n \quad (4.24b)$$

erfüllt sind. Nach (4.23) gilt

$$\int \widehat{F}_n d\mu_1 = |f_n|_{L^1} \leq \alpha \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also folgt mit dem Lemma 4.10 von FATOU, dass die Folge $(\widehat{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der L^1 -Halbnorm gegen eine Funktion $\widehat{F} \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mu_1)$ konvergiert und eine μ_1 -Nullmenge $N_F \in \mathfrak{A}_1$ mit

$$\widehat{F}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \widehat{F}_n(x) < \infty \quad \text{für alle } x \in \Omega_1 \setminus N_F \quad (4.25)$$

existiert. Wir setzen

$$N_f := N_0 \cup N_F \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{N}_n$$

und stellen fest, dass diese Menge $N_f \in \mathfrak{A}_1$ nach (2.21b) als abzählbare Vereinigung von μ_1 -Nullmengen selber eine μ_1 -Nullmenge ist. Für jedes $x \in \Omega_1 \setminus N_f$ gilt nach (4.24b) und (4.25)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int |f_n(x, y)| d\mu_2(y) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \widehat{F}_n(x) = \widehat{F}(x) < \infty,$$

also existieren nach dem Lemma von FATOU eine μ_2 -Nullmenge $N_y \in \mathfrak{A}_2$ und eine Funktion $\hat{f}_x \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mu_2)$ mit

$$\hat{f}_x(y) = \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(x, y)| \quad \text{für alle } y \in \Omega_2 \setminus N_y,$$

$$\int \hat{f}_x d\mu_2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{F}_n(x) = \hat{F}(x).$$

Wir haben bereits gesehen, dass $(f_n)_x$ für $x \notin N_0 \subseteq N_f$ punktweise μ_2 -fast überall gegen f_x konvergiert, also muss \hat{f}_x μ_2 -fast überall mit $|f_x|$ übereinstimmen und wir haben bewiesen, dass $|f_x| \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mu_2)$ gilt. Also folgt $f_x \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mu_2)$ und mit dem Satz 4.11 über die majorisierte Konvergenz auch

$$F(x) := \int f_x d\mu_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n)_x d\mu_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega_1 \setminus N_f.$$

Wir wissen bereits, dass $\hat{F} \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mu_1)$ wegen

$$|F(x)| = \left| \int f_x d\mu_2 \right| \leq \int |f_x| d\mu_2 = \int \hat{f}_x d\mu_2 = \hat{F}(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega_1 \setminus N_f$$

eine μ_1 -integrierbare Majorante der Funktion F ist, also ist nach dem Satz 4.11 über die majorisierte Konvergenz auch

$$F : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \int f(x, y) d\mu_2(y) & \text{falls } x \in N_f, \\ 0 & \text{ansonsten,} \end{cases}$$

eine μ_1 -integrierbare Funktion mit

$$\int F d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int F_n d\mu_1.$$

Dank (4.24a) folgt

$$\int F d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int F_n d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu,$$

und das ist die gewünschte Aussage. Wie bei den vorangehenden Beweisen können wir für die zweite Integrationsvariable entsprechend vorgehen. ■

Bemerkung 4.40 Auch in diesem Fall können wir die Notation abkürzen, indem wir zulassen, dass Integranden auf einer Nullmenge undefiniert sein können. Der Satz 4.39 nimmt dann die Form

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int \int f(x, y) d\mu_2(y) d\mu_1(x) \\ &= \int \int f(x, y) d\mu_1(x) d\mu_2(y) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu) \end{aligned}$$

an, wobei impliziert ist, dass die inneren Integrale nur bis auf Nullmengen definierte integrierbare Funktionen sind.

Insbesondere spielt es keine Rolle, ob wir zunächst über Ω_1 oder über Ω_2 integrieren.

4.4 Variablentransformation

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel, sowohl für die theoretische Untersuchung als auch die praktische Anwendung des Integrals, ist die *Transformationsformel*, die beschreibt, wie sich das Integral der Verkettung zweier Funktionen verhält. Eine wichtige Anwendung ist die Koordinatentransformation³: Viele Integrale lassen sich wesentlich leichter handhaben, wenn man den Integranden in geeigneten Koordinaten darstellt, beispielsweise sind Kugelkoordinaten (also Radius und zwei Winkel) häufig wesentlich besser als kartesische Koordinaten geeignet, um das Verhalten einer Funktion in der Nähe einer Punktsingularität zu beschreiben.

In einem ersten Schritt untersuchen wir, wie sich ein Maß mit Hilfe einer messbaren Abbildung von einer σ -Algebra auf eine andere übertragen lässt.

Lemma 4.41 (Bildmaß) *Seien \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 σ -Algebren auf Mengen Ω_1 und Ω_2 . Sei $g : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ eine \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2 -messbare Abbildung, und sei $\mu_1 : \mathfrak{A}_1 \rightarrow [0, \infty]$ ein Maß. Dann ist*

$$\mu_2 : \mathfrak{A}_2 \rightarrow [0, \infty], \quad A \mapsto \mu_1(g^{-1}(A)),$$

ein Maß auf \mathfrak{A}_2 , das Bildmaß⁴ genannt wird.

Falls g bijektiv, g^{-1} \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1 -messbar und μ_1 σ -endlich ist, ist auch μ_2 σ -endlich.

Beweis. Offenbar gilt $\mu_2(\emptyset) = \mu_1(g^{-1}(\emptyset)) = \mu_1(\emptyset) = 0$, also ist (2.21a) erfüllt. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in \mathfrak{A}_2 . Dann ist $(g^{-1}(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in \mathfrak{A}_1 , also gilt

$$\begin{aligned} \mu_2\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \mu_1\left(g^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right) = \mu_1\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-1}(A_n)\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_1(g^{-1}(A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2(A_n), \end{aligned}$$

also ist auch (2.21b) erfüllt, also ist μ_2 in der Tat ein Maß.

Seien nun μ_1 σ -endlich und g bijektiv mit \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1 -messbarer Umkehrabbildung. Nach Definition 2.33 existiert dann eine Folge $(\widehat{\Omega}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Mengen mit

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\Omega}_n = \Omega_1, \quad \mu_1(\widehat{\Omega}_m) < \infty \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren

$$\check{\Omega}_n := g(\widehat{\Omega}_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

³engl. *change of variables*

⁴engl. *pushforward measure*

und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \check{\Omega}_n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g(\hat{\Omega}_n) = g\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{\Omega}_n\right) = g(\Omega_1) = \Omega_2, \\ \mu_2(\check{\Omega}_m) &= \mu_1(g^{-1}(\check{\Omega}_m)) = \mu_1(\hat{\Omega}_m) < \infty \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

gelten, also ist auch μ_2 σ -endlich. \blacksquare

Den Ausgangspunkt unserer Untersuchung bildet die Untersuchung des Falls einer affinen Transformation, also der Kombination einer Translation und einer linearen Abbildung.

Lemma 4.42 (Affine Transformation) *Sei $d \in \mathbb{N}$, sei $T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine reguläre Matrix, und sei $z \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor. Dann gelten*

$$\lambda_d(A + z) = \lambda_d(A), \quad \lambda_d(T(A)) = |\det T| \lambda_d(A) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{B}_d.$$

Beweis. Wir weisen zunächst die Translationsinvarianz nach. Die Funktion

$$g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto x - z,$$

ist stetig, also nach Lemma 3.5 auch messbar, also können wir wie in Lemma 4.41 ein Bildmaß auf \mathfrak{A} definieren. Wir bezeichnen es mit λ_g . Wenn wir zeigen können, dass λ_g und λ_d auf dem Mengenring der Figuren übereinstimmen, müssen sie nach Folgerung 2.35 identisch sein. Sei also ein Quader $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^d$ fixiert. Für $Q = \emptyset$ ist die Aussage trivial, also dürfen wir im Folgenden von $Q \neq \emptyset$ ausgehen. Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda_g(Q) &= \lambda_d(g^{-1}(Q)) = \lambda_d(Q + z) = \prod_{\iota=1}^d ((b_\iota + z_\iota) - (a_\iota + z_\iota)) \\ &= \prod_{\iota=1}^d b_\iota - a_\iota = \lambda_d(Q), \end{aligned}$$

also folgt mit Satz 2.19 auch, dass λ_g und λ_d auf \mathfrak{F}_d übereinstimmen, und damit nach Folgerung 2.35 auch auf \mathfrak{A} .

Nun wenden wir uns linearen Transformationen zu. Dabei bietet es sich an, eine allgemeine Matrix auf ein Produkt einfacherer Matrizen zurückzuführen. Besonders einfach sind *Permutationsmatrizen*: Sei $k \in \{1, \dots, d\}$ gegeben. Wir definieren die Matrix $P \in \mathbb{R}^{d \times d}$ durch

$$p_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = m \notin \{1, k\}, \\ 1 & \text{falls } (n, m) = (1, k) \text{ oder } (n, m) = (k, 1), \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \quad \text{für alle } n, m \in \{1, \dots, d\}.$$

Es gilt $P^2 = I$, also ist P eine reguläre Matrix. Für alle nicht-leeren Quader $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt

$$P(Q) = P([a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] \times \dots \times [a_d, b_d])$$

4 Eigenschaften des Integrals

$$= [a_k, b_k[\times \dots \times [a_1, b_1[\times \dots \times [a_d, b_d[,$$

also folgt

$$\lambda_d(P(Q)) = \prod_{\iota=1}^d b_\iota - a_\iota = \lambda_d(Q),$$

und wir können wie zuvor zeigen, dass

$$\lambda_d(P(A)) = \lambda_d(A) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{B}_d \quad (4.26)$$

gelten muss. Der zweite Spezialfall sind *Frobeniusmatrizen*: Seien $f_2, \dots, f_d \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren die Matrix $F \in \mathbb{R}^{d \times d}$ durch

$$f_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = m, \\ f_n & \text{falls } n > 1, m = 1, \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \quad \text{für alle } n, m \in \{1, \dots, d\}.$$

Wir wählen wieder einen nicht-leeren Quader $Q = [a, b[\subseteq \mathbb{R}^d$ und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} F(\{x\} \times [a_2, b_2[\times \dots [a_d, b_d[) \\ = \{x\} \times [a_2 + f_2x, b_2 + f_2x[\times \dots \times [a_d + f_dx, b_d + f_dx[\quad \text{für alle } x \in [a_1, b_1[\end{aligned}$$

gilt, also kennen wir die x -Schnitte der Menge $F(Q)$ und können mit dem Satz 4.33 über das Produktmaß und der bereits bewiesenen Translationsinvarianz auch

$$\begin{aligned} \lambda_d(F(Q)) &= \int \lambda_{d-1}(F(Q)_x) d\lambda_1(x) \\ &= \int \lambda_{d-1}([a_2 + f_2x, b_2 + f_2x[\times \dots \times [a_d + f_dx, b_d + f_dx[) d\lambda_1(x) \\ &= \int \lambda_{d-1}([a_2, b_2[\times \dots \times [a_d, b_d[) d\lambda_1(x) \\ &= \int \lambda_{d-1}(Q_x) d\lambda_1(x) = \lambda_d(Q), \end{aligned}$$

erhalten, so dass wie zuvor

$$\lambda_d(F(A)) = \lambda_d(A) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{B}_d \quad (4.27)$$

folgt. Der dritte Spezialfall sind *transponierte Frobeniusmatrizen*: Seien $g_2, \dots, g_d \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren die Matrix $G \in \mathbb{R}^{d \times d}$ durch

$$g_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = m, \\ g_m & \text{falls } m > 1, n = 1, \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases} \quad \text{für alle } n, m \in \{1, \dots, d\}.$$

Für einen nicht-leeren Quader $Q = [a, b[\subseteq \mathbb{R}^d$ gilt

$$G([a_1, b_1[\times \{(y_1, \dots, y_{d-1})\}) = \left[a_1 + \sum_{\iota=2}^d g_\iota y_{\iota-1}, b_1 + \sum_{\iota=2}^d g_\iota y_{\iota-1} \right[\times \{(y_1, \dots, y_{d-1})\}$$

für alle $(y_1, \dots, y_{d-1}) \in [a_2, b_2[\times \dots \times [a_d, b_d[$,

also kennen wir die y -Schnitte von $G(Q)$, und mit dem Satz 4.33 über das Produktmaß und mit der Translationsinvarianz folgt

$$\begin{aligned} \lambda_d(G(Q)) &= \int \lambda_1 \left(\left[a_1 + \sum_{\iota=2}^d g_\iota y_{\iota-1}, b_1 + \sum_{\iota=2}^d g_\iota y_{\iota-1} \right[\right) d\lambda_{d-1}(y) \\ &= \int \lambda_1([a_1, b_1[) d\lambda_{d-1}(y) = \lambda_d(Q), \end{aligned}$$

so dass wir mit Folgerung 2.35 wieder

$$\lambda_d(G(A)) = \lambda_d(A) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{B}_d \quad (4.28)$$

erhalten. Jetzt können wir uns der gewünschten Aussage zuwenden. Wir zeigen

$$\lambda_d(T(A)) = |\det T| \lambda_d(A) \quad \text{für alle } d \in \mathbb{N}, A \in \mathfrak{B}_d, T \in \mathbb{R}^{d \times d} \text{ regulär} \quad (4.29)$$

per Induktion über d .

Sei zunächst $d = 1$. Wir wählen wieder einen nicht-leeren Quader $Q = [a, b[$. Falls $t_{11} \geq 0$ gilt, erhalten wir

$$\lambda_1(T(Q)) = \lambda_1([t_{11}a_1, t_{11}b_1[) = t_{11}b_1 - t_{11}a_1 = t_{11}(b_1 - a_1) = t_{11}\lambda_1(Q).$$

Im Fall $t_{11} < 0$ dagegen folgt

$$\lambda_1(T(Q)) = \lambda_1([t_{11}b_1, t_{11}a_1[) = t_{11}a_1 - t_{11}b_1 = -t_{11}(b_1 - a_1) = -t_{11}\lambda_1(Q),$$

so dass wir wie zuvor Folgerung 2.35 verwenden können.

Gelte nun (4.29) für ein $d \in \mathbb{N}$. Wir untersuchen zunächst den Spezialfall einer *Block-diagonalmatrix*

$$D = \begin{pmatrix} t_{11} & \\ & \hat{T} \end{pmatrix}, \quad \hat{T} \in \mathbb{R}^{d \times d} \text{ regulär.}$$

Sei $Q = [a, b[\subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ ein nicht-leerer Quader. Wir setzen $\hat{Q} := [a_2, b_2[\times \dots \times [a_{d+1}, b_{d+1}[$ und erhalten mit der Induktionsvoraussetzung $\lambda_d(\hat{T}(\hat{Q})) = |\det \hat{T}| \lambda_d(\hat{Q})$, also nach Definition des LEBESGUE-Maßes auch

$$\begin{aligned} \lambda_{d+1}(D(Q)) &= \lambda_{d+1}((t_{11}[a_1, b_1[) \times (\hat{T}(\hat{Q}))) = \lambda_1(t_{11}[a_1, b_1[) \lambda_d(\hat{T}(\hat{Q})) \\ &= |t_{11}| \lambda_1([a_1, b_1[) |\det \hat{T}| \lambda_d(\hat{Q}) = |t_{11} \det \hat{T}| \lambda_{d+1}(Q) = |\det D| \lambda_{d+1}(Q), \end{aligned}$$

4 Eigenschaften des Integrals

so dass wir wieder mit Folgerung 2.35 die Gleichung

$$\lambda_{d+1}(D(A)) = |\det D| \lambda_{d+1}(A) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{B}_{d+1} \quad (4.30)$$

gezeigt haben. Sei nun $T \in \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$ eine reguläre Matrix. Da die erste Spalte der Matrix nicht gleich null sein kann, muss eine Permutation P so existieren, dass der linke obere Eintrag der Matrix $S := PT$ ungleich null ist. Unser Ziel ist es, diese Matrix als Produkt einer Frobeniusmatrix, einer Blockdiagonalmatrix und einer transponierten Frobeniusmatrix darzustellen. Indem wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s_{11} & S_{1*} \\ S_{*1} & S_{**} \end{pmatrix} &= S = FDG = \begin{pmatrix} 1 & \\ F_{*1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & \\ & \widehat{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & G_{1*} \\ & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{11}G_{1*} \\ F_{*1}d_{11} & F_{*1}d_{11}G_{1*} + \widehat{T} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

auflösen, erhalten wir

$$F_{*1} = S_{*1}/d_{11}, \quad G_{1*} = S_{1*}/d_{11}, \quad \widehat{T} = S_{**} - F_{*1}d_{11}G_{1*}.$$

Insbesondere gilt $0 \neq \det S = d_{11} \det \widehat{T} = \det D$, also muss auch $\widehat{T} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ regulär sein, so dass wir für D die Gleichung (4.30) zur Verfügung haben. Für $A \in \mathfrak{A}$ folgt mit (4.26), (4.27), (4.30) und (4.28) die Gleichung

$$\begin{aligned} \lambda_{d+1}(T(A)) &= \lambda_{d+1}(PT(A)) = \lambda_{d+1}(S(A)) = \lambda_{d+1}(FDG(A)) = \lambda_{d+1}(DG(A)) \\ &= |\det D| \lambda_{d+1}(G(A)) = |\det D| \lambda_{d+1}(A) = |\det T| \lambda_{d+1}(A), \end{aligned}$$

also ist der Induktionsbeweis vollständig. ■

Dieses Resultat lässt sich auf beliebige Diffeomorphismen übertragen, also auf stetig differenzierbare bijektive Abbildungen mit in jedem Punkt invertierbarer Ableitung.

Da wir im Folgenden ausschließlich das LEBESGUE-Maß untersuchen, fixieren wir ein $d \in \mathbb{N}$ und kürzen λ_d mit λ ab und \mathfrak{B}_d mit \mathfrak{A} ab.

Um die Veränderung des Maßes einschätzen zu können, bietet es sich dabei an, auf dessen Monotonizität (2.14) zurückzugreifen: Wenn wir für das Bild eines Quaders unter der Abbildung zwei Quader finden können, von denen der eine im Bild enthalten ist und der andere das Bild enthält, können wir das durch den JORDAN-Inhalt induzierte LEBESGUE-Maß nach unten und oben abschätzen.

Wie schon in Satz 2.13 können wir jeden Würfel als „Kugel“ bezüglich der Maximumnorm behandeln. Indem wir die einzelnen Achsen unterschiedlich skalieren, wird auch ein beliebiger Quader zu einer „Kugel“ bezüglich einer modifizierten Norm. Da nach dem Satz von HEINE-BOREL alle Normen auf \mathbb{R}^d äquivalent sind, bleiben bei Verwendung dieser an das Problem angepassten Norm alle für uns relevanten Eigenschaften unverändert, aber die Präsentation wird erheblich vereinfacht.

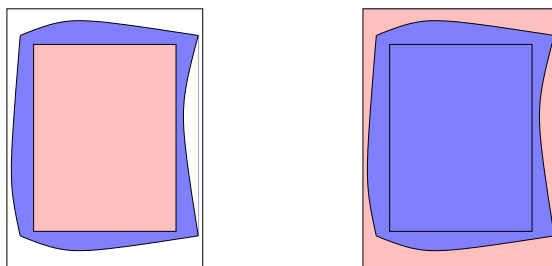


Abbildung 4.2: Das Bild $g(Q)$ eines Quaders (blau) enthält einen Quader (links) und ist in einem weiteren Quader (rechts) enthalten, also muss sein LEBESGUE-Maß zwischen den Maßen der beiden Quader liegen.

Lemma 4.43 (Deformierte Kugel) Sei $\epsilon \in [0, 1[$. Sei $g : K(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Abbildung der d -dimensionalen Einheitskugel, die

$$g(0) = 0, \quad Dg(0) = I, \quad \|Dg(x) - Dg(0)\| \leq \epsilon \quad \text{für alle } x \in K(0, 1)$$

erfüllt. Dann gilt

$$K(0, 1 - \epsilon) \subseteq g(K(0, 1)) \subseteq K(0, 1 + \epsilon).$$

Beweis. (vgl. [5, Lemma XIV.1.3]) Seien $y, z \in K(0, 1)$. Dann gilt nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$g(y) - g(z) = \int_0^1 Dg(z + (y - z)s)(y - z) ds,$$

und nach Mittelwertsatz der Integralrechnung finden wir ein $\eta \in [0, 1]$ mit

$$g(y) - g(z) = Dg(z + (y - z)\eta)(y - z) = (y - z) + (Dg(z + (y - z)\eta) - Dg(0))(y - z),$$

also folgt

$$\begin{aligned} \|(y - z) - (g(y) - g(z))\| &= \|(Dg(z + (y - z)\eta)(y - z) - Dg(0))(y - z)\| \\ &\leq \|Dg(z + (y - z)\eta)(y - z) - Dg(0)\| \|y - z\| \leq \epsilon \|y - z\|. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Für jedes $x \in K(0, 1)$ erhalten wir damit wegen $g(0) = 0$ die Abschätzung

$$\|g(x)\| = \|x - x + g(x)\| \leq \|x\| + \|x - g(x)\| \leq 1 + \epsilon,$$

also $g(K(0, 1)) \subseteq K(0, 1 + \epsilon)$.

Sei nun $x \in K(0, 1 - \epsilon)$ gegeben. Wir suchen ein $y \in K(0, 1)$ mit

$$x = g(y) \iff 0 = x - g(y) \iff y = y - g(y) + x.$$

Diese Fixpunktgleichung lösen wir mit dem Fixpunktsatz von BANACH (vgl. Erinnerung 5.7). Wir definieren

$$\Phi : K(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad y \mapsto y - g(y) + x,$$

4 Eigenschaften des Integrals

und stellen zunächst fest, dass mit (4.31) und $g(0) = 0$ die Abschätzung

$$\|\Phi(y)\| = \|y - g(y) + x\| \leq \|y - g(y)\| + \|x\| \leq \epsilon\|y\| + 1 - \epsilon \leq 1 \quad \text{für alle } y \in K(0, 1)$$

gilt, also bildet Φ die Einheitskugel in sich ab. Um nachzuweisen, dass Φ eine Kontraktion ist, wählen wir $y, z \in K(0, 1)$ und erhalten mit (4.31) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\Phi(y) - \Phi(z)\| &= \|y - g(y) + x - z + g(z) - x\| = \|y - z - (g(y) - g(z))\| \\ &\leq \epsilon\|y - z\| \quad \text{für alle } y, z \in K(0, 1). \end{aligned}$$

Also muss nach Fixpunktsatz ein $y \in K(0, 1)$ mit $y = \Phi(y)$ existieren, also mit $x = g(y)$. Damit ist $K(0, 1 - \epsilon) \subseteq g(K(0, 1))$ bewiesen. ■

Mit Hilfe dieser Aussage können wir nun eine Formel für das LEBESGUE-Maß des Bilds eines Quaders unter einem Diffeomorphismus gewinnen:

Lemma 4.44 (Deformierte Quader) *Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Quader. Sei $g : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine injektive stetig differenzierbare Abbildung mit in jedem Punkt invertierbarer Ableitung. Dann gilt*

$$\lambda(g(Q)) = \int_Q |\det Dg| d\lambda.$$

Beweis. (vgl. [5, Theorem XXI.2.4]) Für den leeren Quader ist die Aussage trivial, deshalb gehen wir im Folgenden davon aus, dass $Q \neq \emptyset$ gilt.

Seien $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $Q = [a, b[$ gegeben. Mit

$$\ell_\iota := b_\iota - a_\iota > 0 \quad \text{für alle } \iota \in \{1, \dots, d\}$$

definieren wir eine Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^d durch

$$\|x\| := \max\{2|x_\iota|/\ell_\iota : \iota \in \{1, \dots, d\}\} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Nach dem Satz von HEINE-BOREL ist diese Norm zu jeder beliebigen anderen Norm äquivalent, besitzt aber die für uns interessante Eigenschaft, dass

$$\overline{[a, b[} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - m\| \leq 1\} = \bar{K}(m, 1), \quad m := (a + b)/2$$

gilt, der Quader Q sich also als abgeschlossene Kugel des Radius 1 um seinen Mittelpunkt m darstellen lässt.

Die totale Ableitung $Dg(x)$ ist nach Voraussetzung für alle $x \in \bar{Q}$ invertierbar, also muss nach Umkehrsatz die Abbildung $x \mapsto Dg(x)^{-1}$ stetig sein. Auf der kompakten Menge \bar{Q} muss deshalb die Norm dieser Abbildung beschränkt sein, so dass wir eine Konstante

$$C := \max\{\|Dg(x)^{-1}\| : x \in \bar{Q}\} < \infty \quad (4.32)$$

finden können. Sei nun $\epsilon \in]0, 1/C[$ gegeben. Da Dg stetig ist, muss es auf der kompakten Menge \bar{Q} auch gleichmäßig stetig sein, wir können also ein $\delta_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ so finden, dass

$$\|x - y\| < \delta_1 \Rightarrow \|Dg(x) - Dg(y)\| < \epsilon \quad \text{für alle } x, y \in \bar{Q} \quad (4.33)$$

gilt. Indem wir dieselbe Argumentation auf $\det Dg$ anwenden, finden wir auch ein $\delta_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\|x - y\| < \delta_2 \Rightarrow |\det Dg(x) - \det Dg(y)| < \epsilon \quad \text{für alle } x, y \in \bar{Q}. \quad (4.34)$$

Unser Ziel besteht darin, den Quader Q in Teilquader zu zerlegen, die so klein sind, dass sich dank (4.33) und (4.34) die Ableitung und ihre Determinante auf ihnen kaum noch ändert, so dass sich Lemma 4.43 anwenden lässt.

Sei also $k \in \mathbb{N}$ mit $1/k < \delta_1$ und $1/k < \delta_2$ gewählt. Wir zerlegen Q regelmäßig in k^d disjunkte Teilquader, indem wir jede Kante des Quaders in k gleichgroße Segmente zerlegen:

$$\begin{aligned} h &:= (b - a)/k, \\ Q_\nu &:= [a_1 + h_1(\nu_1 - 1), a_1 + h_1\nu_1[\times \dots \times [a_d + h_d(\nu_d - 1), a_d + h_d\nu_d[\\ &\quad \text{für alle } \nu \in K := \{1, \dots, k\}^d. \end{aligned}$$

Auch diese Quader lassen sich dank der speziellen Wahl unserer Norm als Kugeln interpretieren: Sei $\nu \in K$, und sei \mathbf{m}_ν der Mittelpunkt des Quaders Q_ν . Dann erhalten wir

$$\bar{Q}_\nu = \bar{K}(\mathbf{m}_\nu, 1/k).$$

Wir untersuchen das Bild von Q_ν unter der Abbildung g . Um Lemma 4.43 anwenden zu können, verschieben wir Q_ν zunächst in den Nullpunkt, indem wir $g(\mathbf{m}_\nu)$ subtrahieren:

$$g(Q_\nu) - g(\mathbf{m}_\nu).$$

Dann multiplizieren wir mit der Inversen der Ableitung $Dg(\mathbf{m}_\nu)$, um sicher zu stellen, dass auch die Ableitungsbedingung des Lemmas erfüllt ist:

$$Dg(\mathbf{m}_\nu)^{-1}(g(Q_\nu) - g(\mathbf{m}_\nu)).$$

Da das Lemma sich auf $K(0, 1)$ bezieht, skalieren wir Q_ν schließlich mit k . Insgesamt erhalten wir so die Hilfsabbildung

$$\hat{g}_\nu : K(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \hat{x} \mapsto kDg(\mathbf{m}_\nu)^{-1}(g(\mathbf{m}_\nu + \hat{x}/k) - g(\mathbf{m}_\nu)),$$

die die Bedingungen

$$\begin{aligned} \hat{g}_\nu(0) &= kDg(\mathbf{m}_\nu)^{-1}(g(\mathbf{m}_\nu) - g(\mathbf{m}_\nu)) = 0, \\ D\hat{g}_\nu(0) &= kDg(\mathbf{m}_\nu)^{-1}Dg(\mathbf{m}_\nu)(\hat{x}/k) = I, \\ \|D\hat{g}_\nu(\hat{x}) - I\| &= k\|Dg(\mathbf{m}_\nu)^{-1}Dg(\mathbf{m}_\nu + \hat{x}/k)(\hat{x}/k)\| \leq C\epsilon \quad \text{für alle } \hat{x} \in K(0, 1) \end{aligned}$$

erfüllt, auf die wir also Lemma 4.43 anwenden dürfen. Wir erhalten

$$K(0, 1 - C\epsilon) \subseteq \hat{g}_\nu(K(0, 1)) \subseteq K(0, 1 + C\epsilon). \quad (4.35)$$

4 Eigenschaften des Integrals

Nach Definition gilt

$$\hat{g}_\nu(K(0, 1)) = kDg(m_\nu)^{-1}(g(K(m_\nu, 1/k)) - g(m_\nu)),$$

also können wir (4.35) mit k multiplizieren, um

$$K(0, (1 - C\epsilon)/k) \subseteq Dg(m_\nu)^{-1}(g(K(m_\nu, 1/k)) - g(m_\nu)) \subseteq K(0, (1 + C\epsilon)/k)$$

zu erhalten, und die Multiplikation mit $Dg(m_\nu)$ führt uns zu

$$Dg(m_\nu)K(0, (1 - C\epsilon)/k) \subseteq g(K(m_\nu, 1/k)) - g(m_\nu) \subseteq Dg(m_\nu)K(0, (1 + C\epsilon)/k).$$

Mit Lemma 4.42 und (2.14) folgt die untere Abschätzung

$$\begin{aligned} \lambda(g(Q_\nu)) &= \lambda(g(Q_\nu) - g(m_\nu)) = \lambda(g(K(m_\nu, 1/k)) - g(m_\nu)) \\ &\geq |\det Dg(m_\nu)|\lambda(K(0, (1 - C\epsilon)/k)) = |\det Dg(m_\nu)|(1 - C\epsilon)^d\lambda(K(0, 1/k)) \\ &= |\det Dg(m_\nu)|(1 - C\epsilon)^d\lambda(K(m_\nu, 1/k)) = |\det Dg(m_\nu)|(1 - C\epsilon)^d\lambda(Q_\nu). \end{aligned}$$

Wir können entsprechend verfahren, um die obere Abschätzung

$$\lambda(g(Q_\nu)) \leq |\det Dg(m_\nu)|(1 + C\epsilon)^d\lambda(Q_\nu)$$

zu erhalten. Da g bijektiv ist, können wir mit (2.21b) folgern, dass

$$\begin{aligned} (1 - C\epsilon)^d \sum_{\nu \in K} |\det Dg(m_\nu)|\lambda(Q_\nu) &\leq \lambda(g(Q)) \\ &\leq (1 + C\epsilon)^d \sum_{\nu \in K} |\det Dg(m_\nu)|\lambda(Q_\nu) \end{aligned}$$

gilt. Indem wir

$$f_\epsilon := \sum_{\nu \in K} |\det Dg(m_\nu)|\mathbf{1}_{Q_\nu}$$

definieren, nimmt diese Abschätzung die Form

$$(1 - C\epsilon)^d \int f_\epsilon d\lambda \leq \lambda(g(Q)) \leq (1 + C\epsilon)^d \int f_\epsilon d\lambda \quad (4.36)$$

an. Damit muss insbesondere $\lambda(g(Q)) < \infty$ gelten.

Wir untersuchen den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$. Aus (4.36) folgt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f_\epsilon d\lambda = \lambda(g(Q)),$$

also müssen nach dem Lemma 4.10 von FATOU die Funktionen f_ϵ einen punktweisen Limes inferior besitzen, der λ -integrierbar ist. Nach (4.34) gilt

$$|\det Dg(x) - \det Dg(m_\nu)| \leq \epsilon \quad \text{für alle } x \in Q_\nu, \nu \in K$$

also konvergieren die Funktionen f_ϵ für $\epsilon \rightarrow 0$ sogar gleichmäßig gegen $|\det Dg|$. ■

Unser Ziel besteht darin, diese Aussage von Quadern auf allgemeine BOREL-Mengen $A \in \mathfrak{A}$ zu übertragen. Dazu können wir ähnlich wie im Fall des Produktmaßes vorgehen, indem wir das Integrationsgebiet durch Mengen mit geeigneten Eigenschaften ausschöpfen und nachprüfen, dass dadurch ein Maß definiert wird.

Der Einfachheit halber behandeln wir nur den vollständigen Raum $\Omega = \mathbb{R}^d$, Einschränkungen der folgenden Resultate auf Teilmengen $\widehat{\Omega}$ lassen sich relativ einfach gewinnen, indem wir zu der *Spur- σ -Algebra*

$$\mathfrak{A}|_{\widehat{\Omega}} := \{A \cap \widehat{\Omega} : A \in \mathfrak{A}\}$$

übergehen und das Maß entsprechend einschränken. Da die Quader \mathfrak{A} erzeugen, erzeugen die Schnitte der Quader mit $\widehat{\Omega}$ gerade $\mathfrak{A}|_{\widehat{\Omega}}$, so dass unsere Aussagen gültig bleiben.

Erinnerung 4.45 (Diffeomorphismen) *Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ offene Mengen. Eine Abbildung $g : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ heißt C^1 -Diffeomorphismus, falls sie*

- *bijektiv sowie*
- *in jedem Punkt $x \in \Omega_1$ stetig differenzierbar mit*
- *invertierbarer Ableitung $Dg(x)$ ist.*

Mit dem Umkehrsatz folgt, dass dann auch g^{-1} ein C^1 -Diffeomorphismus ist.

Lemma 4.46 (Transformiertes Maß) *Sei g ein C^1 -Diffeomorphismus. Es gibt genau ein Maß $\hat{\lambda} : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$, das*

$$\hat{\lambda}(A) = \lambda(g(A)) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}, \quad (4.37a)$$

$$\hat{\lambda}(A) = \int \mathbf{1}_A |\det Dg| d\lambda \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A} \text{ mit } \hat{\lambda}(A) < \infty \quad (4.37b)$$

erfüllt.

Beweis. Wir definieren

$$\widehat{\Omega}_n := [-n, n]^d \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und stellen fest, dass $(\widehat{\Omega}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge kompakter Mengen bildet, deren Vereinigung Ω ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ nimmt $|\det Dg|$ ein endliches Maximum auf $\widehat{\Omega}_n$ an. Außerdem gilt $\lambda(\widehat{\Omega}_n) = (2n)^d < \infty$, so dass

$$\hat{\lambda}^{(n)}(A) := \int \mathbf{1}_{A \cap \widehat{\Omega}_n} |\det Dg| d\lambda \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A} \quad (4.38)$$

nach Satz 4.11 wohldefiniert ist. Wir setzen

$$\hat{\lambda}(A) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \hat{\lambda}^{(n)}(A) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}$$

4 Eigenschaften des Integrals

und weisen nach, dass es sich dabei um ein Maß handelt. Offenbar gilt $\hat{\lambda}(\emptyset) = 0$, also (2.21a). Sei $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter Mengen in \mathfrak{A} . Es gilt

$$\sum_{m=1}^k \mathbf{1}_{\hat{\Omega}_n \cap A_m} |\det Dg| \leq \mathbf{1}_{\hat{\Omega}_n} |\det Dg| \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N},$$

also folgt mit dem Satz 4.11 und (2.23a) auch

$$\hat{\lambda}^{(n)} \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \hat{\lambda}^{(n)}(A_m) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so dass wir

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \right) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \hat{\lambda}^{(n)} \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \right) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \hat{\lambda}^{(n)}(A_m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \hat{\lambda}^{(n)}(A_m) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \hat{\lambda}(A_m) \end{aligned}$$

erhalten, und damit (2.21b). Also ist $\hat{\lambda}$ ein Maß.

Sei $A \in \mathfrak{A}$ mit $\hat{\lambda}(A) < \infty$ gegeben. Dann folgt mit dem Satz 4.4, dass die Funktionen $\mathbf{1}_{A \cap \hat{\Omega}_n} |\det Dg|$ in (4.38) punktweise λ -fast überall konvergieren. Offenbar können sie nur gegen $\mathbf{1}_A |\det Dg|$ konvergieren, also ist (4.37b) gezeigt.

Da g^{-1} als stetige Funktion nach Lemma 3.5 auch messbar ist, ist $A \mapsto \lambda(g(A))$ ebenfalls ein Maß, und nach Lemma 4.44 stimmen $\hat{\lambda}(Q)$ und $\lambda(g(Q))$ für alle Quader $Q \in \mathfrak{A}$ überein. Mit der Eindeutigkeitsaussage der Folgerung 2.35 erhalten wir, dass beide übereinstimmen müssen, also gilt auch (4.37a). ■

Satz 4.47 (Variablentransformation) Sei $g : \Omega \rightarrow \Omega$ ein C^1 -Diffeomorphismus, und sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Es gilt $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \lambda)$ genau dann, wenn $f \circ g | \det Dg| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \lambda)$ gilt, und in diesem Fall stimmen die Integrale überein:

$$\int f \, d\lambda = \int f \circ g | \det Dg| \, d\lambda.$$

Beweis. Wir untersuchen zunächst λ -Treppenfunktionen

$$f = \sum_{m=1}^k f_m \mathbf{1}_{A_m}.$$

Indem wir

$$B_m := g^{-1}(A_m) \quad \text{für alle } m \in \{1, \dots, k\}$$

setzen, folgt mit der Bijektivität der Abbildung g auch $g(B_m) = A_m$, also

$$f = \sum_{m=1}^k f_m \mathbf{1}_{g(B_m)}.$$

Für das Integral erhalten wir mit Lemma 4.46 so

$$\begin{aligned}
\int f \, d\lambda &= \sum_{m=1}^k f_m \lambda(g(B_m)) = \sum_{m=1}^k f_m \int \mathbf{1}_{B_m} |\det Dg| \, d\lambda \\
&= \int \sum_{m=1}^k f_m \mathbf{1}_{B_m} |\det Dg| \, d\lambda = \int \sum_{m=1}^k f_m \mathbf{1}_{A_m} \circ g |\det Dg| \, d\lambda \\
&= \int f \circ g |\det Dg| \, d\lambda,
\end{aligned} \tag{4.39}$$

also die gewünschte Gleichung.

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \lambda)$. Nach Definition 3.33 existiert dann eine L^1 -CAUCHY-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von λ -Treppenfunktionen, die außerhalb einer λ -Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ punktweise gegen f konvergiert. Entsprechend (4.39) setzen wir

$$\hat{f}_n := f \circ g |\det Dg| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und stellen fest, dass wegen

$$|\hat{f}_n - \hat{f}_m|_{L^1} = \int |\hat{f}_n - \hat{f}_m| \circ g |\det Dg| \, d\lambda = \int |f_n - f_m| \, d\lambda \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}$$

auch $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine L^1 -CAUCHY-Folge ist. Offenbar konvergiert diese Folge außerhalb der Menge $g^{-1}(N)$ gegen $f \circ g |\det Dg|$, wir müssen also nur noch zeigen, dass $g^{-1}(N)$ eine λ -Nullmenge ist. Diese Eigenschaft erhalten wir, indem wir Lemma 4.46 auf g^{-1} anwenden, also ist $f \circ g |\det Dg|$ integrierbar und erfüllt nach (4.39) die behauptete Gleichung.

Sei nun $f \circ g |\det Dg| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \lambda)$. Indem wir die Ergebnisse des vorigen Beweisschritts auf g^{-1} statt g anwenden, folgt $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \lambda)$. ■

Bemerkung 4.48 (Teilmengen) *In der Praxis arbeitet man häufig mit Diffeomorphismen, die nicht auf dem gesamten Raum \mathbb{R}^d stetig differenzierbar sind. Nach Satz 2.13 lässt sich jede offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ als Vereinigung abzählbar vieler Quader darstellen, so dass sich die Argumentation des Lemmas 4.46 und das Ergebnis des darauf aufbauenden Satzes 4.47 auf den allgemeineren Fall eines C^1 -Diffeomorphismus von Ω auf $g(\Omega)$ übertragen lässt.*

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(g(\Omega), \lambda)$ äquivalent zu $f \circ g |\det Dg| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \lambda)$, und die Transformationsformel nimmt in diesem Fall die Gestalt

$$\int_{g(\Omega)} f \, d\lambda = \int_{\Omega} f \circ g |\det Dg| \, d\lambda$$

an. Ein wichtiger Unterschied zu dem bisherigen Resultat besteht darin, dass sich im allgemeinen Fall die Integrationsgebiete unterscheiden.

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

In diesem Kapitel wenden wir uns der Untersuchung gewöhnlicher Differentialgleichungen zu. Differentialgleichungen spielen sowohl bei vielen Fragestellungen innerhalb der Mathematik als auch bei Aufgaben aus den Natur-, den Ingenieur- oder auch Wirtschaftswissenschaften eine Rolle: Beispielsweise wird in der Physik die Geschwindigkeit eines Objekts als Ableitung ihres Orts nach der Zeit charakterisiert. Falls die Geschwindigkeit gegeben ist, müssen wir den Ableitungsvorgang „umkehren“, um den Ort des Objekts zu einem bestimmten Zeitpunkt zu bestimmen. Häufig wird die Geschwindigkeit vom Ort abhängen, beispielsweise wenn ein Fahrzeug bergauf langsamer als bergab fährt, so dass sich die Lösung nicht einfach mit Hilfe des Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung bestimmen lässt, sondern aufwendigere Techniken erforderlich werden.

Mit dem Wort „gewöhnlich“ wird dabei ausgedrückt, dass die Lösung auf einem Intervall definiert ist, also nur von einer einzelnen Variablen abhängt. Dank dieser Einschränkung lässt sich eine relativ allgemeine Theorie entwickeln, die nicht nur Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen bietet, sondern auch über die Abhängigkeit der Lösungen von Parametern. Wir konzentrieren uns in diesem Kapitel auf die grundlegenden Ideen und Resultate.

5.1 Problemstellung

Als Beispiel untersuchen wir die Bewegung eines Objekts im Gravitationsfeld zweier Massen, beispielsweise die eines Raumschiffs, das von der Erde zum Mond fliegen soll. Wir bezeichnen mit $x_e \in \mathbb{R}^3$ die Position der Erde und mit $m_e \in \mathbb{R}_{>0}$ ihre Masse, für die Position des Mondes verwenden wir entsprechend $x_m \in \mathbb{R}^3$ und $m_m \in \mathbb{R}_{>0}$. Wenn sich das Raumschiff mit einer Masse $m_r \in \mathbb{R}_{>0}$ zu einem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ an einem Ort $x(t) \in \mathbb{R}^3$ befindet, sind die Gravitationskräfte nach NEWTON durch

$$F(t) = \gamma m_r \left(m_e \frac{x_e - x(t)}{\|x_e - x(t)\|_2^3} + m_m \frac{x_m - x(t)}{\|x_m - x(t)\|_2^3} \right)$$

gegeben, wobei $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ die Gravitationskonstante ist.

Die Axiome der klassischen Mechanik besagen, dass die *Geschwindigkeit* $v(t)$ des Raumschiffs die Ableitung des *Orts* nach der Zeit ist, dass also

$$v(t) = x'(t)$$

gilt, und dass die *Beschleunigung* $a(t)$ die Ableitung der Geschwindigkeit ist, dass also auch

$$a(t) = v'(t)$$

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

gilt. Die Beschleunigung schließlich ergibt sich aus der wirkenden Kraft durch

$$m_r a(t) = F(t),$$

so dass wir insgesamt das System

$$x'(t) = v(t), \tag{5.1a}$$

$$v'(t) = a(t), \tag{5.1b}$$

$$a(t) = \gamma \left(m_e \frac{x_e - x(t)}{\|x_e - x(t)\|_2^3} + m_m \frac{x_m - x(t)}{\|x_m - x(t)\|_2^3} \right) \tag{5.1c}$$

erhalten. Indem wir $v(t)$ und $a(t)$ eliminieren, gelangen wir zu der kompakten Gleichung

$$x''(t) = \gamma \left(m_e \frac{x_e - x(t)}{\|x_e - x(t)\|_2^3} + m_m \frac{x_m - x(t)}{\|x_m - x(t)\|_2^3} \right),$$

die die zweite Ableitung der Funktion x an die Werte der Funktion koppelt. Diese Gleichung ist ein Beispiel für eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Definition 5.1 (Gewöhnliche Differentialgleichung) Sei $d \in \mathbb{N}$, sei $m \in \mathbb{N}$, und seien offene Mengen $\Omega_0, \dots, \Omega_m \subseteq \mathbb{R}^d$ sowie ein nicht-leeres Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gegeben. Sei eine Funktion

$$g : I \times \Omega_0 \times \dots \times \Omega_{m-1} \rightarrow \Omega_m$$

fixiert. Eine differenzierbare Funktion $x : I \rightarrow \Omega_0$ bezeichnen wir als Lösung der durch g gegebenen gewöhnlichen Differentialgleichung, falls

$$x^{(m)}(t) = g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m-1)}(t)) \quad \text{für alle } t \in I, \tag{5.2a}$$

$$x^{(\ell)}(t) \in \Omega_\ell \quad \text{für alle } t \in I, \ell \in \{0, \dots, m-1\} \tag{5.2b}$$

gelten. In diesem Kontext nennt man m die Ordnung der Differentialgleichung.

Offenbar führt das Beispiel des Raumschiffs im Gravitationsfeld zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung, indem wir $\Omega_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{m_e, m_m\}$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}^3$ und

$$g : I \times \Omega_0 \times \Omega_1 \rightarrow \Omega_2, \quad (t, x, v) \mapsto \gamma \left(m_e \frac{x_e - x(t)}{\|x_e - x(t)\|_2^3} + m_m \frac{x_m - x(t)}{\|x_m - x(t)\|_2^3} \right),$$

setzen. Für die theoretische Untersuchung gewöhnlicher Differentialgleichungen ist es wünschenswert, sich auf den Fall $m = 1$ beschränken zu können. Glücklicherweise lässt sich jede gewöhnliche Differentialgleichung auf eine äquivalente Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen: In der ursprünglichen Form (5.1) des Raumschiff-Beispiels traten nur erste Ableitungen auf, allerdings auch zusätzliche Variablen. Diese

zusätzlichen Variablen können wir auch allgemein verwenden: Wenn x Lösung der durch eine Abbildung

$$g : I \times \Omega_0 \times \dots \times \Omega_{m-1} \rightarrow \Omega_m$$

gegebenen gewöhnlichen Differentialgleichung m -ter Ordnung ist, führen wir die Hilfsfunktion

$$y(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in I$$

ein und stellen fest, dass sie die Gleichung

$$y'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(m)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ g(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in I$$

erfüllt. y ist also die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung *erster* Ordnung, die sich mit Hilfe der Funktion

$$f_g : I \times \Omega \rightarrow \Omega', \quad (t, z) \mapsto \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ g(t, z_1, z_2, \dots, z_m) \end{pmatrix}$$

und der Mengen

$$\Omega := \Omega_0 \times \dots \times \Omega_{m-1}, \quad \Omega' := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_m$$

in der gewohnten Form

$$y(t) \in \Omega, \quad y'(t) = f_g(t, y(t)), \quad \text{für alle } t \in I \quad (5.3)$$

schreiben lässt. Wir dürfen uns also darauf beschränken, gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung zu untersuchen.

Definition 5.2 (Vektorfeld) Sei $d \in \mathbb{N}$, sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Eine Abbildung

$$v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

nennen wir ein Vektorfeld.

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall. Eine Abbildung

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

nennen wir ein zeitabhängiges Vektorfeld. Wir können es als eine Abbildung interpretieren, die jedem „Zeitpunkt“ $t \in I$ ein Vektorfeld $v = f(t, \cdot)$ zuordnet.

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

In der Regel ist die Lösung y durch (5.3) noch nicht eindeutig festgelegt: die Gleichung

$$y'(t) = 2t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

beispielsweise wird durch $y(t) = t^2 + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ gelöst. Um die Eindeutigkeit sicher zu stellen, wird deshalb in der Regel eine zusätzliche Bedingung an y gestellt, beispielsweise dass $y(a)$ einen bestimmten Wert annimmt.

Definition 5.3 (Anfangswertproblem) Sei $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein zeitabhängiges Vektorfeld, und seien $a \in I$ und $y_0 \in \Omega$ gegeben. Eine differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \Omega$ bezeichnen wir als Lösung des durch f , a und y_0 gegebenen Anfangswertproblems, falls

$$y(a) = y_0, \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für alle } t \in I \quad (5.4)$$

gelten. In diesem Fall nennen wir a den Anfangszeitpunkt und y_0 den Anfangswert.

Anfangswertprobleme werden in der Praxis häufig verwendet, um das Verhalten eines Systems zu beschreiben: Die Elemente der Menge Ω beschreiben die Zustände, die das System annehmen kann, und die Funktion f beschreibt, wie sich die Zustände verändern. Das Lösen des Anfangswertproblems entspricht dann der Vorhersage des Verhaltens des Systems ausgehend von einem bekannten Zustand y_0 zu einem Zeitpunkt a . In unserem Beispiel (5.1) kann man so die Flugbahn des Raumschiffs voraussagen, sobald seine Ausgangsposition $x(a)$ und seine Anfangsgeschwindigkeit $v(a)$ bekannt sind.

5.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen ein Anfangswertproblem der Form (5.4) eine Lösung besitzt und ob diese Lösung eindeutig ist.

Ein sowohl für die Theorie als auch für die Praxis nützliches Hilfsmittel besteht darin, die Gleichung (5.4) in die Form einer *Integralgleichung* zu bringen, die ohne Ableitungen auskommt und sich deshalb einfacher analysieren lässt.

Für die folgenden Beweise müssen wir auf einige grundlegende Ergebnisse der Integral- und Differentialrechnung zurückgreifen. Ein sehr wichtiges Hilfsmittel in den folgenden Beweisen ist der *Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung*:

Erinnerung 5.4 (Integral- und Differentialrechnung) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s) ds.$$

Ein weiteres wesentliches Hilfsmittel ist der *Mittelwertsatz der Integralrechnung*:

Erinnerung 5.5 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $\eta \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(s) ds = (b - a)f(\eta).$$

Lemma 5.6 (Integralgleichung) Sei $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein stetiges zeitabhängiges Vektorfeld, und sei $y : I \rightarrow \Omega$ eine stetige Abbildung. y ist genau dann Lösung des Anfangswertproblems (5.4), wenn

$$y(t) = y_0 + \int_a^t f(s, y(s)) ds \quad \text{für alle } t \in I \quad (5.5)$$

gilt. Insbesondere ist y in diesem Fall stetig differenzierbar.

Beweis. Sei zunächst y Lösung des Anfangswertproblems (5.4), und sei $t \in I$. Nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung aus Erinnerung 5.4 gilt

$$y(t) - y_0 = y(t) - y(a) = \int_a^t y'(s) ds = \int_a^t f(s, y(s)) ds,$$

und indem wir y_0 auf beiden Seiten addieren folgt (5.5).

Gelte nun umgekehrt (5.5). Für $t = a$ verschwindet das Integral, und wir erhalten $y(a) = y_0$, also ist die erste Bedingung in (5.4) erfüllt. Sei nun $t \in I$ gegeben, und sei $h \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $t + h \in I$ gilt. Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung aus Erinnerung 5.5 erhalten wir

$$\begin{aligned} y(t+h) - y(t) &= y_0 + \int_a^{t+h} f(s, y(s)) ds - y_0 - \int_a^t f(s, y(s)) ds \\ &= \int_t^{t+h} f(s, y(s)) ds = hf(\eta_h, y(\eta_h)) \end{aligned}$$

für ein $\eta_h \in [t, t+h]$, also

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = f(\eta_h, y(\eta_h)).$$

Für $h \rightarrow 0$ konvergiert η_h gegen t , und da f und y stetige Funktionen sind, konvergiert dann die rechte Seite dieser Gleichung gegen $f(t, y(t))$. Also muss auch die linke Seite konvergieren, und damit ist y in t differenzierbar mit der durch

$$y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\eta_h, y(\eta_h)) = f(t, y(t))$$

gegebenen Ableitung. Da f und y stetig sind, muss auch y' stetig sein, also ist y in der Tat stetig differenzierbar. ■

Mit Hilfe der alternativen Formulierung des Anfangswertproblems als Integralgleichung können wir Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewinnen: Bei genauerer Betrachtung entpuppt sich die Gleichung (5.5) als *Fixpunktgleichung*, denn die Funktion y tritt auf beiden Seiten auf. Ein wichtiges Hilfsmittel für die Untersuchung solcher Gleichungen ist der *Fixpunktsatz von BANACH*:

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Erinnerung 5.7 (Fixpunktsatz von BANACH) Sei (E, δ) ein vollständiger metrischer Raum mit $E \neq \emptyset$. Sei $L \in [0, 1[$, und sei $\Phi : E \rightarrow E$ eine Abbildung, die

$$\delta(\Phi(x), \Phi(y)) \leq L\delta(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in E \quad (5.6)$$

erfüllt (solche Abbildungen bezeichnet man als Kontraktionen). Dann existiert genau ein $x_* \in E$ mit $\Phi(x_*) = x_*$. Für jedes $x_1 \in E$ konvergiert die durch

$$x_{n+1} := \Phi(x_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x_* .

Mit Hilfe der in Lemma 5.6 gewonnenen Integralgleichung und des Fixpunktsatzes können wir ein zentrales Existenzresultat für Anfangswertprobleme beweisen: Den Satz von PICARD und LINDELÖF.

Satz 5.8 (PICARD-LINDELÖF) Sei $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein stetiges zeitabhängiges Vektorfeld, sei $a \in I$ und $y_0 \in \Omega$. Seien $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $M, L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so gegeben, dass

$$\bar{K}(y_0, \epsilon) \subseteq \Omega, \quad (5.7a)$$

$$\|f(t, x)\| \leq M \quad \text{für alle } t \in I, x \in \bar{K}(y_0, \epsilon), \quad (5.7b)$$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad \text{für alle } t \in I, x_1, x_2 \in \bar{K}(y_0, \epsilon) \quad (5.7c)$$

gelten. Wir definieren $J := I \cap K(a, \epsilon/M)$. Dann existiert genau eine stetige Funktion $y : J \rightarrow \bar{K}(y_0, \epsilon) \subseteq \Omega$ so, dass (5.5) für alle $t \in J$ gilt. Nach Lemma 5.6 ist diese Funktion stetig differenzierbar und Lösung des Anfangswertproblems.

Beweis. (vgl. [4, Abschnitt 4.II], [7, Satz III.13.II] und [9]) Sei $\omega := \bar{K}(y_0, \epsilon)$. Nach Voraussetzung gilt $\omega \subseteq \Omega$. Auf dem Raum $\mathcal{F} := C(J, \omega)$ der stetigen Abbildungen von J nach ω definieren wir durch

$$\Phi[y](t) := y_0 + \int_a^t f(s, y(s)) ds \quad \text{für alle } y \in \mathcal{F}, t \in J \quad (5.8)$$

eine Abbildung $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Wir müssen nachweisen, dass Φ wohldefiniert ist, dass also für alle $y \in \mathcal{F}$ auch $\Phi[y] \in \mathcal{F}$ gilt. Sei $y \in \mathcal{F}$, und sei $t \in J$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\Phi[y](t) - y_0\| &= \left\| y_0 + \int_a^t f(s, y(s)) ds - y_0 \right\| \\ &= \left\| \int_a^t f(s, y(s)) ds \right\| \leq |t - a| M < \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon, \end{aligned}$$

also $\Phi[y](t) \in K(y_0, \epsilon) \subseteq \omega$. Für beliebige $t_1, t_2 \in J$ mit $t_1 \leq t_2$ erhalten wir

$$\|\Phi[y](t_2) - \Phi[y](t_1)\| = \left\| y_0 + \int_a^{t_2} f(s, y(s)) ds - y_0 - \int_a^{t_1} f(s, y(s)) ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} \|f(s, y(s))\| ds \leq |t_2 - t_1| M,$$

also ist $\Phi[y]$ sogar Lipschitz-stetig, und wir haben $\Phi[y] \in \mathcal{F}$ bewiesen.

Um den Fixpunktsatz von BANACH (vgl. Erinnerung 5.7) anwenden zu können, müssen wir nachweisen, dass die Abbildung Φ in einer geeigneten Metrik die Kontraktionseigenschaft (5.6) besitzt. Seien dazu $y_1, y_2 \in \mathcal{F}$ gegeben. Für $t \in J$ mit $t \geq a$ gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi[y_1](t) - \Phi[y_2](t)\| &= \left\| y_0 + \int_a^t f(s, y_1(s)) ds - y_0 - \int_a^t f(s, y_2(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_a^t \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\| ds \leq \int_a^t L \|y_1(s) - y_2(s)\| ds, \end{aligned}$$

während wir für $t \in J$ mit $t < a$ entsprechend

$$\|\Phi[y_1](t) - \Phi[y_2](t)\| \leq \int_t^a \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\| ds \leq \int_t^a L \|y_1(s) - y_2(s)\| ds$$

erhalten. Auf den ersten Blick bietet sich die Supremumsnorm an, um die rechte Seite dieses Ausdrucks zu beschränken. Wir können das Ergebnis allerdings verfeinern, indem wir eine geschickt *gewichtete* Supremumsnorm verwenden, nämlich die durch

$$\|y\|_e := \sup\{e^{-2L|s-a|} \|y(s)\| : s \in J\} \quad \text{für alle } y \in \mathcal{F}$$

definierte. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass es sich dabei tatsächlich um eine Norm handelt, und da $J \subseteq K(a, \epsilon/M)$ beschränkt ist, ist sie auch äquivalent zu der üblichen Supremumsnorm. Damit ist \mathcal{F} auch bezüglich der neuen Norm vollständig. Wir erhalten für $t \in J$ mit $t \geq a$

$$\begin{aligned} \|\Phi[y_1](t) - \Phi[y_2](t)\| &\leq \int_a^t L \|y_1(s) - y_2(s)\| ds \leq \int_a^t L e^{2L(s-a)} \|y_1 - y_2\|_e ds \\ &= \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_e \int_a^t 2L e^{2L(s-a)} ds = \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_e e^{2L(t-a)} \end{aligned}$$

sowie für $t \in J$ mit $t < a$ entsprechend

$$\begin{aligned} \|\Phi[y_1](t) - \Phi[y_2](t)\| &\leq \int_t^a L \|y_1(s) - y_2(s)\| ds \leq \int_t^a L e^{2L(a-s)} \|y_1 - y_2\|_e ds \\ &= \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_e \int_t^a 2L e^{2L(a-s)} ds = \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_e e^{2L(a-t)}. \end{aligned}$$

Indem wir beide Seiten mit $e^{-2L|t-a|}$ multiplizieren und das Supremum über alle $t \in J$ bilden, erhalten wir

$$\|\Phi[y_1] - \Phi[y_2]\|_e \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|_e \quad \text{für alle } y_1, y_2 \in \mathcal{F},$$

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

also ist Φ in der Tat eine Kontraktion. Mit dem Fixpunktsatz folgt, dass genau ein $y \in \mathcal{F}$ existiert, dass $\Phi[y] = y$ erfüllt, also die Integralgleichung (5.5) für alle $t \in J$. ■

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der durch (5.8) definierten PICARD-Iteration, die nicht nur für die Theorie wichtig ist, sondern auch bei der Konstruktion konkreter Lösungen eingesetzt werden kann. Als Beispiel untersuchen wir das Anfangswertproblem

$$y(0) = 1, \quad y'(t) = y(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wir konstruieren per (5.8) eine Folge $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen, die gegen y konvergiert. Der Fixpunktsatz 5.7 besagt, dass die Folge für *jedes* $y^{(1)}$ konvergiert, also können wir mit der besonders einfachen konstanten Funktion $y^{(1)} := 1$ beginnen und der Reihe nach

$$\begin{aligned} y^{(2)}(t) &= 1 + \int_0^t y^{(1)}(s) ds = 1 + \int_0^t 1 ds = 1 + t, \\ y^{(3)}(t) &= 1 + \int_0^t y^{(2)}(s) ds = 1 + \int_0^t (1 + s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}, \\ y^{(4)}(t) &= 1 + \int_0^t y^{(3)}(s) ds = 1 + \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2}) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}, \end{aligned}$$

berechnen, um schließlich

$$y^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{t^m}{m!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$$

zu erhalten. Der Grenzwert ist offenbar

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} = e^t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

das Anfangswertproblem beschreibt also gerade die Exponentialfunktion.

Bemerkung 5.9 (Globale LIPSCHITZ-Stetigkeit) Die Bedingung (5.7c) besagt gerade, dass das Vektorfeld $f(t, \cdot)$ zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ LIPSCHITZ-stetig ist. Da die LIPSCHITZ-Stetigkeit nur auf der Kugel $\bar{K}(y_0, \epsilon)$ gefordert ist, spricht man von lokaler LIPSCHITZ-Stetigkeit. Die Bedingung (5.7b) verwenden wir in Kombination mit der Wahl des Teilintervalls J , um sicher zu stellen, dass die konstruierte Lösung die Kugel $\bar{K}(y_0, \epsilon)$ nicht verlässt, damit wir die LIPSCHITZ-Stetigkeit nicht verlieren.

Falls das Vektorfeld $f(t, \cdot)$ global LIPSCHITZ-stetig ist, falls also

$$\begin{aligned} f &: I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| &\leq L \|x_1 - x_2\| \quad \text{für alle } t \in I, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

gilt, sind die Bedingungen (5.7a) und (5.7b) nicht mehr erforderlich, und wir können den Beweis leicht modifizieren, um zu zeigen, dass eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ auf dem gesamten Intervall I existiert.

In der Praxis ist die globale LIPSCHITZ-Stetigkeit allerdings eher der Ausnahmefall.

Die Voraussetzungen des Satzes 5.8 sind in der Praxis häufig etwas unhandlich, deshalb bietet es sich an, einen geeigneten Begriff einzuführen:

Definition 5.10 (Lokale LIPSCHITZ-Stetigkeit) Sei $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein stetiges zeitabhängiges Vektorfeld. Wir nennen es lokal LIPSCHITZ-stetig, falls für jedes $a \in I$ und jedes $y_0 \in \Omega$ Umgebungen $J \subseteq I$ von a und $\omega \subseteq \Omega$ von y_0 sowie eine Konstante $L_{a,y_0} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so existieren, dass

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L_{a,y_0} \|x_1 - x_2\| \quad \text{für alle } t \in J, x_1, x_2 \in \omega \quad (5.9)$$

gilt.

Für lokal LIPSCHITZ-stetige Vektorfelder lässt sich die Aussage des Satzes von PICARD-LINDELÖF wesentlich vereinfachen:

Folgerung 5.11 (Lokale Lösung) Sei $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein lokal LIPSCHITZ-stetiges zeitabhängiges Vektorfeld. Sei $a \in I$ und $y_0 \in \Omega$. Dann existieren ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $y : I \cap K(a, \epsilon) \rightarrow \Omega$ so, dass

$$y(a) = y_0, \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{für alle } t \in I \cap K(a, \epsilon)$$

gilt, dass also in einer Umgebung des Punkts a eine Lösung des Anfangswertproblems (5.4) existiert. Jede andere Lösung auf $I \cap K(a, \epsilon)$ definierte Lösung stimmt auf diesem Intervall mit y überein.

Beweis. Nach Definition 5.10 existieren Umgebungen $J \subseteq I$ von a und $\omega \subseteq \Omega$ von y_0 so, dass (5.9) gilt.

Da $\omega \subseteq \Omega$ eine Umgebung ist, existiert ein $\epsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\bar{K}(y_0, \epsilon_1) \subseteq \omega.$$

Da f stetig ist, existiert ein $\epsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$\|f(a, y_0) - f(t, x)\| \leq 1 \quad \text{für alle } x \in K(y_0, \epsilon_2), t \in K(a, \epsilon_2)$$

gilt, also folgt auch

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\| &\leq \|f(a, y_0)\| + \|f(a, y_0) - f(t, x)\| \\ &\leq \|f(a, y_0)\| + 1 =: M \quad \text{für alle } x \in K(y_0, \epsilon_2), t \in K(a, \epsilon_2). \end{aligned}$$

Wir definieren $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ und $L := L_{a,y_0}$ und stellen fest, dass die Voraussetzungen des Satzes 5.8 erfüllt sind. In Kombination mit Lemma 5.6 folgt damit die gewünschte Aussage. ■

Die lokale LIPSCHITZ-Stetigkeit ist zwar in Hinblick auf die Verwendung des Fixpunktsatzes von BANACH im Beweis des Existenzsatzes eine naheliegende Voraussetzung, allerdings etwas ungewohnt.

Glücklicherweise können wir uns auf eine stärkere, aber zugänglichere Voraussetzung beschränken, indem wir einen weiteren Mittelwertsatz, diesmal den der Differentialrechnung, verwenden.

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Erinnerung 5.12 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene Menge, und sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Seien $x_1, x_2 \in \Omega$ so gegeben, dass alle Punkte zwischen ihnen in Ω liegen, dass also

$$(1-s)x_1 + sx_2 \in \Omega \quad \text{für alle } s \in [0, 1]$$

gilt. Dann existiert ein $\eta_s \in [0, 1]$ so, dass für den Zwischenpunkt $\eta := (1-\eta_s)x_1 + \eta_s x_2 \in \Omega$ die Gleichung

$$f(x_2) - f(x_1) = Df(\eta)(x_2 - x_1)$$

gilt. Dieser Mittelwertsatz lässt sich einfach auf den der Integralrechnung (vgl. Erinnerung 5.5) zurückführen, indem man die Hilfsfunktion

$$g : [0, 1] \rightarrow \Omega, \quad s \mapsto f((1-s)x_1 + sx_2),$$

einführt und den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (vgl. Erinnerung 5.4) in Kombination mit der Kettenregel verwendet.

Folgerung 5.13 (Differenzierbare Vektorfelder) Sei $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein stetig differenzierbares zeitabhängiges Vektorfeld, Dann ist f lokal LIPSCHITZ-stetig.

Beweis. Seien $a \in I$ und $y_0 \in \Omega$ gegeben. Da Ω offen ist, finden wir ein $\epsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$K(y_0, \epsilon_1) \subseteq \Omega$$

gilt. Wir bezeichnen mit $D_2f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ die totale Ableitung des Vektorfelds f nach der zweiten Variablen. Da D_2f nach Voraussetzung stetig ist, existiert ein $\epsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$\|D_2f(a, y_0) - D_2f(t, x)\| \leq 1 \quad \text{für alle } x \in K(y_0, \epsilon_2), t \in K(a, \epsilon_2)$$

gilt, und wir erhalten mit der Dreiecksungleichung

$$\|D_2f(t, x)\| \leq \|D_2f(a, y_0)\| + 1 =: L_{a, y_0} \quad \text{für alle } x \in K(y_0, \epsilon_2), t \in K(a, \epsilon_2).$$

Wir setzen $J := I \cap K(a, \epsilon_2)$ und $\omega := K(y_0, \epsilon_1) \cap K(y_0, \epsilon_2)$. Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (vgl. Erinnerung 5.12) erhalten wir für $t \in J$ und $x_1, x_2 \in \omega$ die Abschätzung

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| = \|D_2f(t, \eta)(x_1 - x_2)\| \leq \|D_2f(t, \eta)\| \|x_1 - x_2\| \leq L_{a, y_0} \|x_1 - x_2\|$$

für einen Zwischenpunkt $\eta \in K(y_0, \epsilon_2)$. ■

Der Satz 5.8 von PICARD-LINDELÖF enthält bereits eine schwache Aussage über die Eindeutigkeit der Lösung: Sie ist auf einer Umgebung des Anfangspunkts eindeutig bestimmt, allerdings hängt die Größe dieser Umgebung von der LIPSCHITZ-Konstanten ab. Wir können eine wesentlich stärkere Eindeutigkeitsaussage erhalten, indem wir diese Umgebungen zusammenfassen.

Erinnerung 5.14 (Zusammenhängende Menge) Sei (E, δ) ein metrischer Raum. Eine Menge $A \subseteq E$ heißt zusammenhängend, falls für jede nicht-leere Teilmenge $B \subseteq A$ von A , die offen und abgeschlossen ist, bereits $B = A$ gilt.

Die Intervalle sind gerade die zusammenhängenden Teilmengen der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen.

Da das „Zeitintervall“ I eine zusammenhängende Menge ist, können wir die lokalen Aussagen des Satzes 5.8 von PICARD-LINDELÖF zu einer globalen Eindeutigkeitsaussage zusammensetzen:

Satz 5.15 (Eindeutigkeit) Sei $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein lokal LIPSCHITZ-stetiges zeitabhängiges Vektorfeld. Seien $a \in I$ und $y_0 \in \Omega$ gegeben, und seien $y_1, y_2 : I \rightarrow \Omega$ stetig differenzierbare Lösungen des Anfangswertproblems (5.4). Dann gilt $y_1 = y_2$.

Beweis. Wir bezeichnen mit

$$J := \{t \in I : y_1(t) = y_2(t)\}$$

die Menge aller Punkte, in denen y_1 und y_2 übereinstimmen. Da $y_1(a) = y_0 = y_2(a)$ gilt, folgt $a \in J$, also ist J nicht leer.

Unsere Aufgabe besteht darin, nachzuweisen, dass $J = I$ gilt. Da I ein Intervall ist, also insbesondere eine zusammenhängende Menge, genügt es, zu zeigen, dass J eine offene und abgeschlossene Teilmenge von I ist.

Da $z := y_1 - y_2$ eine stetige Abbildung ist, muss $J = z^{-1}(\{0\})$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ selber abgeschlossen sein.

Es bleibt zu zeigen, dass J auch offen ist. Sei dazu ein $t \in J$ gewählt. Indem wir Folgerung 5.11 auf den Anfangspunkt t und den Anfangswert y_0 anwenden, erhalten wir ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass auf $J := I \cap K(t, \epsilon)$ die Funktion $y_1|_J$ die einzige Lösung ist. Also folgt $y_1|_J = y_2|_J$ und damit $J \subseteq I$. Somit ist J in I offen. ■

5.3 Stabilität

Wir haben gezeigt, dass das Anfangswertproblem (5.4) eindeutig lösbar ist, falls das Vektorfeld f lokal LIPSCHITZ-stetig ist, und es dazu bereit genügt, dass f stetig differenzierbar ist.

Falls man ein Anfangswertproblem einsetzen möchte, um beispielsweise das Verhalten eines physikalischen Systems vorherzusagen, stößt man auf das Problem, dass man den Ausgangszustand des Systems, also den Anfangswert y_0 , häufig nur mit einer gewissen Genauigkeit bestimmen kann. Falls der tatsächliche Anfangswert von dem gemessenen etwas entfernt ist, stellt sich die Frage, wie sehr diese Störung die Lösung des Anfangswertproblems beeinflusst, wie *stabil* sie also unter Störungen ist.

Bei der Lösung dieser Aufgabe gehen wir wieder von der in Lemma 5.6 erhaltenen Integralformulierung des Anfangswertproblems aus. Das entscheidende Hilfsmittel für die Stabilitätsanalyse der Integralgleichung ist die GRÖNWALL-Ungleichung:

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Lemma 5.16 (Grönwall) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $a \in I$. Sei $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ Konstanten, die

$$u(t) \leq \alpha + \beta \int_a^t u(s) ds \quad \text{für alle } t \in I, t \geq a, \quad (5.10a)$$

$$u(t) \leq \alpha + \beta \int_t^a u(s) ds \quad \text{für alle } t \in I, t \leq a \quad (5.10b)$$

erfüllen. Dann gilt

$$u(t) \leq \alpha e^{\beta|t-a|} \quad \text{für alle } t \in I. \quad (5.11)$$

Beweis. (vgl. [8]) Um Probleme mit dem Vorzeichen zu vermeiden, führen wir

$$I_+ := \{t \in I : t \geq a\}, \quad I_- := \{t \in I : t \leq a\}$$

ein und untersuchen zunächst den Fall $t \in I_+$.

Wir definieren die stetige Funktion $v : I_+ \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$v(t) := e^{-\beta(t-a)} \int_a^t \beta u(s) ds \quad \text{für alle } t \in I_+$$

und erhalten mit der Produktregel die Abschätzung

$$\begin{aligned} v'(t) &= -\beta e^{-\beta(t-a)} \int_a^t \beta u(s) ds + e^{-\beta(t-a)} \beta u(t) \\ &= \beta e^{-\beta(t-a)} \left(u(t) - \int_a^t \beta u(s) ds \right) \quad \text{für alle } t \in I_+. \end{aligned}$$

Indem wir im rechten Faktor $u(t)$ mit der Ungleichung (5.10a) abschätzen, ergibt sich

$$v'(t) \leq \alpha \beta e^{-\beta(t-a)} \quad \text{für alle } t \in I_+. \quad (5.12)$$

Sei nun $t \in I_+$ fixiert. Aus (5.10a) und (5.12) folgt mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (vgl. Erinnerung 5.4) die Abschätzung

$$\begin{aligned} e^{-\beta(t-a)} u(t) &\leq \alpha e^{-\beta(t-a)} + \beta e^{-\beta(t-a)} \int_a^t u(s) ds = \alpha e^{-\beta(t-a)} + v(t) \\ &= \alpha e^{-\beta(t-a)} + v(t) - v(a) = \alpha e^{-\beta(t-a)} + \int_a^t v'(s) ds \\ &\leq \alpha e^{-\beta(t-a)} + \alpha \int_a^t \beta e^{-\beta(s-a)} ds \\ &= \alpha e^{-\beta(t-a)} - \alpha e^{-\beta(t-a)} + \alpha e^{-\beta(a-a)} = \alpha, \end{aligned}$$

und indem wir beide Seiten mit $e^{\beta(t-a)}$ multiplizieren ergibt sich (5.11).

Um auch den Fall $t \in I_-$ abzudecken definieren wir auf $\widehat{I} := -I$ die Funktion

$$\hat{u} : \widehat{I} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{t} \mapsto u(-\hat{t}).$$

Für alle $\hat{t} \in \widehat{I}$ mit $\hat{t} \geq \hat{a} := -a$ folgt aus (5.10b) mit der Substitutionsformel des RIEMANN-Integrals

$$\begin{aligned} \hat{u}(\hat{t}) &= u(t) \leq \alpha + \beta \int_t^a u(s) ds = \alpha - \beta \int_a^t u(s) ds \\ &= \alpha + \beta \int_{-a}^{-t} u(-s) ds = \alpha + \beta \int_{\hat{a}}^{\hat{t}} \hat{u}(s) ds, \end{aligned}$$

also können wir den ersten Teil des Beweises auf \hat{u} anwenden. Wir wählen $t \in I_-$, setzen $\hat{t} := -t \in \widehat{I}$, stellen fest, dass $\hat{t} \geq \hat{a}$ gilt, und erhalten

$$u(t) = \hat{u}(\hat{t}) \leq \alpha e^{\beta(\hat{t}-\hat{a})} = \alpha e^{\beta(-t+a)} = \alpha e^{\beta|t-a|},$$

und das ist die gewünschte Aussage. ■

Mit Hilfe der GRÖNWALL-Ungleichung können wir die Frage nach dem Einfluss von Störungen des Anfangswerts relativ gut beantworten, falls wir wieder die LIPSCHITZ-Stetigkeit des Vektorfelds voraussetzen:

Folgerung 5.17 (Störung des Anfangswerts) Sei $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein stetiges zeitabhängiges Vektorfeld, und sei $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad \text{für alle } t \in I, x_1, x_2 \in \Omega. \quad (5.13)$$

Seien $y_1, y_2 : I \rightarrow \Omega$ stetig differenzierbare Funktionen, die

$$y_1'(t) = f(t, y_1(t)), \quad y_2'(t) = f(t, y_2(t)) \quad \text{für alle } t \in I$$

erfüllen, und sei $a \in I$. Dann gilt

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \|y_1(a) - y_2(a)\| e^{L|t-a|} \quad \text{für alle } t \in I,$$

wir können also die Störung zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in I$ durch die Störung zu dem festen Zeitpunkt a abschätzen.

Beweis. Wie bereits angekündigt verwenden wir die Integralformulierung (5.5). Gemäß unserer Voraussetzungen gilt

$$y_1(t) = y_1(a) + \int_a^t f(s, y_1(s)) ds, \quad y_2(t) = y_2(a) + \int_a^t f(s, y_2(s)) ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

Für die Differenz der Lösungen folgt damit

$$y_1(t) - y_2(t) = y_1(a) - y_2(a) + \int_a^t f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) ds \quad \text{für alle } t \in I.$$

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir definieren die Funktion

$$u : I \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto \|y_1(t) - y_2(t)\|.$$

Sei $t \in I$. Mit der LIPSCHITZ-Stetigkeit (5.13) folgt

$$\begin{aligned} u(t) &= \|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \|y_1(a) - y_2(a)\| + \int_a^t \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\| ds \\ &\leq \|y_1(a) - y_2(a)\| + \int_a^t L \|y_1(s) - y_2(s)\| ds = u(a) + L \int_a^t u(s) ds \quad \text{falls } t \geq a, \\ u(t) &= \|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \|y_1(a) - y_2(a)\| + \int_t^a \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\| ds \\ &\leq \|y_1(a) - y_2(a)\| + \int_t^a L \|y_1(s) - y_2(s)\| ds = u(a) + L \int_t^a u(s) ds \quad \text{falls } t \leq a, \end{aligned}$$

also ist (5.10) für

$$\alpha := u(a) = \|y_1(a) - y_2(a)\|, \quad \beta := L$$

erfüllt und wir erhalten mit dem Lemma 5.16 von GRÖNWALL die Abschätzung

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| = u(t) \leq \alpha e^{\beta|t-a|} = \|y_1(a) - y_2(a)\| e^{L|t-a|}.$$

■

Wenn also die Lösung in einem Punkt a um $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gestört wird, entsteht dadurch in einem Punkt $t \in I$ eine Störung um $e^{L|t-a|}\epsilon$. Falls die LIPSCHITZ-Konstante L oder der Abstand zwischen t und a groß sind, kann es also zu einer erheblichen Verstärkung kommen. Dieser Effekt wird beispielsweise in der Chaostheorie durch das Beispiel eines Schmetterlings illustriert, der durch einen Flügelschlag einen Sturm verursacht: Eine kleine Störung in den Ausgangsbedingungen kann große Änderungen des Ergebnisses zur Folge haben.

In der Praxis hängt die Funktion f gelegentlich nicht nur von der „Zeit“ $t \in I$ und dem „Ort“ $x \in \Omega$ ab, sondern auch von einem weiteren Parameter $p \in \mathbb{R}^m$.

Folgerung 5.18 (Abhängigkeit von Parametern) *Seien $m \in \mathbb{N}$ und eine offene Menge $P \subseteq \mathbb{R}^m$ gegeben. Sei $f : I \times \Omega \times P \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Abbildung, sei $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so gegeben, dass $(t, x) \mapsto f(t, x, p)$ für jedes $p \in P$ ein stetiges zeitabhängiges Vektorfeld ist, das*

$$\|f(t, x_1, p_1) - f(t, x_2, p_2)\| \leq L \left\| \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ p_1 - p_2 \end{pmatrix} \right\| \quad \text{für alle } t \in I, x_1, x_2 \in \Omega, p_1, p_2 \in P \quad (5.14)$$

erfüllt. Seien $p_1, p_2 \in P$ gegeben, und seien $y_1, y_2 : I \rightarrow \Omega$ stetig differenzierbare Funktionen, die

$$y_1'(t) = f(t, y_1(t), p_1), \quad y_2'(t) = f(t, y_2(t), p_2) \quad \text{für alle } t \in I$$

erfüllen. Dann gilt

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \left\| \begin{pmatrix} y_1(a) - y_2(a) \\ p_1 - p_2 \end{pmatrix} \right\| e^{L|t-a|} \quad \text{für alle } t \in I,$$

wir können also die Störung der Lösung durch die Störung des Parameters abschätzen.

Beweis. Wir definieren

$$\hat{y}_1(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{y}_2(t) := \begin{pmatrix} y_2(t) \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in I$$

und stellen fest, dass

$$\hat{y}'_1(t) = \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{y}'_2(t) = \begin{pmatrix} y'_2(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in I$$

gelten, also sind \hat{y}_1 und \hat{y}_2 Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\hat{y}_1(a) = \begin{pmatrix} y_1(a) \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{y}'_1(t) = \hat{f}(t, \hat{y}_1(t)), \quad (5.15a)$$

$$\hat{y}_2(a) = \begin{pmatrix} y_2(a) \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{y}'_2(t) = \hat{f}(t, \hat{y}_2(t)) \quad \text{für alle } t \in I \quad (5.15b)$$

mit der Funktion

$$\hat{f} : I \times \Omega \times P \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (t, x, p) \mapsto \begin{pmatrix} f(t, x, p) \\ 0 \end{pmatrix},$$

die insbesondere

$$\begin{aligned} \|\hat{f}(t, x_1, p_1) - \hat{f}(t, x_2, p_2)\| &= \|f(t, x_1, p_1) - f(t, x_2, p_2)\| \\ &\leq L \left\| \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ p_1 - p_2 \end{pmatrix} \right\| \quad \text{für alle } t \in I, x_1, x_2 \in \Omega, p_1, p_2 \in P \end{aligned}$$

erfüllt. Also können wir Folgerung 5.17 auf die Gleichungen (5.15) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \|y_1(t) - y_2(t)\| &\leq \left\| \begin{pmatrix} y_1(t) \\ p_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_2(t) \\ p_2 \end{pmatrix} \right\| = \|\hat{y}_1(t) - \hat{y}_2(t)\| \\ &\leq \|\hat{y}_1(a) - \hat{y}_2(a)\| e^{L|t-a|} = \left\| \begin{pmatrix} y_1(a) - y_2(a) \\ p_1 - p_2 \end{pmatrix} \right\| e^{L|t-a|} \quad \text{für alle } t \in I. \end{aligned}$$

■

Wir haben bereits gezeigt, dass die Lösung eines Anfangswertproblems LIPSCHITZ-stetig von dem Anfangswert abhängt, falls das Vektorfeld LIPSCHITZ-stetig ist. Es stellt sich die Frage, ob die Lösung auch *differenzierbar* von dem Anfangswert abhängt, falls das Vektorfeld differenzierbar ist. Das ist in der Tat der Fall, und wir können die JACOBI-Matrix sogar explizit als Lösung eines *matrixwertigen* Anfangswertproblems berechnen:

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Satz 5.19 (Differenzierbare Abhängigkeit vom Anfangswert) Sei $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein stetig differenzierbares zeitabhängiges Vektorfeld. Seien $a \in I$ und $y_0 \in \Omega$ gegeben. Dann existiert ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass für alle $x \in K(y_0, \epsilon)$ das Anfangswertproblem

$$y(a, x) = x, \quad \partial_1 y(t, x) = f(t, y(t, x)) \quad \text{für alle } t \in J := I \cap K(a, \epsilon) \quad (5.16)$$

eindeutig lösbar ist. Die so definierte Funktion $y : J \times K(y_0, \epsilon) \rightarrow \Omega$ ist für jedes $t \in J$ im Punkt (t, y_0) im zweiten Argument stetig differenzierbar, und die Ableitung $X(t) := D_2 y(t, y_0) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ist die eindeutig bestimmte Lösung des matrixwertigen Anfangswertproblems

$$X(a) = I_d, \quad X'(a) = D_2 f(t, y(t, a))X \quad \text{für alle } t \in J. \quad (5.17)$$

Hier bezeichnet $I_d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ die d -dimensionale Einheitsmatrix.

Beweis. (vgl. [2, Satz 2.2]) Wie in Folgerung 5.11 finden wir ein $\epsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so, dass

$$\begin{aligned} K(y_0, \epsilon_1) &\subseteq \Omega, \\ \|f(t, x)\| &\leq M && \text{für alle } x \in K(y_0, \epsilon_1), t \in I \cap K(a, \epsilon_1), \\ \|D_2 f(t, x)\| &\leq M && \text{für alle } x \in K(y_0, \epsilon_1), t \in I \cap K(a, \epsilon_1), \\ \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| &\leq L\|x_1 - x_2\| && \text{für alle } x_1, x_2 \in K(y_0, \epsilon_1), t \in I \cap K(a, \epsilon_1) \end{aligned}$$

gelten. Wir setzen $\epsilon := \min\{\epsilon_1/2, \epsilon_1/(2M)\}$. Für jedes $x \in K(y_0, \epsilon)$ ist dann $K(x, \epsilon)$ in $K(y_0, \epsilon_1)$ enthalten, so dass nach dem Satz 5.8 von PICARD-LINDELÖF die Lösung $y(\cdot, x) : I \cap K(a, \epsilon) \rightarrow \Omega$ existiert. Indem wir das Anfangswertproblem mit Hilfe der Integralgleichung (5.5) darstellen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|y_0 - y(t, x)\| &= \left\| y_0 - x - \int_a^t f(s, y(s, x)) ds \right\| \leq \|y_0 - x\| + \int_a^t \|f(s, y(s, x))\| ds \\ &< \epsilon_1/2 + |t - a|M < \epsilon_1 && \text{für alle } t \in I \cap K(a, \epsilon), t \geq a, x \in K(y_0, \epsilon). \end{aligned}$$

Entsprechend können wir für $t \leq a$ verfahren und erhalten für $J := I \cap K(a, \epsilon)$ und $\omega := K(y_0, \epsilon)$ die Aussage

$$y(t, x) \in K(y_0, \epsilon_1) \quad \text{für alle } t \in J, x \in \omega, \quad (5.18)$$

die Lösungen können also die Kugel $K(y_0, \epsilon_1)$ nicht verlassen, auf der uns die Abschätzungen (5.20) zur Verfügung stehen.

Nun können wir uns dem Kern des Beweises widmen: Sei $t \in J$. Wir müssen eine Matrix $Z \in \mathbb{R}^{d \times d}$ so finden, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|y(t, y_0 + h) - y(t, y_0) - Zh\|}{\|h\|} = 0$$

gilt, denn dann ist Z die Ableitung von $x \mapsto y(t, x)$ im Punkt y_0 . Zur Abkürzung führen wir die Differenz

$$e(t, h) := y(t, y_0 + h) - y(t, y_0), \quad \text{für alle } t \in J, h \in K(0, \epsilon)$$

ein, die wir durch Zh approximieren müssen. Unser Ziel besteht darin, e als Lösung eines Anfangswertproblems darzustellen, um die korrespondierenden Störungssätze anwenden können.

Wir fixieren für den Augenblick $h \in K(0, \epsilon)$. Nach Konstruktion gilt $y_0 + h \in K(y_0, \epsilon)$, also ist $y(t, y_0 + h)$ nach unserer Vorbetrachtung wohldefiniert und liegt in $K(y_0, \epsilon_1)$. Da dasselbe für $y(t, y_0)$ gilt, folgt für alle Punkte zwischen beiden Werten

$$\begin{aligned} y(t, y_0) + se(t, h) &= y(t, y_0) + s(y(t, y_0 + h) - y(t, y_0)) \\ &= (1 - s)y(t, y_0) + sy(t, y_0 + h) \in K(y_0, \epsilon_1) \quad \text{für alle } s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Also können wir die Hilfsfunktion

$$F : J \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad s \mapsto f(t, y(t, y_0) + se(t, h)),$$

einführen und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} F(0) &= f(t, y(t, y_0)) = \partial_1 y(t, y_0), & F(1) &= f(t, y(t, y_0 + h)) = \partial_1 y(t, y_0 + h), \\ F'(s) &= D_2 f(t, y(t, y_0) + se(t, h))e(t, h) \quad \text{für alle } s \in [0, 1] \end{aligned}$$

gelten. Indem wir $t \mapsto e(t, h)$ differenzieren und den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (vgl. Erinnerung 5.4) anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_1 e(t, h) &= \partial_1 y(t, y_0 + h) - \partial_1 y(t, y_0) = F(1) - F(0) \\ &= \int_0^1 F'(s) ds = \int_0^1 D_2 f(t, y(t, y_0) + se(t, h)) ds e(t, h) \quad \text{für alle } t \in J, \end{aligned}$$

die Funktion $t \mapsto e(t, h)$ löst also das Anfangswertproblem

$$e(a, h) = y(a, y_0 + h) - y(a, y_0) = h, \quad \partial_1 e(t, h) = A(t, h)e(t, h) \quad \text{für alle } t \in J$$

mit der durch

$$A(t, h) := \int_0^1 D_2 f(t, y(t, y_0) + se(t, h)) ds \quad \text{für alle } t \in J, h \in K(0, \epsilon)$$

definierten rechten Seite.

Unser Ziel besteht darin, $e(t, h)$ durch Zh mit der zukünftigen JACOBI-Matrix Z zu approximieren. Dazu gehen wir zu einem *matrixwertigen* Anfangswertproblem über, wir suchen also eine Lösung $Z : J \times K(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ des Anfangswertproblems

$$Z(a, h) = I_d, \quad \partial_1 Z(t, h) = A(t, h)Z(t, h) \quad \text{für alle } t \in J.$$

Indem wir dem Satz 5.8 von PICARD-LINDELÖF auf die d Spalten der Gleichungen anwenden, erhalten wir eine Lösung, denn die Multiplikation mit $A(t, h)$ ist eine LIPSCHITZ-stetige Abbildung mit der LIPSCHITZ-Konstanten

$$\|A(t, h)\| = \left\| \int_0^1 D_2 f(t, y(t, y_0) + se(t, h)) ds \right\| \leq M.$$

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Es gelten

$$Z(a, h)h = I_d h = e(a, h), \quad \partial_1(Z(t, h)h) = A(t, h)(Z(t, h)h) \quad \text{für alle } t \in J, \quad (5.19)$$

also muss nach Eindeutigkeitssatz 5.15 auch

$$Z(t, h)h = e(t, h) \quad \text{für alle } t \in J, \quad h \in K(0, \epsilon)$$

erfüllt sein. Es folgt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|y(t, y_0 + h) - y(t, y_0) - Z(t, 0)h\|}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|Z(t, h)h - Z(t, 0)h\|}{\|h\|} \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|Z(t, h) - Z(t, 0)\| \|h\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \|Z(t, h) - Z(t, 0)\| \quad \text{für alle } t \in J, \end{aligned} \quad (5.20)$$

wir müssen also nur noch nachweisen, dass $Z(t, h)$ gegen $Z(t, 0)$ konvergiert.

Dazu können wir wieder die Integralgleichung (5.5) und das GRÖNWALL-Lemma 5.16 verwenden: Wir fixieren $t \in J$ und $h \in K(0, \epsilon)$. Falls $t \geq a$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|Z(r, h) - Z(r, 0)\| &= \left\| I_d + \int_a^r A(s, h)Z(s, h) - I_d - \int_a^r A(s, 0)Z(s, 0) \right\| \\ &\leq \int_a^r \|A(s, h)Z(s, h) - A(s, 0)Z(s, 0)\| ds \\ &= \int_a^r \|A(s, h)(Z(s, h) - Z(s, 0)) + (A(s, h) - A(s, 0))Z(s, 0)\| ds \\ &\leq \int_a^r \|A(s, h)\| \|Z(s, h) - Z(s, 0)\| ds + \int_a^t \|A(s, h) - A(s, 0)\| \|Z(s, 0)\| ds \\ &\quad \text{für alle } r \in [a, t]. \end{aligned}$$

Wir haben ϵ unter anderem gerade so gewählt, dass $\|A(s, h)\| \leq M$ für alle $s \in [0, 1]$ und $h \in K(0, \epsilon)$ gilt, also erhalten wir für die durch

$$u : [a, t] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad r \mapsto \|Z(r, h) - Z(r, 0)\|,$$

gegebene Funktion die Ungleichung

$$\begin{aligned} u(r) &\leq \int_a^r \|A(s, h) - A(s, 0)\| \|Z(s, 0)\| ds + M \int_a^r u(s) ds \\ &= \alpha + \beta \int_a^r u(s) ds \quad \text{für alle } r \in [a, t] \end{aligned}$$

mit den Konstanten

$$\alpha := \int_a^t \|A(s, h) - A(s, 0)\| \|Z(s, 0)\| ds, \quad \beta := M.$$

Indem wir das GRÖNWALL-Lemma 5.16 anwenden, folgt

$$\|Z(t, h) - Z(t, 0)\| = u(t) \leq \alpha e^{\beta|t-a|} = e^{M|t-a|} \int_a^t \|A(s, h) - A(s, 0)\| \|Z(s, 0)\| ds$$

für alle $t \in J$, $t \geq a$, $h \in K(0, \epsilon)$.

Den Fall $t \leq a$ können wir entsprechend behandeln. Mit der Folgerung 5.17 haben wir eine Abschätzung für die Störung der Lösung bei gestörtem Anfangswert, die in unserem Fall $\lim_{h \rightarrow 0} e(t, h) = 0$ beinhaltet, und da D_2f stetig ist, folgt $\lim_{h \rightarrow 0} A(s, h) = A(s, 0)$, also dank (5.20) auch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|y(t, y_0 + h) - y(t, y_0) - Z(t, 0)h\|}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \|Z(t, h) - Z(t, 0)\| = 0,$$

somit ist $x \mapsto y(t, x)$ in y_0 differenzierbar und besitzt dort die Ableitung $D_2y(t, y_0) = Z(t, 0)$. Indem wir in (5.19) $h = 0$ einsetzen und $A(t, 0) = D_2f(t, y(t, y_0))$ ausnutzen, erhalten wir das gewünschte Anfangswertproblem für die Bestimmung der Ableitung. ■

Bemerkung 5.20 (Fluss) Die durch (5.16) definierte Abbildung $y : J \times K(y_0, \epsilon) \rightarrow \Omega$ bezeichnet man als den (lokalen) Fluss¹ des Vektorfelds f .

Wenn man das Vektorfeld als eine Abbildung interpretiert, die jedem Punkt eine Geschwindigkeit zuordnet, und die Lösung des Anfangswertproblems als die Kurve, die ein Partikel beschreibt, das sich mit dieser Geschwindigkeit bewegt, beschreibt der Fluss, wie sich ein zum Zeitpunkt a an einem Punkt y_0 befindliches Partikel im Laufe der Zeit bewegt.

5.4 Lineare Anfangswertprobleme

In Gestalt der Gleichung (5.17) sind wir bereits auf einen wichtigen Spezialfall der gewöhnlichen Differentialgleichungen gestoßen, nämlich die *lineare gewöhnliche Differentialgleichung*.

Definition 5.21 (Lineare gewöhnliche Differentialgleichung) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, seien $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetige Abbildungen. Eine stetig differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ nennen wir Lösung der durch A und b gegebenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung, falls

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad \text{für alle } t \in I \quad (5.21)$$

gilt.

¹engl. (local) flow

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Die Besonderheit linearer gewöhnliche Differentialgleichungen besteht darin, dass sie ähnliche Eigenschaften wie lineare Gleichungssysteme besitzen: Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung unterscheiden sich nur durch Lösungen der *homogenen* Gleichung

$$y'(t) = A(t)y(t) \quad \text{für alle } t \in I, \quad (5.22)$$

denn für zwei stetig differenzierbare Funktionen $y_1, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit

$$y_1'(t) = A(t)y_1(t) + b(t), \quad y_2'(t) = A(t)y_2(t) + b(t) \quad \text{für alle } t \in I$$

erhalten wir direkt

$$\begin{aligned} (y_1 - y_2)'(t) &= y_1'(t) - y_2'(t) = A(t)y_1(t) + b(t) - A(t)y_2(t) - b(t) \\ &= A(t)(y_1 - y_2)(t) \quad \text{für alle } t \in I, \end{aligned} \quad (5.23)$$

also erfüllt $y := y_1 - y_2$ die Gleichung (5.22). Diese Eigenschaft lässt sich ausnutzen, um lineare Anfangswertprobleme zu lösen:

Definition 5.22 (Lineares Anfangswertproblem) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, seien $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ und $b : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetige Abbildungen, sei $a \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Eine stetig differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ nennen wir Lösung des durch A , b , a und y_0 gegebenen linearen Anfangswertproblems, falls die Gleichungen

$$y(a) = y_0, \quad y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad \text{für alle } t \in I \quad (5.24)$$

gelten.

Bemerkung 5.23 (Lösbarkeit) Seien A , b , a und y_0 wie in Definition 5.22 gegeben. Indem wir $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ setzen, lässt sich eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung auf die bereits untersuchten allgemeinen gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführen. Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| &= \|A(t)x_1 + b(t) - A(t)x_2 - b(t)\| \\ &= \|A(t)(x_1 - x_2)\| \\ &\leq \|A(t)\| \|x_1 - x_2\| \quad \text{für alle } t \in I, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

also ist f lokal LIPSCHITZ-stetig. Nach Folgerung 5.11 ist dann das lineare Anfangswertproblem lokal eindeutig lösbar. Falls eine Konstante $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$\|A(t)\| \leq L \quad \text{für alle } t \in I \quad (5.25)$$

existiert, ist das Anfangswertproblem global eindeutig lösbar, es existiert also eine Lösung auf dem gesamten Intervall I .

Wichtig ist, dass wir die Behandlung des Anfangswerts auf die Untersuchung der homogenen Differentialgleichung (5.22) zurückführen können: Falls $y_p : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine beliebige Lösung der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung (5.21) ist und $y : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine des Anfangswertproblems (5.24), muss die Differenz $y_p - y$ nach (5.23) die homogene Differentialgleichung lösen. Diese Eigenschaft können wir verwenden, um das Anfangswertproblem zu behandeln: Sofern wir irgendwie eine *partikuläre Lösung* y_p gefunden haben, können wir das *homogene* Anfangswertproblem

$$y_h(a) = y_0 - y_p(a), \quad y_h'(t) = A(t)y_h(t) \quad \text{für alle } t \in I$$

lösen und erhalten für $y := y_h + y_p$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(a) + y_p(a) = y_0, \\ y'(t) &= y_h'(t) + y_p'(t) = A(t)y_h(t) + A(t)y_p(t) + b(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad \text{für alle } t \in I. \end{aligned}$$

Wir können also die partikuläre Lösung y_p nachträglich so korrigieren, dass der gewünschte Anfangswert angenommen wird. Besonders hilfreich wäre es für diesen Zweck, wenn wir das Lösen des homogenen Problems vereinfachen könnten.

Dazu gehen wir ähnlich wie in dem Beweis des Satzes 5.19 vor: Wir suche eine *matrixwertige* Lösung $F : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$F'(t) = A(t)F(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Falls uns ein derartiges F zur Verfügung steht, erfüllt für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ die Funktion $y(t) = F(t)x$ die Gleichung

$$y'(t) = F'(t)x = A(t)F(t)x = A(t)y(t) \quad \text{für alle } t \in I,$$

wir müssen also „nur“ ein $x \in \mathbb{R}^d$ so finden, dass

$$F(a)x = y_0 - y_p(a)$$

gilt. Falls F bekannt ist, reduziert sich also das Lösen des homogenen Problems auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems.

Definition 5.24 (Fundamentalmatrix) Sei $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ eine stetige Abbildung. Sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Falls

$$F'(t) = A(t)F(t) \quad \text{für alle } t \in I \quad (5.26)$$

gilt und $F(t)$ für alle $t \in I$ invertierbar ist, nennen wir F die *Fundamentalmatrix* zu der durch A gegebenen homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung.

Falls zusätzlich $F(a) = I_d$ für ein $a \in I$ gilt, nennen wir F die *Hauptfundamentalmatrix* im Punkt a .

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Falls wir eine Fundamentalmatrix und eine partikuläre Lösung kennen, können wir das Anfangswertproblem (5.24) für jeden beliebigen Anfangszeitpunkt $a \in I$ und jeden beliebigen Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}^d$ lösen, indem wir $F(a)$ invertieren.

Aus dem Satz 5.8 folgt bereits, dass (5.26) eine Lösung besitzt. Zu untersuchen bleibt, ob diese Lösung auch in jedem Punkt invertierbar ist. Einen eleganten Zugang bietet der Umweg über die *Determinante*: Für ein $t \in I$ ist $F(t)$ genau dann invertierbar, wenn $\det F(t) \neq 0$ gilt. Falls wir also sicherstellen können, dass alle Determinanten ungleich null sind, haben wir die Existenz der Fundamentalmatrix bewiesen.

Satz 5.25 (LIOUVILLE) Sei $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ eine stetige Abbildung. Sei $X : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ eine stetig differenzierbare Abbildung, die

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad \text{für alle } t \in I$$

erfüllt. Dann ist

$$w : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \det X(t),$$

eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$w'(t) = \text{spur } A(t)w(t) \quad \text{für alle } t \in I. \quad (5.27)$$

Wir nennen w die WRONSKI-Determinante der matrixwertigen Funktion X .

Beweis. (vgl. [7, Satz III.15.III]) Sei $t \in I$. Der Beweis beruht auf der Idee, ein Anfangswertproblem für den Anfangswert t zu untersuchen, um daraus Rückschlüsse auf die Determinante zu ziehen. Nach Bemerkung 5.23 existiert ein in I offenes Teilintervall $J \subseteq I$ mit $t \in J$ so, dass das lineare matrixwertige Anfangswertproblem

$$Z(t) = I_d, \quad Z'(s) = A(s)Z(s) \quad \text{für alle } s \in J$$

eine Lösung $Z : J \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ besitzt. Wir definieren

$$z(s) := \det Z(s) \quad \text{für alle } s \in J.$$

Wir bezeichnen mit $e_1, \dots, e_d \in \mathbb{R}^d$ die kanonischen Einheitsvektoren, also die Spalten der Einheitsmatrix I_d . Es gilt

$$z(s) = \det Z(s) = \det(Z(s)e_1, \dots, Z(s)e_d) \quad \text{für alle } s \in J.$$

Da die Determinante eine Multilinearform ist, folgt mit der Produktregel

$$\begin{aligned} z'(s) &= \sum_{\iota=1}^d \det(Z(s)e_1, \dots, Z'(s)e_\iota, \dots, Z(s)e_d) \\ &= \sum_{\iota=1}^d \det(Z(s)e_1, \dots, A(s)Z(s)e_\iota, \dots, Z(s)e_d), \end{aligned}$$

und im Punkt t erhalten wir mit $Z(t) = I_d$ damit

$$z(t) = \sum_{\iota=1}^d \det(e_1, \dots, A(t)e_\iota, \dots, e_d) = \sum_{\iota=1}^d A_{\iota\iota}(t) = \text{spur } A(t).$$

Nun untersuchen wir die matrixwertige Funktion

$$Y : J \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}, \quad s \mapsto Z(s)X(t).$$

Wir stellen fest, dass sie das lineare Anfangswertproblem

$$Y(t) = Z(t)X(t) = X(t), \quad (5.28a)$$

$$Y'(s) = Z'(s)X(t) = A(s)Z(s)X(t) = A(s)Y(s) \quad \text{für alle } s \in J \quad (5.28b)$$

löst. Da X ebenfalls eine Lösung dieses Anfangswertproblems und die Lösung eindeutig bestimmt ist, muss $X = Y$ gelten, also insbesondere nach Determinanten-Multiplikationssatz

$$w'(s) = (\det X)'(s) = (\det Y)'(s) = (\det Z)'(s) \det X(t) = z'(s)w(t) \quad \text{für alle } s \in J,$$

und indem wir $s = t$ einsetzen folgt

$$w'(t) = z'(t)w(t) = \text{spur } A(t)w(t).$$

Da $t \in I$ beliebig gewählt war, haben wir (5.27) bewiesen. ■

Folgerung 5.26 (LIOUVILLE-Faktor) Sei A wie in Satz 5.25 gegeben. Sei $a \in I$. Eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (5.27) ist durch

$$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad t \mapsto \exp\left(\int_a^t \text{spur } A(s) ds\right), \quad (5.29)$$

gegeben.

Beweis. Wir setzen

$$z(t) := \int_a^t \text{spur } A(s) ds \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

stellen fest, dass nach Hauptsatz

$$z'(t) = \text{spur } A(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gilt, und erhalten dank $w = \exp \circ z$ mit der Kettenregel

$$w'(t) = \exp(z(t))z'(t) = \exp(z(t)) \text{spur } A(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

also gilt (5.27). ■

5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Folgerung 5.27 (Existenz der Fundamentalmatrix) Sei $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ eine stetige Abbildung, und sei $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so gegeben, dass (5.25) gilt, dass also A gleichmäßig beschränkt ist. Für jedes $a \in I$ existiert eine Hauptfundamentalmatrix zu der durch A gegebenen homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung.

Beweis. Sei $a \in I$. Nach Bemerkung 5.23 existiert eine stetig differenzierbare matrixwertige Funktion $X : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, die die Gleichungen

$$X(a) = I_d, \quad X'(t) = A(t)X(t) \quad \text{für alle } t \in I$$

erfüllt. Nach Folgerung 5.26 erfüllt die durch (5.29) gegebene Funktion sowohl die gewöhnliche Differentialgleichung (5.27) als auch die Anfangsbedingung

$$w(a) = \exp(0) = 1 = \det X(a),$$

also muss w die WRONSKI-Determinante zu X sein. Offenbar ist w immer ungleich null, also ist X immer invertierbar, und damit ist X eine Fundamentalmatrix. ■

Bemerkung 5.28 (LIOUVILLE-Formel) Sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die (5.26) erfüllt, und sei $X : I \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ die Hauptfundamentalmatrix aus Folgerung 5.27. Wie in (5.28) können wir zeigen, dass

$$F(t) = X(t)F(a) \quad \text{für alle } t \in I$$

gilt, also gilt auch

$$\begin{aligned} \det F(t) &= \det X(t) \det F(a) = w(t) \det F(a) \\ &= \det F(a) \exp \left(\int_a^t \operatorname{spur} A(s) \, ds \right) \quad \text{für alle } t \in I \end{aligned}$$

mit der in (5.29) definierten Funktion w . Da der rechte Faktor niemals gleich null ist, ist F genau dann in jedem Punkt invertierbar, falls $F(a)$ invertierbar ist.

6 Grundlagen der Funktionentheorie

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, die auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ des Körpers \mathbb{C} der komplexen Zahlen definiert sind. Insbesondere interessieren wir uns für die Frage, welche Eigenschaften solche Funktionen besitzen, falls sie *komplex differenzierbar* sind, falls also der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

für alle $z \in \Omega$ existiert. Es stellt sich heraus, dass derartige Funktionen sehr überraschende Eigenschaften besitzen: Sie sind nicht nur einmal, sondern beliebig oft differenzierbar, die folglich definierte TAYLOR-Reihe konvergiert um jeden beliebigen Entwicklungspunkt $z_0 \in \Omega$ mit dem größtmöglichen Konvergenzradius, und es lassen sich noch viele weitere nützliche Aussagen treffen.

Viele der im Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen übliche Operationen lassen sich auf den Körper \mathbb{C} fortsetzen, so dass wir bei der Analyse reeller Funktionen oft eine Fortsetzung in die komplexe Ebene finden können, auf die sich die Funktionentheorie anwenden lässt, um Rückschlüsse über das Verhalten der Funktion im Reellen zu ziehen.

6.1 Erinnerung: Komplexe Zahlen

Der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen ist definiert als Erweiterung des Körpers \mathbb{R} der reellen Zahlen um die Lösungen der Gleichung

$$z^2 + 1 = 0, \tag{6.1}$$

die in \mathbb{R} keine Lösung besitzt. In \mathbb{C} bezeichnen wir eine ihrer Lösungen mit i und folgern, dass dann auch $-i$ eine Lösung sein muss, weitere Lösungen gibt es nicht.

Wir schreiben komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ häufig in der Form

$$z = x + iy,$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind. Wir bezeichnen x als den *Realteil* von z und y als den *Imaginärteil*, notiert als

$$\operatorname{Re} z = x, \qquad \operatorname{Im} z = y.$$

Zu jeder komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir

$$\bar{z} := x - iy$$

6 Grundlagen der Funktionentheorie

als die *konjugiert komplexe Zahl* zu z . Mit ihrer Hilfe lassen sich Real- und Imaginärteil kurz als

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}, & z &\mapsto \frac{z + \bar{z}}{2}, \\ \operatorname{Im} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}, & z &\mapsto \frac{z - \bar{z}}{2i}, \end{aligned}$$

schreiben. Aus der Tatsache, dass i Lösung der Gleichung (6.1) ist, folgen Rechenregeln für komplexe Zahlen. Wir haben

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (6.2a)$$

$$z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \quad (6.2b)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2) \quad \text{für alle } z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (6.2c)$$

Die Division ist etwas schwieriger, lässt sich aber einfach auf die Multiplikation zurückführen: Wir stellen fest, dass

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) = x^2 + iyx - ixy - i^2 y^2 \\ &= x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{für alle } z = x + iy \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

gilt, und definieren den *Betrag* einer komplexen Zahl durch

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{für alle } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Wenn wir Real- und Imaginärteil als x - und y -Koordinate in der zweidimensionalen Ebene interpretieren, entspricht der Betrag offenbar gerade dem EUKLIDISCHEN Abstand zu null. Insbesondere ist der Betrag reell, so dass wir bereits wissen, wie durch ihn zu dividieren ist. Indem wir den Kehrwert mit dem konjugiert komplexen Element erweitern, erhalten wir

$$1/z = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

also eine praktisch benutzbare Formel für die Berechnung des Kehrwerts. Es folgt

$$\begin{aligned} z_1/z_2 &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad \begin{array}{l} \text{für alle } z_1 = x_1 + iy_1 \in \mathbb{C}, \\ z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{array} \end{aligned}$$

Das komplexe Konjugieren ist mit den Rechenoperationen verträglich, es gelten

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, & \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2 & \text{für alle } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ \overline{z_1/z_2} &= \bar{z}_1/\bar{z}_2 & & & \text{für alle } z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

6.2 Holomorphe Funktionen

Sei im Folgenden $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge des Körpers \mathbb{C} .

Definition 6.1 (Holomorphe Funktion) *Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar in einem Punkt $z \in \Omega$, falls der Grenzwert*

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (6.3)$$

existiert. Falls f in jedem Punkt $z \in \Omega$ komplex differenzierbar ist und die dann definierte Ableitung $f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, nennen wir f holomorph auf Ω .

Holomorphe Funktionen sind der zentrale Gegenstand der Funktionentheorie. Sie sind wichtig, weil sich viele für die Praxis interessante Funktionen zu holomorphen Funktionen fortsetzen lassen, und weil für holomorphe Funktionen überraschende Aussagen gelten. Beispielsweise sind holomorphe Funktionen immer unendlich oft differenzierbar, ihre TAYLOR-Reihe konvergiert auf einer Umgebung jedes beliebigen Entwicklungspunkts, holomorphe Funktionen sind bereits durch ihr Verhalten auf dem *Rand* des Gebiets Ω vollständig definiert, und Real- und Imaginärteil sind eng aneinander gekoppelt.

Wir widmen uns zunächst dieser letzten Eigenschaft. Dazu stellen wir fest, dass

$$\kappa : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + iy,$$

eine bijektive lineare und differenzierbare Abbildung ist, mit deren Hilfe wir jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der zweidimensionalen Ebene mit einer komplexen Zahl $\kappa(x, y) = x + iy$ identifizieren können. Deshalb bezeichnet man \mathbb{C} auch als die *komplexe Ebene* und stellt die Körperelemente $z \in \mathbb{C}$ als Punkte in dieser Ebene dar. Der Betrag fällt mit der EUKLIDISCHEN Norm zusammen:

$$|z| = \|\kappa^{-1}(z)\|_2 = \|\hat{z}\|_2 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \quad (6.4)$$

Wir ordnen jedem $z \in \mathbb{C}$ den Vektor $\hat{z} := \kappa^{-1}(z)$ zu und stellen fest, dass umgekehrt auch $\kappa(\hat{z}) = z$ gilt. Jede Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ können wir mit

$$\hat{\Omega} := \kappa^{-1}(\Omega)$$

als Funktion

$$\hat{f} : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \hat{z} \mapsto \kappa^{-1} \circ f \circ \kappa(\hat{z}), \quad (6.5)$$

interpretieren.

Definition 6.2 (Reell differenzierbar) *Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir reell differenzierbar in einem Punkt $z \in \mathbb{C}$, falls \hat{f} differenzierbar in $\hat{z} = \kappa^{-1}(z) \in \mathbb{R}^2$ ist. In diesem Fall bezeichnen wir die JACOBI-Matrix mit $D\hat{f}(\hat{z}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.*

Wir nennen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbar auf Ω , falls \hat{f} in jedem Punkt $\hat{z} \in \hat{\Omega}$ differenzierbar ist und die JACOBI-Matrizen stetig von \hat{z} abhängen.

6 Grundlagen der Funktionentheorie

Es gibt Funktionen, die reell differenzierbar sind, aber nicht komplex differenzierbar. Als Beispiel untersuchen wir die Abbildung

$$\operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

die jeder komplexen Zahl ihren Imaginärteil zuordnet. Es gelten

$$\operatorname{Im} x = 0, \quad \operatorname{Im}(iy) = y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R},$$

also erhalten wir

$$\widehat{\operatorname{Im}}\hat{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{z} \quad \text{für alle } \hat{z} \in \mathbb{R}^2,$$

und diese Abbildung ist als lineare Abbildung zwischen \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^2 sicherlich stetig differenzierbar. Wäre Im in einem Punkt $z \in \mathbb{C}$ auch *komplex* differenzierbar, müsste ein $\operatorname{Im}'(z) \in \mathbb{C}$ so existieren, dass für alle Nullfolgen $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ auch

$$\operatorname{Im}'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im}(z + h_n) - \operatorname{Im}(z)}{h_n}$$

gilt. Wir untersuchen zunächst die Folge $(i/n)_{n \in \mathbb{N}}$, für die wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im}(z + h_n) - \operatorname{Im}(z)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im}(h_n)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{i/n} = 1/i = -i$$

erhalten. Wir können auch die Folge $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ untersuchen, für die sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im}(z + h_n) - \operatorname{Im}(z)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im}(h_n)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{1/n} = 0$$

ergibt. Also müsste $\operatorname{Im}'(z)$ gleichzeitig die Werte $-i$ und 0 annehmen, und das ist nicht möglich.

Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen eine reell differenzierbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ auch komplex differenzierbar ist. Um diese Frage zu klären, nehmen wir an, dass f komplex differenzierbar in einem Punkt $z \in \Omega$ ist. Wir bezeichnen die Ableitung mit $d := f'(z) \in \mathbb{C}$ und stellen fest, dass (6.3) sich in der Form

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z) - dh}{h}$$

schreiben lässt. Diese Gleichung ist äquivalent dazu, dass eine Funktion φ auf einer Umgebung $\omega \subseteq \Omega - z$ von 0 so existiert, dass

$$f(z + h) = f(z) + dh + |h|\varphi(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0 \quad \text{für alle } h \in \omega$$

gelten, denn wir können

$$\varphi(h) := \frac{f(z + h) - f(z) - dh}{|h|}$$

verwenden. Mit (6.4) und (6.5) erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{f}(\hat{z} + \hat{h}) &= \hat{f}(\hat{z}) + \kappa^{-1}(dh) + |h|\hat{\varphi}(\hat{h}) \\ &= \hat{f}(\hat{z}) + \kappa^{-1}(dh) + \|\hat{h}\|_2\hat{\varphi}(\hat{h})\end{aligned}\quad (6.6)$$

Da komplexe Differenzierbarkeit insbesondere reelle Differenzierbarkeit impliziert, muss \hat{f} in \hat{z} differenzierbar sein, also müssen eine JACOBI-Matrix $D\hat{f}(\hat{z})$ und eine auf einer Umgebung $\hat{\omega} \subseteq \hat{\Omega} - \hat{z}$ definierte Funktion ψ so existieren, dass

$$\hat{f}(\hat{z} + \hat{h}) = \hat{f}(\hat{z}) + D\hat{f}(\hat{z})\hat{h} + \|\hat{h}\|_2\psi(\hat{h}), \quad \lim_{\hat{h} \rightarrow 0} \psi(\hat{h}) = 0$$

gelten. Indem wir diese Gleichung in (6.6) einsetzen, erhalten wir

$$D\hat{f}(\hat{z})\hat{h} - \kappa^{-1}(dh) = \|\hat{h}\|_2(\hat{\varphi}(\hat{h}) - \psi(\hat{h})),$$

wir müssen also $D\hat{f}(\hat{z})\hat{h}$ zu $\kappa^{-1}(dh)$ in Bezug setzen können. Dazu bringen wir letzteren in die Form eines Matrix-Vektor Produkts: Nach Definition gelten

$$d = \hat{d}_1 + i\hat{d}_2, \quad h = \hat{h}_1 + i\hat{h}_2,$$

und das Produkt ist nach (6.2c) durch

$$dh = (\hat{d}_1\hat{h}_1 - \hat{d}_2\hat{h}_2) + i(\hat{d}_1\hat{h}_2 + \hat{h}_1\hat{d}_2)$$

gegeben, so dass sich

$$\kappa^{-1}(dh) = \begin{pmatrix} \hat{d}_1\hat{h}_1 - \hat{d}_2\hat{h}_2 \\ \hat{d}_2\hat{h}_1 + \hat{d}_1\hat{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{d}_1 & -\hat{d}_2 \\ \hat{d}_2 & \hat{d}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{h}_1 \\ \hat{h}_2 \end{pmatrix}\quad (6.7)$$

ergibt. Wenn (6.6) gelten soll, muss also die JACOBI-Matrix die Gestalt

$$D\hat{f}(\hat{z}) = \begin{pmatrix} \hat{d}_1 & -\hat{d}_2 \\ \hat{d}_2 & \hat{d}_1 \end{pmatrix}$$

aufweisen. Daraus ergibt sich eine Charakterisierung der komplexen Differenzierbarkeit.

Satz 6.3 (CAUCHY-RIEMANN-Differentialgleichungen) *Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. f ist in einem Punkt $z \in \Omega$ genau dann komplex differenzierbar, falls \hat{f} in dem Punkt \hat{z} differenzierbar ist und die CAUCHY-RIEMANN-Differentialgleichungen*

$$\partial_1\hat{f}_1(\hat{z}) = \partial_2\hat{f}_2(\hat{z}), \quad \partial_2\hat{f}_1(\hat{z}) = -\partial_1\hat{f}_2(\hat{z})\quad (6.8)$$

gelten. In diesem Fall haben wir $f'(z) = \partial_1\hat{f}_1(\hat{z}) + i\partial_1\hat{f}_2(\hat{z})$.

Falls die Differentialgleichungen für alle $\hat{z} \in \hat{\Omega}$ gelten, ist f holomorph.

6 Grundlagen der Funktionentheorie

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$, und sei \hat{f} in \hat{z} differenzierbar. Nach Definition existieren dann eine Umgebung $\hat{\omega}_r \subseteq \mathbb{R}^2$ der Null mit $\hat{\omega}_r + \hat{z} \subseteq \hat{\Omega}$, eine Matrix $D\hat{f}(\hat{z}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und eine Abbildung $\hat{\psi} : \hat{\omega}_r \rightarrow \mathbb{R}^2$ so, dass

$$\hat{f}(\hat{z} + \hat{h}) = \hat{f}(\hat{z}) + D\hat{f}(\hat{z})\hat{h} + \|\hat{h}\|_2 \hat{\psi}(\hat{h}) \quad \text{für alle } \hat{h} \in \hat{\omega}_r, \quad (6.9a)$$

$$\lim_{\hat{h} \rightarrow 0} \hat{\psi}(\hat{h}) = 0 \quad (6.9b)$$

gelten.

Wir nehmen zunächst an, dass f in z komplex differenzierbar ist. Dann finden wir eine Umgebung $\omega_c \subseteq \mathbb{C}$ der Null mit $\omega_c + z \subseteq \Omega$, eine Zahl $d := f'(z) \in \mathbb{C}$ und eine Abbildung $\varphi : \omega_c \rightarrow \mathbb{C}$ so, dass

$$f(z + h) = f(z) + dh + |h|\varphi(h) \quad \text{für alle } h \in \omega_c,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$$

gelten. Indem wir zu \hat{f} , $\hat{d} := \kappa^{-1}(d)$, $\hat{\varphi} := \kappa^{-1} \circ \varphi \circ \kappa$ und $\hat{\omega}_c := \kappa^{-1}(\omega_c)$ übergehen, erhalten wir mit (6.7)

$$\hat{f}(\hat{z} + \hat{h}) = \hat{f}(\hat{z}) + \begin{pmatrix} \hat{d}_1 & -\hat{d}_2 \\ \hat{d}_2 & \hat{d}_1 \end{pmatrix} \hat{h} + \|\hat{h}\|_2 \hat{\varphi}(\hat{h}) \quad \text{für alle } \hat{h} \in \hat{\omega}_c,$$

$$\lim_{\hat{h} \rightarrow 0} \hat{\varphi}(\hat{h}) = 0.$$

Indem wir in (6.9) einsetzen, folgt

$$\begin{aligned} \left(D\hat{f}(\hat{z}) - \begin{pmatrix} \hat{d}_1 & -\hat{d}_2 \\ \hat{d}_2 & \hat{d}_1 \end{pmatrix} \right) \hat{h} &= \|\hat{h}\|_2 (\hat{\varphi}(\hat{h}) - \hat{\psi}(\hat{h})), \\ \left\| D\hat{f}(\hat{z}) - \begin{pmatrix} \hat{d}_1 & -\hat{d}_2 \\ \hat{d}_2 & \hat{d}_1 \end{pmatrix} \right\|_2 \|\hat{h}\|_2 &\leq \|\hat{h}\|_2 \|\hat{\varphi}(\hat{h}) - \hat{\psi}(\hat{h})\|_2, \\ \left\| D\hat{f}(\hat{z}) - \begin{pmatrix} \hat{d}_1 & -\hat{d}_2 \\ \hat{d}_2 & \hat{d}_1 \end{pmatrix} \right\|_2 &\leq \|\hat{\varphi}(\hat{h}) - \hat{\psi}(\hat{h})\|_2, \end{aligned}$$

und da die rechte Seite für $\hat{h} \rightarrow 0$ gegen null geht, folgt

$$D\hat{f}(\hat{z}) = \begin{pmatrix} \hat{d}_1 & -\hat{d}_2 \\ \hat{d}_2 & \hat{d}_1 \end{pmatrix},$$

also die Gültigkeit der CAUCHY-RIEMANN-Differentialgleichungen.

Zum Beweis der Gegenrichtung gehen wir nun davon aus, dass f reell differenzierbar in z ist und dass die CAUCHY-RIEMANN-Differentialgleichungen gelten. Dann folgt

$$D\hat{f}(\hat{z}) = \begin{pmatrix} \partial_1 \hat{f}_1(\hat{z}) & \partial_2 \hat{f}_1(\hat{z}) \\ \partial_1 \hat{f}_2(\hat{z}) & \partial_2 \hat{f}_2(\hat{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{d}_1 & -\hat{d}_2 \\ \hat{d}_2 & \hat{d}_1 \end{pmatrix}$$

mit $\hat{d}_1 := \partial_1 \hat{f}_1(\hat{z})$ und $\hat{d}_2 := \partial_1 \hat{f}_2(\hat{z})$, und wir erhalten mit (6.7) die Gleichung

$$D\hat{f}(\hat{z})\hat{h} = \kappa^{-1}(dh).$$

Mit (6.9) ergibt sich

$$\hat{f}(\hat{z} + \hat{h}) = \hat{f}(\hat{z}) + \kappa^{-1}(dh) + \|\hat{h}\|_2 \hat{\psi}(\hat{h}) \quad \text{für alle } \hat{h} \in \hat{\omega}_r.$$

Indem wir $\omega_r := \kappa(\hat{\omega}_r)$ und $\psi := \kappa \circ \hat{\psi} \circ \kappa^{-1}$ setzen und (6.4) ausnutzen, folgt

$$\begin{aligned} f(z+h) &= f(z) + dh + |h|\psi(h) && \text{für alle } h \in \omega_r, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \psi(h) &= 0, \end{aligned}$$

also ist f in z komplex differenzierbar mit $f'(z) = d$. ■

Die uns bereits bekannten Funktionen auf \mathbb{C} sind holomorph: Addition, Subtraktion und Multiplikation sind es in beiden Argumenten auf ganz \mathbb{C} , die Division im zweiten Argument nur auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Daraus folgt, dass auch jedes *Polynom*

$$p(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ holomorph ist.

6.3 Potenzreihen

Eine Erweiterung der Polynome sind die *Potenzreihen*. Zur jeder Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in \mathbb{C} können wir untersuchen, auf welcher Menge die Abbildung

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

definiert ist, die Reihe also konvergiert. Die Menge der z , für die das geschieht, ist kreisförmig:

Lemma 6.4 (Konvergenzkreis) *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ so gegeben, dass die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$$

konvergiert. Dann konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

und zwar liegt sogar absolute Konvergenz vor.

6 Grundlagen der Funktionentheorie

Beweis. (vgl. etwa [3, Kapitel 1.2]) Aus der Konvergenz der Reihe in z_0 folgt, dass die Folge $(a_n z_0^n)_{n=0}^\infty$ eine Nullfolge sein muss, also insbesondere beschränkt. Somit existiert ein $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$|a_n z_0^n| \leq C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ setzen wir $q := |z|/|z_0| < 1$ und erhalten mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m |a_n z^n| &= \sum_{n=0}^m |a_n z_0^n| \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \leq C \sum_{n=0}^m q^n = C \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| &\leq C \frac{1}{1 - q}, \end{aligned}$$

also ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^m a_n z^n$$

sogar absolut konvergent. ■

Das Konvergenzverhalten können wir durch den *Konvergenzradius* charakterisieren: Wir setzen

$$\varrho(a) := \sup\{|z| : \text{die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert}\} \quad \text{für alle } a = (a_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}.$$

und folgern aus Lemma 6.4, dass

$$|z| < \varrho(a) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ ist absolut summierbar} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gilt, wir haben also einen Kreis gefunden, in dem die Reihe für jeden Punkt konvergiert, und aus der Definition des Konvergenzradius folgt, dass sie außerhalb dieses Radius nicht konvergiert. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \varrho$ erhalten wir keine Aussage.

Ein besonders wichtiges Beispiel ist die *Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n,$$

die für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent ist: Aus der STIRLING-Formel erhalten wir die Abschätzung

$$n! \geq \frac{n^n}{e^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und indem wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $e|z| \leq n_0/2$ wählen, folgt

$$\frac{1}{n!} |z|^n \leq \frac{e^n}{n^n} |z|^n = \left(\frac{e|z|}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0},$$

also die absolute Konvergenz der Reihe. Damit ist die durch diese Reihe gegebene *Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n,$$

wohldefiniert. Entsprechend können wir mit dem *Sinus* und dem *Cosinus* verfahren und erhalten

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \\ \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Reihendarstellungen lässt sich direkt die EULER-Formel

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

nachprüfen, denn wir können die Exponentialreihe in geradzahlige und ungeradzahlige Terme zerlegen und erhalten

$$\begin{aligned} \exp(iz) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (iz)^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!} (iz)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-1)^n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{(2n+1)!} (-1)^n z^{2n+1} \\ &= \cos(z) + i \sin(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

In diesem Kapitel sind Potenzreihen vor allem von Interesse, weil sie in einer engen Beziehung zu holomorphen Funktionen stehen.

Lemma 6.5 (Potenzreihen differenzierbar) Sei $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in \mathbb{C} , und sei $\varrho := \varrho(a) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ihr Konvergenzradius. Falls $\varrho > 0$ gilt, ist

$$f : K(0, \varrho) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

eine holomorphe Funktion, deren Ableitung durch

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1} \quad \text{für alle } z \in K(0, \varrho)$$

gegeben ist.

6 Grundlagen der Funktionentheorie

Beweis. (vgl. [3, Abschnitt 1.2]) Wir zeigen zunächst, dass die (zunächst nur formale) Ableitung

$$g_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1} \quad \text{für alle } z \in K(0, \varrho)$$

wohldefiniert ist, dass also die Reihe konvergiert. Sei $z \in K(0, \varrho)$. Nach Definition des Konvergenzradius finden wir dann ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z_0| > |z|$, für das die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$$

konvergiert. Wir zuvor muss dann $(a_n z_0^n)_{n=0}^{\infty}$ eine Nullfolge sein, so dass wir

$$q := \frac{|z|}{|z_0|} < 1, \quad C := \sup\{|a_n z_0^n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

setzen können und feststellen, dass

$$\sum_{n=1}^m |a_n n z^{n-1}| = \sum_{n=1}^m |a_n z_0^{n-1}| n q^{n-1} = \frac{1}{|z_0|} \sum_{n=1}^m |a_n z_0^n| n q^{n-1} \leq \frac{C}{|z_0|} \sum_{n=1}^m C n q^{n-1}$$

gilt. Wir wählen ein $p \in]q, 1[$ und stellen fest, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ geben muss, für das

$$\frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) q \leq p < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$$

gilt. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}$$

summierbar ist, also ist $g_1(z)$ absolut summierbar und somit wohldefiniert.

Für den Beweis benötigen wir auch eine Abschätzung für eine Variante der zweiten Ableitung, die sich ähnlich berechnen lässt: Für die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n n(n-1) z^{n-2}| \leq \frac{C}{|z_0|^2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) q^{n-2}$$

finden wir ein $n_0 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ mit

$$\frac{(n+1)nq^{n-1}}{n(n-1)q^{n-2}} = \left(1 + \frac{2}{n-1}\right) q \leq p < 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0},$$

also ist auch

$$g_2 : K(0, \varrho) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| |z|^{n-2},$$

summierbar und auf $K(0, \varrho)$ definiert.

Sei $z \in K(0, \varrho)$. Unser Ziel ist es, nachzuweisen, dass

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g_1(z)$$

gilt. Wir wählen $r \in]|z|, \varrho[$ und setzen $\delta := r - |z| > 0$. Sei $h \in K(0, \delta)$ beliebig, aber fest. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g_1(z) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^k) - z^n}{h} - nz^{n-1} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} - nz^{n-1} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-1} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n h \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} z^{n-k} h^{k-2} \right) \right| \\ &\leq |h| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |z|^{n-k} |h|^{k-2} \\ &= |h| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n}{\ell+2} |z|^{n-\ell-2} |h|^{\ell} \\ &= |h| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{n(n-1)}{(\ell+1)(\ell+2)} \binom{n-2}{\ell} |z|^{n-2-\ell} |h|^{\ell} \\ &\leq |h| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n(n-1) \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} |z|^{n-2-\ell} |h|^{\ell} \\ &= |h| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n(n-1) (|z| + |h|)^{n-2} \\ &\leq |h| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n(n-1) r^{n-2} = |h| g_2(r). \end{aligned}$$

Also haben wir

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g_1(z) \right| \leq |h| g_2(r) \quad \text{für alle } h \in K(0, \delta)$$

erhalten und dürfen schließen, dass g_1 die Ableitung der Funktion f ist. ■

6.4 Kurvenintegrale

Im Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen steht uns der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (vgl. Erinnerung 5.4 zur Verfügung, um beispielsweise Stammfunktionen zu konstruieren oder Mittelwertsätze zu verwenden. Um ähnliche Hilfsmittel auch in der komplexen Ebene \mathbb{C} verwenden zu können, untersuchen wir Integrale entlang von Kurven in dieser Ebene.

Definition 6.6 (Kurve) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$$

nennen wir eine Kurve in Ω .

Um Ergebnisse der Theorie der RIEMANN-Integrale anwenden zu können, müssen wir einen Integralbegriff definieren, der möglichst nahe mit dem RIEMANN-Integral verwandt ist. Ist beispielsweise $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, und ist $\gamma : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine differenzierbare Funktion mit $\gamma(c) = a$ und $\gamma(d) = b$, so folgt mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung und der Kettenregel

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) ds &= F(b) - F(a) = F(\gamma(d)) - F(\gamma(c)) = \int_c^d F'(\gamma(s))\gamma'(s) ds \\ &= \int_c^d f(\gamma(s))\gamma'(s) ds. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich auch noch verwenden, wenn f auf einem mehrdimensionalen Definitionsbereich gegeben ist, in den γ abbildet. Diese Formel ist unsere Inspiration für die Definition des *Kurvenintegrals*:

Definition 6.7 (Kurvenintegral) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, und sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ eine Kurve in Ω . Dann ist $f \circ \gamma \gamma'$ auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ stetig, also RIEMANN-integrierbar, und wir können das Kurvenintegral von f entlang γ durch

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

definieren.

Bemerkung 6.8 (Rechenregeln) Viele der Eigenschaften des RIEMANN-Integrals übertragen sich auf das Kurvenintegral. Beispielsweise ist das Kurvenintegral linear, für eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ und stetige Funktionen $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (f + \alpha g)(z) dz &= \int_a^b (f + \alpha g)(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt + \alpha \int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t) dt \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz + \alpha \int_{\gamma} g(z) dz. \end{aligned}$$

Wir sind in einigen Beweisen darauf angewiesen, Kurvenintegrale abschätzen zu können, beispielsweise um Konvergenzaussagen nachzuweisen. Im Fall des RIEMANN-Integrals können wir dazu

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b \|f\|_{\infty, [a,b]} dx = (b-a) \|f\|_{\infty, [a,b]} \quad (6.10)$$

verwenden. Für das Kurvenintegral müssen wir den Term γ' berücksichtigen und erhalten den Begriff der *Kurvenlänge*:

Definition 6.9 (Kurvenlänge) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Kurve. Dann ist $|\gamma'|$ stetig auf $[a, b]$, also RIEMANN-integrierbar, und wir bezeichnen

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

als die Länge der Kurve γ .

Mit Hilfe der Kurvenlänge können wir (6.10) auf den Fall der Kurvenintegrale übertragen:

Lemma 6.10 (Obere Schranke) Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ eine Kurve, und sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \|f\|_{\infty, \gamma} \leq L(\gamma) \|f\|_{\infty, \Omega}, \quad (6.11)$$

$$\|f\|_{\infty, \gamma} := \sup\{|f(\gamma(t))| : t \in [a, b]\}, \quad \|f\|_{\infty, \Omega} := \sup\{|f(z)| : z \in \Omega\}.$$

Beweis. Wir gehen wie in (6.10) vor, um

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \int_a^b \|f\|_{\infty, \gamma} |\gamma'(t)| dt \\ &= \|f\|_{\infty, \gamma} \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \|f\|_{\infty, \gamma} L(\gamma) \end{aligned}$$

zu erhalten. Der Rest der Abschätzung ist wegen $\gamma([a, b]) \subseteq \Omega$ trivial. ■

Gelegentlich erhalten wir Kurven, indem wir eine gegebene Kurve γ mit einer reell stetig differenzierbaren Abbildung Φ verketteten. In diesem Fall lassen sich Längenänderungen mit Hilfe der JACOBI-Matrix abschätzen. Wir verwenden in diesem Fall die Schreibweise $D\Phi$, um zu betonen, dass Φ nicht komplex differenzierbar zu sein braucht, reelle Differenzierbarkeit genügt.

Lemma 6.11 (Längenänderungen) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, und sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ eine Kurve in Ω . Sei $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist auch $\Phi \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \Phi(\Omega)$ eine Kurve.

$$L(\Phi \circ \gamma) \leq ML(\gamma), \quad M := \max\{\|D\Phi(\gamma(t))\| : t \in [a, b]\}.$$

6 Grundlagen der Funktionentheorie

Für Punkte $z_1, z_2 \in \Omega$, die $(1-t)z_2 + tz_1$ für alle $t \in [0, 1]$ erfüllen, deren Verbindungsgerade also in Ω verläuft, erhalten wir

$$|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)| \leq M|z_1 - z_2|, \quad M := \max\{\|D\Phi((1-t)z_2 + tz_1)\| : t \in [0, 1]\}.$$

Beweis. Die erste Abschätzung folgt per Kettenregel aus

$$L(\Phi \circ \gamma) = \int_a^b |(\Phi \circ \gamma)'(t)| dt \leq \int_a^b \|D\Phi(\gamma(t))\| |\gamma'(t)| dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = ML(\gamma).$$

Die zweite erhalten wir, indem wir die Verbindungsstrecke zwischen z_1 und z_2 durch

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega, \quad t \mapsto (1-t)z_2 + tz_1,$$

darstellen und den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (vgl. Erinnerung 5.4) auf die Funktion $\Phi \circ \gamma$ anwenden, um

$$\begin{aligned} |\Phi(z_1) - \Phi(z_2)| &= |\Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0))| = \left| \int_0^1 D\Phi(\gamma(t))\gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \|D\Phi(\gamma(t))\| |z_1 - z_2| dt \leq M \int_0^1 |z_1 - z_2| dt = M|z_1 - z_2| \end{aligned}$$

zu erhalten. ■

Wir werden häufiger Kurvenintegrale über aneinander anschließende Kurven berechnen müssen. Zur Abkürzung führen wir den Begriff des *Kurvenzugs* ein, der solche endlichen Kombinationen von Kurven beschreibt:

Definition 6.12 (Kurvenzug) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, und seien $n \in \mathbb{N}$ und Kurven

$$\gamma_m : [a_m, b_m] \rightarrow \Omega, \quad \text{für alle } m \in \{1, \dots, n\}$$

gegeben, die

$$\gamma_m(b_m) = \gamma_{m+1}(a_{m+1}) \quad \text{für alle } m \in \{1, \dots, n-1\}$$

erfüllen. Dann nennen wir das Tupel $\gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ einen Kurvenzug in Ω . Falls auch $\gamma_n(b_n) = \gamma_1(a_1)$ gilt, nennen wir den Kurvenzug γ geschlossen.

Das Kurvenintegral einer stetigen Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ und der Begriff der Länge übertragen sich per

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{m=1}^n \int_{\gamma_m} f(z) dz, \quad L(\gamma) := \sum_{m=1}^n L(\gamma_m)$$

auf Kurvenzüge. Falls $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Abbildung ist, können wir den Kurvenzug

$$\Phi \circ \gamma := (\Phi \circ \gamma_1, \dots, \Phi \circ \gamma_n)$$

definieren. Falls γ geschlossen ist, gilt dasselbe für $\Phi \circ \gamma$. Für die Konstante

$$M := \max\{|\gamma_m(t)| : m \in \{1, \dots, n\}, t \in [a_m, b_m]\}$$

erhalten wir per Lemma 6.11 die Abschätzung

$$L(\Phi \circ \gamma) \leq ML(\gamma).$$

Folgerung 6.13 (Obere Schranke) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, sei $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ein Kurvenzug in Ω , und sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \|f\|_{\infty, \Omega}.$$

Beweis. Mit Lemma 6.10 und der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \sum_{m=1}^n \int_{\gamma_m} f(z) dz \right| \leq \sum_{m=1}^n \left| \int_{\gamma_m} f(z) dz \right| \\ &\leq \sum_{m=1}^n L(\gamma_m) \|f\|_{\infty, \gamma_m} \leq L(\gamma) \|f\|_{\infty, \Omega}. \end{aligned}$$

■

6.5 CAUCHY-Integralsatz

Kurven und Kurvenzüge stehen in einer engen Beziehung zu der Frage nach der Stammfunktion einer Funktion. Falls nämlich eine holomorphe Funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = F'$ existiert, folgt für eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung (vgl. Erinnerung 5.4)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Für einen geschlossenen Kurvenzug $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ erhalten wir so

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{m=1}^n F(\gamma_m(b_m)) - F(\gamma_m(a_m)) \\ &= F(\gamma_1(a_1)) - F(\gamma_n(a_n)) + \sum_{m=1}^{n-1} F(\gamma_{m+1}(a_{m+1})) - F(\gamma_m(a_m)) = 0 \end{aligned}$$

und stellen fest, dass das Integral über einen geschlossenen Kurvenzug immer gleich null ist. Unter gewissen Bedingungen lässt sich beweisen, dass diese Eigenschaft sogar äquivalent zu der Existenz einer Stammfunktion ist.

6 Grundlagen der Funktionentheorie

Unser Ziel ist es, Kurvenintegrale holomorpher Funktionen zu untersuchen. Als Hilfsmittel verwenden wir dazu Integrale über spezielle Kurvenzüge, nämlich Kurvenzüge über die Ränder von achsenparallelen Rechtecken.

Definition 6.14 (Rechteck) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$ gegeben. Dann ist

$$R := \{x + iy : x \in [a, b], y \in [c, d]\} \quad (6.12)$$

ein achsenparalleles Rechteck in der komplexen Ebene, dessen Rand wir durch den geschlossenen Kurvenzug

$$\gamma_R := (\gamma_{R,1}, \gamma_{R,2}, \gamma_{R,3}, \gamma_{R,4})$$

mit den Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_{R,1} : [0, 1] &\rightarrow R, & t &\mapsto (1-t)a + tb + ic, \\ \gamma_{R,2} : [0, 1] &\rightarrow R, & t &\mapsto b + (1-t)ic + tid, \\ \gamma_{R,3} : [0, 1] &\rightarrow R, & t &\mapsto (1-t)b + ta + id, \\ \gamma_{R,4} : [0, 1] &\rightarrow R, & t &\mapsto a + (1-t)id + tic, \end{aligned}$$

beschreiben können.

Für ein Rechteck der Form (6.12) lässt sich leicht nachprüfen, dass

$$\gamma'_{R,1} = b - a, \quad \gamma'_{R,2} = i(d - c), \quad \gamma'_{R,3} = a - b, \quad \gamma'_{R,4} = i(c - d)$$

gelten, und wir erhalten mit Folgerung 6.13 die Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq L(\gamma_R) \|f\|_{\infty, R} \leq (2(b-a) + 2(d-c)) \|f\|_{\infty, R}.$$

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass bei holomorphen Funktionen f auf der linken Seite dieser Abschätzung die Null steht, dass also das Integral über γ_R verschwindet. Dazu können wir einen Punkt $z_0 \in R$ wählen und mit der komplexen Differenzierbarkeit schließen, dass ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine Funktion $\varphi : K(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) &= 0, \\ f(z_0 + h) &= f(z_0) + f'(z_0)h + h\varphi(h) \quad \text{für alle } h \in K(0, \epsilon) \end{aligned}$$

existieren. Falls das Rechteck so klein ist, dass $R \subseteq K(z_0, \epsilon)$ gilt, erhalten wir

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varphi(z - z_0) dz.$$

Die Funktion $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ besitzt als lineares Polynom eine Stammfunktion, nämlich $t \mapsto (z - z_0)f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)^2/2$, so dass ihr Integral über den geschlossenen Kurvenzug γ_R verschwindet. Übrig bleibt

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma_R} (z - z_0)\varphi(z - z_0) dz \right| \leq (2(b-a) + 2(d-c))\epsilon \|\varphi\|_{\infty, R},$$

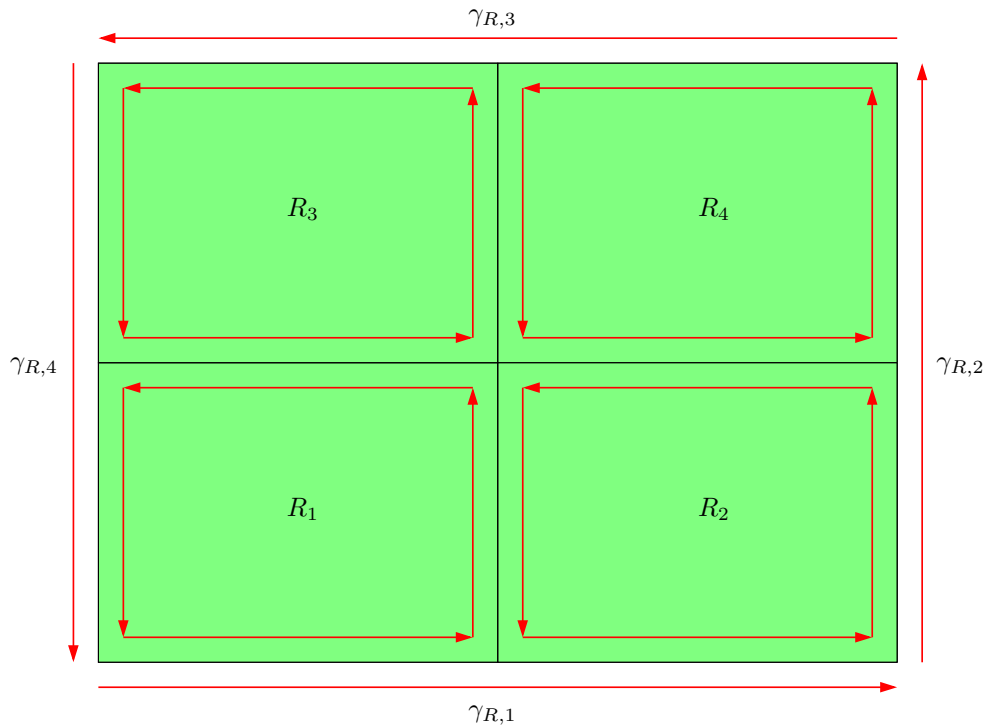


Abbildung 6.1: Zerlegung eines Rechtecks in vier kongruente Teile

und indem wir R klein genug wählen, können wir den rechten Term gegen null gehen lassen.

Die Frage ist nur, wie wir R klein genug machen können. Dazu bietet es sich an, das Rechteck in kleinere Rechtecke zu zerlegen, die sich dann weiter untersuchen lassen.

Wir werden diese Aussage in leicht verallgemeinerter Form benötigen, nämlich für *Bilder* von Rechtecken: Statt R untersuchen wir $\Phi(R)$ für eine (reell) stetig differenzierbare Abbildung $\Phi : R \rightarrow \mathbb{C}$. Der „Rand“ ist dann durch

$$\Phi \circ \gamma_R := (\Phi \circ \gamma_{R,1}, \Phi \circ \gamma_{R,2}, \Phi \circ \gamma_{R,3}, \Phi \circ \gamma_{R,3})$$

beschrieben, und da Φ differenzierbar ist, sind die Komponenten dieses Tupels wieder Kurven, also $\Phi \circ \Gamma_R$ wieder ein Kurvenzug.

Lemma 6.15 (Zerlegung) *Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$ gegeben. Wir setzen $\hat{a}, \hat{b} := (b+a)/2$ und $\hat{c}, \hat{d} := (d+c)/2$ und definieren*

$$R := \{x + iy : x \in [a, b], y \in [c, d]\},$$

$$R_1 := \{x + iy : x \in [a, \hat{b}], y \in [c, \hat{d}]\}, \quad R_2 := \{x + iy : x \in [\hat{a}, b], y \in [c, \hat{d}]\},$$

6 Grundlagen der Funktionentheorie

$$R_3 := \{x + iy : x \in [a, \hat{b}], y \in [\hat{c}, d]\}, \quad R_4 := \{x + iy : x \in [\hat{a}, b], y \in [\hat{c}, d]\}.$$

Sei $\Phi : R \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ mit $R \subseteq \Omega$ gegeben, und sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\int_{\Phi \circ \gamma_R} f(z) dz = \int_{\Phi \circ \gamma_{R_1}} f(z) dz + \int_{\Phi \circ \gamma_{R_2}} f(z) dz + \int_{\Phi \circ \gamma_{R_3}} f(z) dz + \int_{\Phi \circ \gamma_{R_4}} f(z) dz.$$

Beweis. Seien $\gamma_R, \gamma_{R_1}, \gamma_{R_2}, \gamma_{R_3}$ und γ_{R_4} wie in Definition 6.14 gegeben. Aus den Randintegralen der Teilrechtecke lassen sich die des ursprünglichen Rechtecks zusammensetzen:

$$\begin{aligned} \int_{\Phi \circ \gamma_{R,1}} f(z) dz &= \int_0^1 f \circ \Phi((1-t)a + tb + ic) D\Phi(\gamma_{R,1}(t))(b-a) dt \\ &= \int_0^{1/2} f \circ \Phi((1-t)a + tb + ic) D\Phi(\gamma_{R,1}(t))(b-a) dt \\ &\quad + \int_{1/2}^1 f \circ \Phi((1-t)a + tb + ic) D\Phi(\gamma_{R,1}(t))(b-a) dt \\ &= \int_0^{1/2} f \circ \Phi((1-t)a + tb + ic) D\Phi(\gamma_{R,1}(t))(b-a) dt \\ &\quad + \int_0^{1/2} f \circ \Phi((1/2-t)a + (t+1/2)b + ic) D\Phi(\gamma_{R,1}(t+1/2))(b-a) dt \\ &= \int_0^1 f \circ \Phi((1-t/2)a + tb/2 + ic) D\Phi(\gamma_{R,1}(t/2)) \frac{b-a}{2} dt \\ &\quad + \int_0^1 f \circ \Phi((1-t)a/2 + (t+1)b/2 + ic) D\Phi(\gamma_{R,1}((t+1)/2)) \frac{b-a}{2} dt \\ &= \int_0^1 f \circ \Phi((1-t)a + t\hat{a} + ic) D\Phi(\gamma_{R_1,1}(t))(\hat{a}-a) dt \\ &\quad + \int_0^1 f \circ \Phi((1-t)\hat{a} + tb + ic) D\Phi(\gamma_{R_2,1}(t))(b-\hat{a}) dt \\ &= \int_{\Phi \circ \gamma_{R_1,1}} f(z) dz + \int_{\Phi \circ \gamma_{R_2,1}} f(z) dz. \end{aligned}$$

Entsprechend können wir mit $\gamma_{R,2}, \gamma_{R,3}$ und $\gamma_{R,4}$ verfahren. Bei den „inneren“ Integralen können wir ausnutzen, dass sich jeweils zwei von ihnen gegenseitig aufheben: Indem wir im zweiten Integral t durch $1-t$ substituieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Phi \circ \gamma_{R_1,2}} f(z) dz + \int_{\Phi \circ \gamma_{R_2,4}} f(z) dz \\ &= \int_0^1 f \circ \Phi(\hat{a} + (1-t)ic + tid) D\Phi(\gamma_{R_1,2}(t))i(d-c) dt \\ &\quad + \int_0^1 f \circ \Phi(\hat{a} + tic + (1-t)id) D\Phi(\gamma_{R_2,4}(t))i(c-d) dt \end{aligned}$$

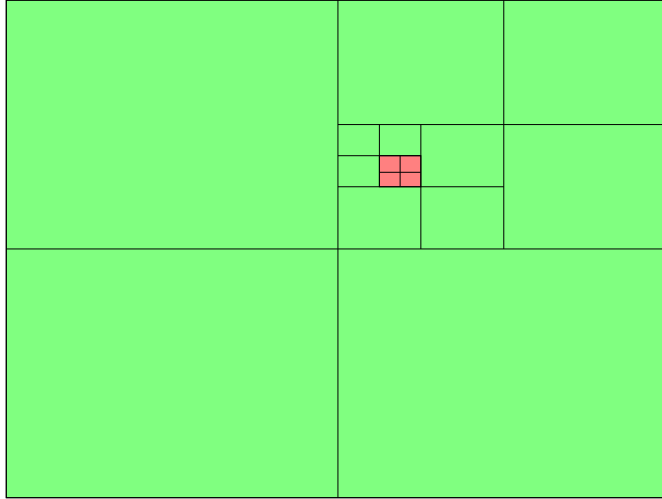


Abbildung 6.2: Konstruktion einer Folge von Teilrechtecken

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 f \circ \Phi(\hat{a} + (1-t)ic + tid) D\Phi(\gamma_{R_1,2}(t)) i(d-c) dt \\
&\quad - \int_1^0 f \circ \Phi(\hat{a} + (1-t)ic + tid) D\Phi(\gamma_{R_2,4}(1-t)) i(c-d) dt \\
&= \int_0^1 f \circ \Phi(\hat{a} + (1-t)ic + tid) D\Phi(\gamma_{R_1,2}(t)) i(d-c) dt \\
&\quad - \int_1^0 f \circ \Phi(\hat{a} + (1-t)ic + tid) D\Phi(\gamma_{R_1,2}(t)) i(c-d) dt \\
&= \int_0^1 f \circ \Phi(\hat{a} + (1-t)ic + tid) D\Phi(\gamma_{R_1,2}(t)) i(d-c) dt \\
&\quad - \int_0^1 f \circ \Phi(\hat{a} + (1-t)ic + tid) D\Phi(\gamma_{R_1,2}(t)) i(d-c) dt = 0.
\end{aligned}$$

Entsprechend heben sich $\gamma_{R_2,3}$ und $\gamma_{R_4,1}$, $\gamma_{R_4,4}$ und $\gamma_{R_3,2}$ sowie $\gamma_{R_3,1}$ und $\gamma_{R_1,3}$ gegenseitig auf und wir haben die gewünschte Gleichung bewiesen. ■

Mit Hilfe dieses Ergebnisses können wir zu beliebig kleinen Rechtecken übergehen, und indem wir die dabei entstehenden Rechtecke in geeigneter Weise wählen, können wir sicher stellen, dass sich trotzdem eine obere Schranke für das ursprüngliche Rechteck finden lässt (vgl. Abbildung 6.2).

Lemma 6.16 (Geschachtelte Rechtecke) Sei R ein durch (6.12) definiertes Rechteck. Sei $\Phi : R \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann existiert eine Folge $(R_n)_{n=0}^\infty$ von Rechtecken derart, dass

$$R_0 = R, \tag{6.13a}$$

6 Grundlagen der Funktionentheorie

$$R_{n+1} \subseteq R_n, \quad (6.13b)$$

$$\text{diam}(R_n) := \max\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in R_n\} \leq 2^{-n} \text{diam}(R), \quad (6.13c)$$

$$\left| \int_{\Phi \circ \gamma_R} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Phi \circ \gamma_{R_n}} f(z) dz \right|, \quad (6.13d)$$

$$L(\gamma_{R_n}) = 2^{-n} L(\gamma_R) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \quad (6.13e)$$

gelten. Es gibt genau einen Punkt $z_0 \in \Phi(R)$, der in allen Mengen $\Phi(R_n)$ enthalten ist.

Beweis. Wir gehen induktiv vor. Falls R_n für ein $n \in \mathbb{N}_0$ bereits bekannt ist, können wir mit Lemma 6.15 vier Teilrechtecke $R_{n,1}, \dots, R_{n,4}$ finden, für die

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Phi \circ R_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\Phi \circ R_{n,1}} f(z) dz + \int_{\Phi \circ R_{n,2}} f(z) dz + \int_{\Phi \circ R_{n,3}} f(z) dz + \int_{\Phi \circ R_{n,4}} f(z) dz \right| \\ &\leq \left| \int_{\Phi \circ R_{n,1}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\Phi \circ R_{n,2}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\Phi \circ R_{n,3}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\Phi \circ R_{n,4}} f(z) dz \right| \end{aligned}$$

gilt. Wir wählen dasjenige Teilrechteck, für das der Betrag des Integrals maximal wird, fixieren also $\iota \in \{1, \dots, 4\}$ mit

$$\left| \int_{\Phi \circ R_{n,\iota}} f(z) dz \right| \geq \left| \int_{\Phi \circ R_{n,k}} f(z) dz \right| \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, 4\}.$$

Nun können wir $R_{n+1} := R_{n,\iota}$ setzen und folgern

$$\left| \int_{\Phi \circ R_n} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\Phi \circ R_{n+1}} f(z) dz \right|.$$

Alle weiteren Eigenschaften der Folge ergeben sich aus der Tatsache, dass R_{n+1} aus R_n durch Halbierung der Kantenlängen hervorgeht.

Als beschränkte und abgeschlossene Mengen sind die Rechtecke der Folge $(R_n)_{n=0}^\infty$ insbesondere kompakt, also sind es auch ihre Bilder $(\Phi(R_n))_{n=0}^\infty$. Wir haben also eine monoton fallende Folge kompakter nicht-leerer Mengen gefunden, deren Schnitt nach Erinnerung 2.25 nicht leer sein kann. Wegen (6.13c) muss ihr Schnitt den Durchmesser null besitzen, kann also nur einen Punkt enthalten, nämlich $z_0 \in \Phi(R)$. ■

Lemma 6.17 (GOURSAT) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes Gebiet, und sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $R \subseteq \mathbb{C}$ ein durch (6.12) definiertes Rechteck. Sei $\Phi : R \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Abbildung, die $\Phi(R) \subseteq \Omega$ erfüllt. Dann gilt

$$\int_{\Phi \circ \gamma_R} f(z) dz = 0.$$

Beweis. (vgl. [3, Abschnitt 2.2]) Seien eine Folge $(R_n)_{n=0}^\infty$ und ein $z_0 \in \Phi(R)$ wie in Lemma 6.16 gegeben.

Da Φ stetig differenzierbar ist, ist $D\Phi$ stetig auf der kompakten Menge R , nimmt also ein Maximum

$$M := 1 + \max\{\|D\Phi(z)\| : z \in R\}$$

an. Mit Hilfe dieser Konstanten können wir kontrollieren, wie stark die Abbildung Φ das Rechteck verformt.

Um die Behauptung zu beweisen, genügt es, zu zeigen, dass der Betrag des Integrals beliebig klein werden kann. Sei dazu ein $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben.

Da f holomorph auf $\Omega \supseteq R$ ist, ist es insbesondere in z_0 komplex differenzierbar, wir können also ein $\epsilon_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine Abbildung $\varphi : K(0, \epsilon_1) \rightarrow \mathbb{C}$ so finden, dass

$$\begin{aligned} K(z_0, \epsilon_1) &\subseteq \Omega, & \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) &= 0, \\ f(z_0 + h) &= f(z_0) + hf'(z_0) + h\varphi(h) & \text{für alle } h \in K(0, \epsilon_1) \end{aligned}$$

gelten.

Dank $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$ finden wir ein $\epsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$|\varphi(h)| < \epsilon \quad \text{für alle } h \in \mathbb{C}, |h| < \epsilon_2$$

erfüllt. Mit Lemma 6.16 finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\text{diam}(R_n) = 2^{-n} \text{diam}(R) < \frac{\min\{\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2\}}{M}$$

gilt. Seien $z \in \Phi(R_n)$ gegeben. Wir wählen Urbilder $y_0, y \in R_n$ mit $\Phi(y_0) = z_0$ und $\Phi(y) = z$. Mit Hilfe des Lemmas 6.11 erhalten wir

$$|z - z_0| = |\Phi(y) - \Phi(y_0)| \leq M|y - y_0|.$$

Da $y, y_0 \in R_n$ gilt, folgt mit (6.13c) somit

$$|z - z_0| \leq M \text{diam}(R_n) = M2^{-n} \text{diam}(R) < \min\{\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2\}$$

also haben wir insbesondere $\Phi(R_n) \subseteq K(z_0, \epsilon_1)$ bewiesen.

Jetzt können wir die gewünschte Abschätzung nachrechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Phi \circ \gamma_R} f(z) dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\Phi \circ \gamma_{R_n}} f(z) dz \right| \\ &= 4^n \left| \int_{\Phi \circ \gamma_{R_n}} f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\varphi(z - z_0) dz \right|. \end{aligned}$$

Da $z \mapsto f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ eine Stammfunktion besitzt, verschwindet das Kurvenintegral über diesen Teil des Integranden. Es bleibt

$$\left| \int_{\Phi \circ \gamma_R} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\Phi \circ \gamma_{R_n}} (z - z_0)\varphi(z - z_0) dz \right|$$

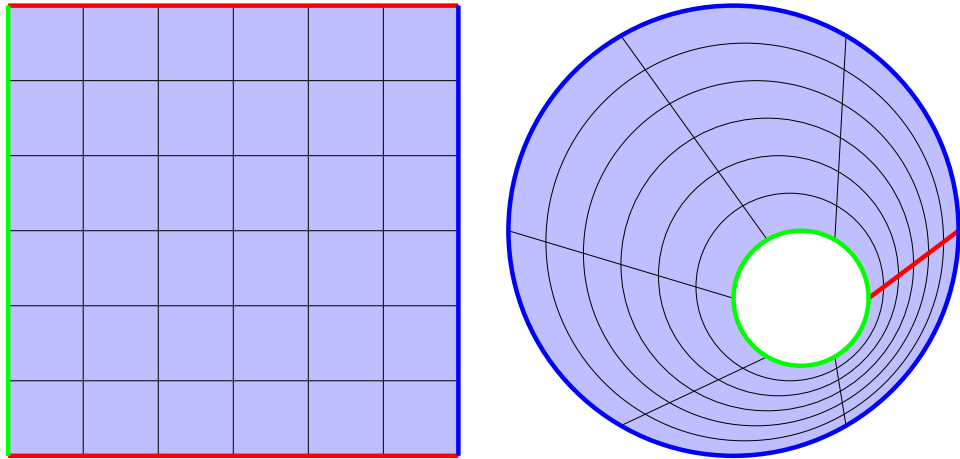


Abbildung 6.3: Doppelkreis als verformtes Rechteck

$$\begin{aligned} &\leq 4^n \int_{\Phi \circ \gamma_{R_n}} |z - z_0| |\varphi(z - z_0)| dz \\ &\leq 4^n \int_{\Phi \circ \gamma_{R_n}} M 2^{-n} \text{diam}(R) \epsilon dz = M 2^n \text{diam}(R) L(\Phi \circ \gamma_{R_n}) \epsilon. \end{aligned}$$

Mit Lemma 6.11 und (6.13e) folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Phi \circ \gamma_R} f(z) dz \right| &\leq M 2^n \text{diam}(R) L(\Phi \circ \gamma_{R_n}) \epsilon \\ &\leq M 2^n \text{diam}(R) M L(\gamma_{R_n}) \epsilon \\ &\leq M^2 2^n \text{diam}(R) 2^{-n} L(\gamma_R) \epsilon = M^2 \text{diam}(R) L(\gamma_R) \epsilon, \end{aligned}$$

und da ϵ beliebig gewählt war, haben wir die Behauptung bewiesen. ■

Mit Hilfe des Lemmas 6.17 von GOURSAT können wir auch Integrale über differenzierbar verformte Gebiete berechnen. Wir sind besonders an Kreise interessiert, da sie für Potenzreihen eine besondere Rolle spielen. Für Kurvenintegrale über Kreise führen wir die folgende Abkürzung ein: Falls $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist und falls $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $z_0 \in \Omega$ mit $\bar{K}(z_0, r) \subseteq \Omega$ gegeben sind, definieren wir die Kreisbahn

$$\gamma_{z_0, r} : [0, 1] \rightarrow \Omega, \quad t \mapsto z_0 + r \exp(2\pi i t),$$

und bezeichnen das korrespondierende Kurvenintegral mit

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz := \int_{\gamma_{z_0, r}} f(z) dz.$$

Für derartige Integrale ergibt sich aus dem Lemma von GOURSAT eine überraschende Konsequenz: Falls eine Kreisscheibe in der anderen enthalten ist, besitzen die beiden Kurvenintegrale denselben Wert.

Lemma 6.18 (Doppelkreis) Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, sei $z_1, z_2 \in \Omega$, und seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $K(z_1, r_1) \subseteq K(z_2, r_2)$ und $\bar{K}(z_2, r_2) \setminus K(z_1, r_1) \subseteq \Omega$ gegeben. Dann gilt

$$\int_{|z-z_1|=r_1} f(z) dz = \int_{|z-z_2|=r_2} f(z) dz.$$

Beweis. (vgl. [3, Abschnitt 2.3]) Wir untersuchen das Rechteck

$$R := \{x + iy : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$$

und die Abbildung

$$\Phi : R \rightarrow \mathbb{C}, \quad z = x + iy \mapsto (1-x)z_1 + xz_2 + ((1-x)r_1 + xr_2) \exp(2\pi iy).$$

Diese Abbildung ist reell stetig differenzierbar und besitzt die nützliche Eigenschaft, dass sie den rechten Rand des Rechtecks auf den äußeren und den linken Rand auf den inneren Kreis abbildet, während der obere und untere Rand die Verbindungslinie beschreiben (vgl. Abbildung 6.3). Diese Eigenschaft kann man leicht an den Gleichungen

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= (1-t)(z_1 + r_1) + t(z_2 + r_2), \\ \Phi(t+i) &= (1-t)(z_1 + r_1) + t(z_2 + r_2), \\ \Phi(it) &= z_1 + r_1 \exp(2\pi it), \\ \Phi(1+it) &= z_2 + r_2 \exp(2\pi it) \end{aligned} \quad \text{für alle } t \in [0, 1]$$

ablesen, die sich direkt aus der Definition ergeben. Um das Lemma 6.17 von GOURSAT anwenden zu können, müssen wir sicherstellen, dass $\Phi(R) \subseteq \Omega$ gilt. Nach Voraussetzung genügt es, zu zeigen, dass $\Phi(R) \subseteq \bar{K}(z_2, r_2) \setminus K(z_1, r_1)$ gilt. Für $z = x + iy \in R$ erhalten wir mit Hilfe von $z_1 + r_1 \exp(2\pi iy) \in \bar{K}(z_1, r_1) \subseteq \bar{K}(z_2, r_2)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |\Phi(z) - z_2| &= |(1-x)(z_1 + r_1 \exp(2\pi iy) - z_2) + x(z_2 + r_2 \exp(2\pi iy) - z_2)| \\ &= |(1-x)(z_1 + r_1 \exp(2\pi iy) - z_2) + xr_2 \exp(2\pi iy)| \\ &\leq (1-x)|z_1 + r_1 \exp(2\pi iy) - z_2| + xr_2 \leq (1-x)r_2 + xr_2 = r_2, \end{aligned}$$

also gilt $\Phi(R) \subseteq \bar{K}(z_2, r_2)$. Um zu zeigen, dass auch $\Phi(R) \cap K(z_1, r_1) = \emptyset$ gilt, gehen wir per Kontraposition vor: Für alle $z' \in K(z_1, r_1)$ und $x \in [0, 1]$ ergibt sich dank der Voraussetzung $K(z_1, r_1) \subseteq K(z_2, r_2)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |z' - ((1-x)z_1 + xz_2)| &= |(1-x)(z' - z_1) + x(z' - z_2)| \\ &\leq (1-x)|z' - z_1| + x|z' - z_2| < (1-x)r_1 + xr_2, \end{aligned}$$

also $z' \in K((1-x)z_1 + xz_2, (1-x)r_1 + xr_2)$. Für $z = x + iy \in R$ gilt

$$|\Phi(z) - ((1-x)z_1 + xz_2)| = |(1-x)r_1 + r_2x| = (x-1)r_1 + r_2x,$$

6 Grundlagen der Funktionentheorie

also $z' := \Phi(z) \notin K((1-x)z_1+xz_2, (1-x)r_1+xr_2)$, und wir erhalten per Kontraposition $\Phi(z) \notin K(z_1, r_1)$. Insgesamt haben wir damit $\Phi(R) \subseteq \bar{K}(z_0, r_2) \setminus K(z_0, r_1) \subseteq \Omega$ bewiesen, dürfen also Lemma 6.17 anwenden.

Wenn wir die gemäß Definition 6.14 gegebenen vier Kanten des Rechtecks durch die Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_{R,1} : [0, 1] &\mapsto R, & t &\mapsto t, & \gamma_{R,2} : [0, 1] &\mapsto R, & t &\mapsto 1 + it, \\ \gamma_{R,3} : [0, 1] &\mapsto R, & t &\mapsto (1-t) + i, & \gamma_{R,4} : [0, 1] &\mapsto R, & t &\mapsto i(1-t), \end{aligned}$$

beschreiben, stellen wir fest, dass

$$\Phi(\gamma_{R,2}(t)) = z_2 + r_2 \exp(2\pi it) = \gamma_{z_2, r_2}(t), \quad (6.14a)$$

$$\Phi(\gamma_{R,4}(t)) = z_1 + r_1 \exp(2\pi i(1-t)) = \gamma_{z_1, r_1}(1-t), \quad (6.14b)$$

$$(\Phi \circ \gamma_{R,4})'(t) = -\gamma'_{z_1, r_1}(1-t), \quad (6.14c)$$

$$\Phi(\gamma_{R,1}(t)) = (z_1 + r_1)(1-t) + (z_2 + r_2)t = \Phi(\gamma_{R,3}(1-t)), \quad (6.14d)$$

$$(\Phi \circ \gamma_{R,1})'(t) = -(\Phi \circ \gamma_{R,3})'(1-t) \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \quad (6.14e)$$

gelten, und mit dem Lemma 6.17 von GOURSAT folgt

$$0 = \int_{\Phi \circ \gamma_R} f(z) dz = \int_{\Phi \circ \gamma_{R,1}} f(z) dz + \int_{\Phi \circ \gamma_{R,2}} f(z) dz + \int_{\Phi \circ \gamma_{R,3}} f(z) dz + \int_{\Phi \circ \gamma_{R,4}} f(z) dz.$$

Für das erste Integral erhalten wir per Substitution und (6.14d) sowie (6.14e)

$$\begin{aligned} \int_{\Phi \circ \gamma_{R,1}} f(z) dz &= \int_0^1 f(\Phi \circ \gamma_{R,1}(t))(\Phi \circ \gamma_{R,1})'(t) dt \\ &= - \int_0^1 f(\Phi \circ \gamma_{R,3}(1-t))(\Phi \circ \gamma_{R,3})'(1-t) dt \\ &= \int_1^0 f(\Phi \circ \gamma_{R,3}(t))(\Phi \circ \gamma_{R,3})'(t) dt \\ &= - \int_0^1 f(\Phi \circ \gamma_{R,3}(t))(\Phi \circ \gamma_{R,3})'(t) dt = - \int_{\Phi \circ \gamma_{R,3}} f(z) dz, \end{aligned}$$

so dass es das dritte Integral gerade aufhebt.

Für das zweite Integral haben wir dank (6.14a)

$$\int_{\Phi \circ \gamma_{R,2}} f(z) dz = \int_{\gamma_{z_2, r_2}} f(z) dz = \int_{|z-z_2|=r_2} f(z) dz,$$

und für das vierte ergibt sich mit (6.14b) und (6.14c) die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{\Phi \circ \gamma_{R,4}} f(z) dz &= \int_0^1 f(\Phi \circ \gamma_{R,4}(t))(\Phi \circ \gamma_{R,4})'(t) dt \\ &= - \int_0^1 f(\gamma_{z_1, r_1}(1-t))\gamma'_{z_1, r_1}(1-t) dt = \int_1^0 f(\gamma_{z_1, r_1}(t))\gamma'_{z_1, r_1}(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^1 f(\gamma_{z_1, r_1}(t)) \gamma'_{z_1, r_1}(t) dt \\
&= - \int_{\gamma_{z_1, r_1}} f(z) dz = - \int_{|z-z_1|=r_1} f(z) dz.
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir

$$0 = \int_{|z-z_2|=r_2} f(z) dz - \int_{|z-z_1|=r_1} f(z) dz$$

bewiesen, und diese Gleichung ist äquivalent zu unserer Behauptung. ■

Eine erste Folgerung aus diesem Resultat ist der *Integralsatz von CAUCHY* in einer Version für Kreisscheiben, der sich durch einen einfachen Grenzübergang ergibt:

Satz 6.19 (CAUCHY) *Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei $z_0 \in \Omega$, und sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\bar{K}(z_0, r) \subseteq \Omega$ gegeben. Dann gilt*

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz = 0.$$

Beweis. (vgl. [3, Abschnitt 2.3]) Da f stetig ist muss $|f|$ auf der kompakten Menge $\bar{K}(z_0, r)$ ein Maximum

$$M := \max\{|f(z)| : z \in \bar{K}(z_0, r)\}$$

besitzen. Sei $\epsilon \in]0, r[$ gegeben. Indem wir Lemma 6.18 auf $z_1 = z_2 = z_0$, $r_1 = \epsilon$ und $r_2 = r$ anwenden, erhalten wir

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz = \int_{|z-z_0|=\epsilon} f(z) dz.$$

Mit Lemma 6.10 und

$$L(\gamma_{z_0, \epsilon}) = \int_0^1 |\epsilon 2\pi i e^{2\pi i t}| dt = 2\pi \epsilon$$

erhalten wir

$$\left| \int_{|z-z_0|=\epsilon} f(z) dz \right| \leq ML(\gamma_{z_0, \epsilon}) = 2\pi M\epsilon.$$

Da wir diese Ungleichung für beliebige $\epsilon > 0$ bewiesen haben, folgt die Behauptung. ■

Eine sehr bemerkenswerte Eigenschaft holomorpher Funktionen besteht darin, dass sie im „Inneren“ eines Kurvenzugs bereits durch ihr Verhalten auf dem Kurvenzug eindeutig bestimmt sind: Es gilt die CAUCHY-Integralformel. Obwohl wir uns hier auf den Fall einer Kreisscheibe beschränken, soll nicht unerwähnt bleiben, dass sich dieses Resultat auch für wesentlich allgemeinere Kurven gültig ist.

Satz 6.20 (CAUCHY-Integralformel) Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei $z_0 \in \Omega$, und sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\bar{K}(z_0, r) \subseteq \Omega$ gegeben. Dann gilt

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz \quad \text{für alle } w \in K(z_0, r). \quad (6.15)$$

Beweis. (vgl. [3, Satz 3.1]) Sei $w \in K(z_0, r)$ gegeben. Die Funktion

$$g : \Omega \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f(z)}{z-w},$$

ist infolge der Kettenregel holomorph. Sei $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so gewählt, dass $K(w, \epsilon) \subseteq \bar{K}(z_0, r)$ gilt. Nach Lemma 6.18, angewendet auf $z_1 = w$, $z_2 = z_0$, $r_1 = \epsilon$ und $r_2 = r$, gilt

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{|z-w|=\epsilon} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_{|z-w|=\epsilon} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz + \int_{|z-w|=\epsilon} \frac{f(w)}{z-w} dz.$$

Für das zweite Integral gilt

$$\int_{|z-w|=\epsilon} \frac{f(w)}{z-w} dz = \int_0^1 \frac{f(w)}{\epsilon \exp(2\pi i t)} 2\pi i \epsilon \exp(2\pi i t) dt = 2\pi i \int_0^1 f(w) dt = 2\pi i f(w),$$

während wir für das erste Integral feststellen, dass dank

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} = f'(w)$$

der Integrand für $\epsilon \rightarrow 0$ beschränkt bleibt, während die Kurvenlänge $L(\gamma_{w,\epsilon}) = 2\pi\epsilon$ gegen null geht. Also folgt

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz = 2\pi i f(w) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|z-w|=\epsilon} \frac{f(z) - f(w)}{z-w} dz = 2\pi i f(w).$$

Division durch $2\pi i$ ergibt die gewünschte Gleichung. ■

Aus der CAUCHY-Formel ergeben sich überraschende Konsequenzen. Nach Definition ist eine holomorphe Funktion einmal komplex differenzierbar. Mit Hilfe der CAUCHY-Formel lässt sich einfach zeigen, dass sie dann auch schon unendlich oft komplex differenzierbar sein muss.

Folgerung 6.21 (CAUCHY-Formel für Ableitungen) Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei $z_0 \in \Omega$, und sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\bar{K}(z_0, r) \subseteq \Omega$ gegeben. Dann ist f in $K(z_0, r)$ unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$f^{(m)}(w) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^{m+1}} dz \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0, w \in K(z_0, r). \quad (6.16)$$

Beweis. Für jedes $z \in \partial K(z_0, r) = \bar{K}(z_0, r) \setminus K(z_0, r)$ ist die Abbildung

$$g_z : K(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}, \quad w \mapsto \frac{f(z)}{z - w},$$

unendlich oft differenzierbar mit

$$g_z^{(m)}(w) = \frac{m! f(z)}{(z - w)^{m+1}} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0, w \in K(z_0, r).$$

Seien $w \in K(z_0, r)$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Nach dem zuvor Gesagten dürfen wir unter dem Integral (6.15) differenzieren und erhalten

$$f^{(m)}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{m! f(z)}{(z - w)^{m+1}} dz = \frac{m!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - w)^{m+1}} dz.$$

■

Wenn holomorphe Funktionen unendlich oft differenzierbar sind, stellt sich die Frage, ob auch ihre TAYLOR-Reihe konvergiert, ob sie sich also durch eine Potenzreihe darstellen lassen. Indem wir, wie schon im Abschnitt über Potenzreihenfunktionen, die geometrische Reihe geschickt einsetzen, können wir zeigen, dass in der Tat die TAYLOR-Reihe auf der größten in Ω enthaltenen Kreisscheibe konvergiert.

Folgerung 6.22 (Potenzreihe) *Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei $z_0 \in \Omega$, und sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\bar{K}(z_0, r) \subseteq \Omega$ gegeben. Dann gilt*

$$f(w) = \sum_{m=0}^{\infty} (w - z_0)^m \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz \quad \text{für alle } w \in K(z_0, r),$$

die Funktion ist also durch eine Potenzreihe darstellbar. Laut Folgerung 6.21 handelt es sich gerade um die TAYLOR-Reihe.

Beweis. (vgl. [3, Satz 3.3]) Sei $w \in K(z_0, r)$ gegeben. Daraus folgt $d := |w - z_0|/r < 1$. Für jedes $z \in \partial K(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\} = \gamma_{z_0, r}([0, 1])$ gilt

$$\left| \frac{w - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{|w - z_0|}{|z - z_0|} = d < 1,$$

so dass die geometrische Reihe für $(w - z_0)/(z - z_0)$ absolut und gleichmäßig für alle $z \in \partial K(z_0, r)$ konvergiert und

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^m = \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} = \frac{z - z_0}{z - w}$$

erfüllt. Da f als differenzierbare Funktion auf der kompakten Menge $\partial K(z_0, r)$ insbesondere stetig ist, konvergiert dann auch die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z - z_0} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0} \right)^m = \frac{f(z)}{z - z_0} \frac{z - z_0}{z - w} = \frac{f(z)}{z - w}$$

6 Grundlagen der Funktionentheorie

gleichmäßig für alle $z \in \partial K(z_0, r)$. Da wir in diesem Fall die Summation mit dem Integral vertauschen dürfen, folgt mit dem CAUCHY-Integralsatz 6.20 bereits

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f(z)}{z-z_0} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^m dz \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (w-z_0)^m \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz, \end{aligned}$$

quod erat demonstrandum. ■

Index

- Abgeschlossene Menge, 23
Äußeres Maß, 27
Anfangswertproblem, 112
Anfangswertproblem, linear, 127, 128
- BANACH, Fixpunktsatz von, 114
BEPPO LEVI, Satz von, 65
BORELMengen, eindimensional, 42
BORELSche σ -Algebra, 13
- CARATHÉODORY, 30
CAUCHY, Integralsatz von, 157
CAUCHY-Folgen, 51
CAUCHY-Integralformel, 158
CAUCHY-RIEMANN-Differentialgleichungen, 137
- Diffeomorphismus, 105
Differentialgleichung, gewöhnliche, 110
- FATOU, Lemma von, 70
Figuren, 9
Fluss, 127
FUBINI-TONELLI, Satz von, 93
Fundamentalmatrix, 129
- Gewöhnliche Differentialgleichung, 110
Gleichmäßige Konvergenz, 54
GOURSAT, Lemma von, 152
Grenzwert, 44
Grenzwert messbarer Funktionen, 44
- Halbnorm, 51
Hauptfundamentalmatrix, 129
HÖLDER-Ungleichung, 76
Holomorphe Funktion, 135
- Imaginärteil, 133
Indikatorfunktion, 45
- Infimum, 42
Inhalt, 15
Inhalt, \emptyset -stetig, 22
Inhalte von Figuren, 19
Inhalte von Quadern, 16
Integral einer Treppenfunktion, 49
Integrierbare Funktionen, 53
- JORDAN-Inhalt, 19
- Kompakte Mengen, 23
Komplexe Zahl, 133
Konjugiert komplex, 134
Konvergenzradius, 140
Kurve, 144
Kurvenintegral, 144
Kurvenlänge, 145
Kurvenzug, 146
- L^1 -Halbnorm, 52
 $L^2(\Omega, \mu)$, HILBERT-Raum, 82
LEBESGUE, Satz von, 71
LEBESGUE-Integral, 58
LEBESGUE-Integral, Eindeutigkeit, 56
LEBESGUE-Integral, Rechenregeln, 58
LEBESGUE-Maß, 35
LEBESGUE-Prämaß, 24
Limes inferior, 44
Limes superior, 44
LIOUVILLE, Satz von (Dgl.), 130
LIPSCHITZ-Stetigkeit, lokal, 117
 $L^p(\Omega, \mu)$, BANACH-Raum, 82
 L^p -Halbnorm, 76
 L^∞ -Raum, 83
 L^p -Raum, 82
 \mathcal{L}^∞ -Raum, 83
 \mathcal{L}^p -Raum, 76

INDEX

- Maße, Fortsetzung, 34
- Majorisierte Konvergenz, 71
- Maß, 26
- Maximum, Integrierbarkeit, 68
- Mengenring, 9
- Messbare Abbildung, 38
- Messbare Abbildung, Integrierbarkeit, 72
- Messbare Abbildung, Komponenten, 41
- Messbare Abbildung, Vektorraum, 41
- Messbare Abbildung, Verkettung, 39
- Messbare Funktionen, Grenzwert, 44
- Messbare Funktionen, Infimum, 43
- Messbare Funktionen, Supremum, 43
- Messbarkeit stetiger Abbildungen, 40
- Messbarkeit von Projektionen, 41
- MINKOWSKI-Ungleichung, 78
- Monotone Konvergenz, 65
- μ -messbare Funktion, 45
- μ^* -messbare Menge, 30

- Nullmenge, 52

- Offene Menge, 14

- PICARD-Iteration, 116
- PICARD-LINDELÖF, Satz von, 114
- Potenzreihe, 139
- Prämaß, 20
- Produkt- σ -Algebra, 40
- Produktintegration, 93
- Produktmaß, 91

- Quader, 9

- Realteil, 133
- Rechenregeln, Inhalt, 15
- Rechenregeln, Integral auf $\mathcal{S}(\Omega, \mu)$, 49
- Rechenregeln, LEBESGUE-Integral, 58
- Rechenregeln, Maß, 26
- Rechenregeln, Mengenring, 9
- Rechenregeln, Prämaß, 20
- Rechenregeln, σ -Algebra, 12
- RIEMANN-Integral, 67
- Ring, 9

- Satz von CARATHÉODORY, 30
- σ -Algebra, 12
- σ -Algebra, Produkt, 40
- σ -endliches Prämaß, 33, 46
- Stetige Abbildungen, 40
- Supremum, 42
- Supremum, Integrierbarkeit, 68

- Transformationsformel, 106
- Treppenfunktion, 45

- Variablentransformation, 106
- Vektorfeld, 111
- Verkettung messbarer Abbildungen, 39
- Vollständige Räume, 51

- WRONSKI-Determinante, 130

- YOUNG-Ungleichung, 75

- Zusammenhängende Menge, 119

Literaturverzeichnis

- [1] Heinz Bauer. *Maß- und Integrationstheorie*. De Gruyter Berlin, 1992.
- [2] Theodor Bröcker. *Analysis III*. <http://www.mathematik.uni-regensburg.de/broecker/kap13.pdf>.
- [3] K. Jänich. *Funktionentheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [4] Konrad Königsberger. *Analysis 2*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [5] Serge Lang. *Real and Functional Analysis*. Springer New York, 1993.
- [6] Serge Lang. *Complex Analysis*. Springer New York, 1999.
- [7] Wolfgang Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer Berlin Heidelberg New York, 1993.
- [8] Wikipedia. Gröwall-Ungleichung, 2010. http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Beweisarchiv:_Analysis:_Ungleichungen:_Gr%C3%B6nwall%27sche_Ungleichung&oldid=338783.
- [9] Wikipedia. Satz von Picard-Lindelöf, 2010. http://de.wikibooks.org/w/index.php?title=Beweisarchiv:_Gew%C3%B6hnliche_Differentialgleichungen:_Existenztheorie:_Satz_von_Picard-Lindel%C3%B6f%&oldid=423880.